



# PHYSIKALISCHES PRAKTIKUM FÜR FORTGESCHRITTENE

FP 12

Versuch:   MAGNETISCHE ORDNUNG UND  
              LOCK-IN VERSTÄRKER

Literaturmappe zum Versuch FP12:

Tietze / Schenk, Halbleiterschaltungstechnik

S. 1-26: Der Tiefpass

S. 880-885: Synchrongleichrichter

K. Kopitzki, Einführung in die Festkörperphysik

S. 201-232: Magnetische Eigenschaften der Festkörper

H. Drulis / M. Drulis, Magnetic Properties of Metals

- Rare Earth Elements: 2.1.3.9 Dysprosium

Landolt-Börnstein, Condensed Matter, III/19D1, 1991, pp 129-139

weitere Literatur:

C. Kittel, Einführung in die Festkörperphysik:

Kap. 14: Diamagnetismus und Paramagnetismus

Kap. 15: Ferromagnetismus und Antiferromagnetismus

N.W. Ashcroft / N.D. Mermin, Festkörperphysik

Kap. 31: Diamagnetismus und Paramagnetismus

Kap. 32: Wechselwirkungen der Elektronen und magnet. Struktur

Kap. 33: Magnetische Ordnung

Bergmann-Schaefer, Lehrbuch der Experimentalphysik: Festkörper

Kap. 8: Magnetismus in Festkörpern

Stichworte:

Lock-In Verstärker:

- Synchrone Gleichrichter, Tiefpass
- Phasen- und Frequenzabhängigkeit des Lock-In
- Rauschen

Magnetismus:

- Definitionen magnetischer Größen
- Klassifizierung magnetischer Phänomene

Atomarer Magnetismus:

- Austauschwechselwirkung, Pauli-Prinzip, Hundsche Regeln,
- Gesamtdrehimpuls, Landé-Faktor, magnetisches Moment,

Magnetismus im Festkörper, ohne Wechselwirkung:

- Landau-Diamagnetismus,
- Paramagnetismus: Zwei-Niveau-System und Brillouinfunktion
- Herleitung Curie-Gesetz
- Pauli-Paramagnetismus der Leitungselektronen

Magnetismus im Festkörper, mit Wechselwirkung:

- Molekularfeldnäherung und Curie-Weiss-Gesetz
- Indirekte Austauschwechselwirkungen

Magnetismus im Periodensystem (Dysprosium)

Widerstand von Metallen (optional):

- Bloch-Theorem
- Matthiesensche Regel

Messmethoden:

- AC-Suszeptibilität: Mutual Inductance Bridge
- Elektrischer Widerstand (optional): Vier-Punkt-Methode

# 1 Theoretische Grundlagen:

## 1.1 Lock-In Verstärker:

Bei der Messung physikalischer Größen treten Störgrößen (z.B. aufbaubedingte Einstrahlungen oder Funkel-, Schrot- und thermisches Rauschen) auf, die das Erkennen des eigentlichen Messsignals erschweren oder ohne weitere Hilfsmittel unmöglich machen. Lock-In Verstärker finden ihre Anwendung bei der Messung kleiner AC(=alternating current)-Signale. Sie liefern auch dann noch saubere Signale, wenn das Eingangssignal deutlich verrauscht (Rauschamplitude einige tausendmal größer als Signalamplitude) ist.

Der im Versuch benutzte Lock-In (Firma: EG&G Princeton Applied Research) besteht im wesentlichen aus einem Halbleiterschalter (Gate), der das periodische Signal auf eine Widerstands-Kondensator-Kombination (RC-Glied, Tiefpass) gibt, welche die Spannung über mehrere Perioden mittelt. Im üblichen Messbetrieb ist der Schalter genau eine halbe Periodendauer geschlossen ( $\omega_{Sig} = \omega_{Ref}$ ), da derselbe Oszillator sowohl das Referenzsignal erzeugt als auch das Eingangssignal aus dem Experiment moduliert. Ebenso beträgt die Phasenlage von Signal und Referenz  $\phi = 0$ , sofern das physikalische System keine Phasenverschiebung zur Modulationsanregung erzeugt (Bsp.: komplexer Widerstand). Für die Bestimmung der Phasenabhängigkeit in Aufgabenstellung 1 sowie der Filtercharakteristik in Aufgabenstellung 2 ist hingegen  $\phi \neq 0$  bzw.  $\omega_{Sig} \neq \omega_{Ref}$  explizit erwünscht und zu variieren, wozu im zweiten Fall ein weiterer Oszillator benötigt wird. Schaltung und Arbeitsprinzip des Lock-In sind in Abb. 1 skizziert.

Die Wirkungsweise des eine halbe Periode geöffneten Schalters ist vergleichbar (inwiefern, Unterschied?) einer Multiplikation des Signals  $U_{Sig}(t)$  mit einem Rechteck-Referenzsignal  $S_{Ref}(t)$ . Dieses Produkt wird nun als Eingangssignal  $U_e(t)$  auf einen Tiefpass gegeben.

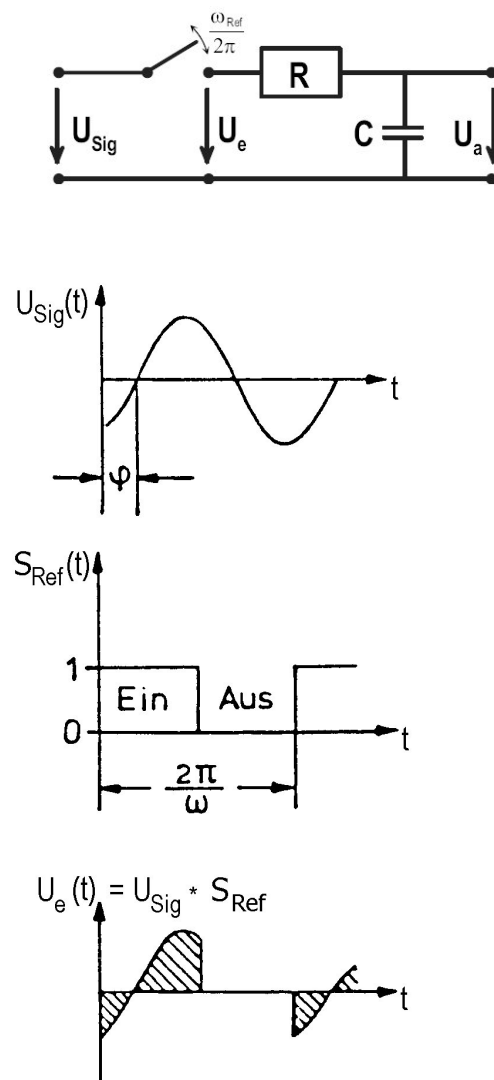


Abbildung 1: Synchrongleichrichter und RC-Glied

$$U_{Sig}(t) = U_0 \sin(\omega_{Sig}t + \varphi) \quad (1)$$

$$S_{Ref}(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin((2n+1)\omega_{Ref}t)}{2n+1} \quad (2)$$

$$U_e(t) = U_{Sig}(t) * S_{Ref}(t) = U_0 \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin((2n+1)\omega_{Ref}t) \sin(\omega_{Sig}t + \varphi)}{2n+1} \quad (3)$$

Nur für Frequenzen  $\omega_{Sig}$ , die ein ungeradzahliges Vielfaches der Referenzfrequenz betragen, hat  $U_e(t)$  einen DC-Anteil, der unverändert vom Tiefpass durchgelassen wird. In allen anderen Fällen hängt es von der Zeitkonstante  $\tau = RC$  des Tiefpasses und den Frequenzen der Fourierkomponenten von  $U_e$  ab, wie sehr diese dem Dämpfungsverhalten des Tiefpasses unterliegen. Letzteres erhält man aus der komplexen Verstärkung  $A(i\omega)$  durch Betragsbildung:

$$A(i\omega) = \frac{U_a}{U_e} = \frac{1}{1 + i\omega RC} \quad (4)$$

$$|A(i\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 \tau^2}} \quad (5)$$

Äquivalent zu  $\tau$  nutzt man als Kenngröße des Tiefpasses auch die Grenzfrequenz  $f_g = 1/(2\pi RC)$ , bei der das Ausgangssignal gerade um  $\pi/4$  phasenverschoben zum Eingangssignal ist. Zur Darstellung wählt man eine doppeltlogarithmische Auftragung (Bode-Diagramm):

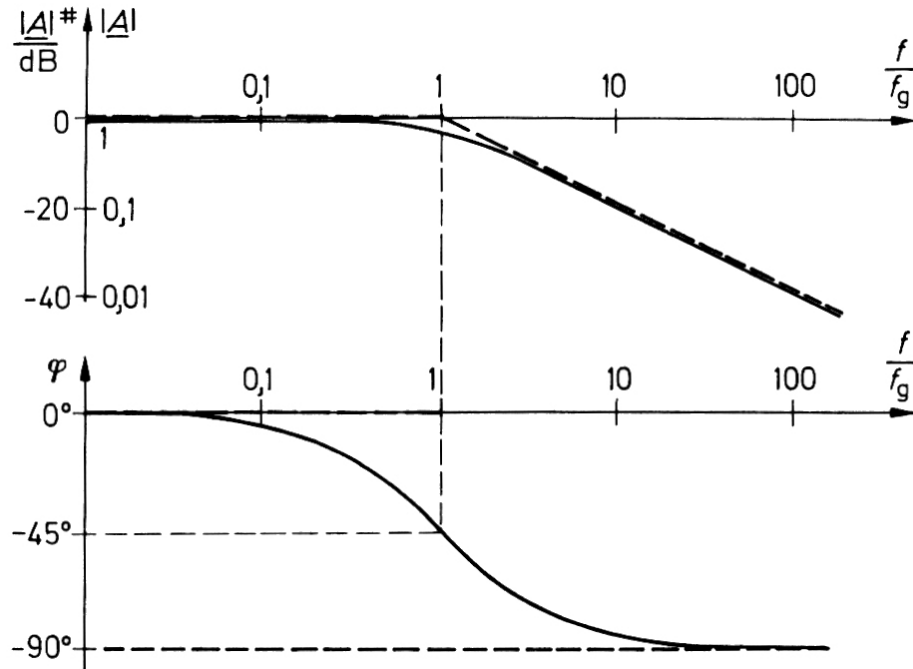


Abbildung 2: Bode-Diagramm eines Tiefpasses

## 1.2 Magnetische Ordnung:

Ein wichtiges Verfahren zur Untersuchung magnetischer Eigenschaften von Materie bildet die Messung der isothermen magnetischen Suszeptibilität

$$\chi = \left( \frac{\partial M}{\partial H} \right)_T \quad (6)$$

$M$  ist die Magnetisierung – definiert als magnetisches Moment  $m$  pro Volumen  $V$  – und  $H$  die magnetische Feldstärke. Je nach Vorzeichen und Größe der Suszeptibilität unterscheidet man grob drei Formen des Magnetismus:

1. Diamagnetismus:  $\chi < 0$   
Durch ein von außen angelegtes Magnetfeld wird in der Materie ein magnetisches Moment induziert, das dem äußeren Feld entgegengerichtet ist. Beispiel: Edelgase
2. Paramagnetismus:  $\chi > 0$   
Die ohne äußeres Feld vorhandenen permanenten magnetischen Dipolmomente werden durch ein äußeres Magnetfeld gegen die thermische Bewegung ausgerichtet. Beispiel: Atome und Ionen mit einer teilweise gefüllten Schale (z. B.  $3d$ ,  $4f$ ).
3. Magnetische Ordnung:  $\chi \gg 0$   
Wenn bei hinreichend tiefen Temperaturen die thermische Energie  $k_B T$  wesentlich kleiner wird als die Wechselwirkungsenergie  $E_w$  der magnetischen Momente ( $k_B T \ll E_w$ ), werden diese Momente durch  $E_w$ , d. h. ohne äußeres Feld ausgerichtet. Je nach Anordnung der magnetischen Momente unterscheidet man zwischen ferro-, antiferro-, ferri- und helimagnetischen Substanzen.

Die Magnetisierung und damit die magnetische Suszeptibilität einer Substanz ist i. a. eine Funktion des Magnetfeldes und der Temperatur, bei magnetischer Ordnung sogar eine ihrer Vorgeschichte (Hysterese). Für die Magnetisierung des idealen Paramagneten, der aus  $N$  wechselwirkungsfreien magnetischen Momenten der Größe  $J g_J \mu_B$  ( $J$  = Drehimpulsquantenzahl,  $g_J$  = Landéscher Aufspaltungsfaktor,  $\mu_B$  = Bohrsches Magneton) besteht, ergibt die quantentheoretische Rechnung

$$M = \frac{N}{V} J g_J \mu_B B_J \left( \frac{J g_J \mu_B H}{k_B T} \right) \quad (7)$$

wobei die Brillouin-Funktion  $B_J$  folgendermaßen definiert ist:

$$B_J(x) = \frac{2J+1}{2J} \coth \left( \frac{2J+1}{2J} x \right) - \frac{1}{2J} \coth \left( \frac{1}{2J} x \right) \quad (8)$$

Für hohe Temperaturen,  $k_B T \gg J g_J \mu_B H$ , d. h.  $x \ll 1$ , erhält man aus den Gleichungen (6) - (8) für die isotherme Suszeptibilität das Curie-Gesetz:

$$\chi(T) = \frac{N}{V} \frac{(g_J \mu_B)^2}{\mu_0 k_B T} \frac{J(J+1)}{3} = \frac{C}{T} \quad (9)$$

( $C$  = Curie-Konstante)

Berücksichtigt man nun die Wechselwirkung der magnetischen Momente untereinander durch einen Molekularfeld-Ansatz, indem man in Gleichung (7) das äußere Magnetfeld  $H$  ersetzt durch ein effektives Feld der Form

$$H_{eff} = H + \frac{\alpha}{\mu_0} M, \quad (10)$$

so ergibt sich für die isotherme Suszeptibilität bei hohen Temperaturen,  $k_B T \gg JgJ\mu_{B_{eff}}$  (paramagnetischer Bereich), analog aus den Gleichungen (6) - (8) das Curie-Weiss-Gesetz:

$$\chi(T) = \frac{C}{T - \theta}; \quad \theta = \alpha C \quad (11)$$

Die Größe und das Vorzeichen der Curie-Weiss-Temperatur  $\theta$  sind bestimmt durch die Stärke und das Vorzeichen der magnetischen Wechselwirkung.  $\theta$  ist i. a. verschieden von der Néel-Temperatur  $T_N$ , bei der die magnetische Ordnung einsetzt.  $T_N$  ist im Dysprosium durch ein Maximum der Suszeptibilität ausgezeichnet (warum?). Die magnetische Ordnung manifestiert sich aber auch in anderen physikalischen Größen wie z.B. dem elektrischen Widerstand, der spezifischen Wärme, der Thermokraft oder der spezifischen Längenausdehnung.

In diesem Versuch kann neben der magnetischen AC-Suszeptibilität auch noch die Änderung des elektrischen Widerstandes betrachtet werden (optional). Dabei nimmt bei einsetzender magnetischer Ordnung der elektrische Widerstand ab, da die nun ausgerichteten magnetischen Momente eine periodische Anordnung besitzen und daher die Leitungselektronen an diesem periodischen Potential nicht mehr gestreut werden (Blochwellen).

## 2 Experimentelle Grundlagen:

### 2.1 Versuchsaufbau:

Der prinzipielle Aufbau des Teils des Messstabes, der in ein geeignetes Kühlmittel ( $N_2$ , He, flüssig) eingetaucht wird und so erst den Zugang zu den tiefen Temperaturen  $T_N$  und  $T_C$  von Dysprosium ermöglicht, ist nachfolgend abgebildet. Nicht abgebildet ist der obere Teil, der sich an das dünnwandige Edelstahlrohr anschließt und die Vakuumdurchführung der elektrischen Leitungen sowie ein Vakuumventil beinhaltet.

Der in das Kühlmittel eintauchende untere Teil des Messstabes ist im wesentlichen aus Kupfer gefertigt und von einer verschließbaren Messingkanne gegen direkten Kontakt mit dem Kühlmittel geschützt. Die Kühlleistung wird nicht direkt auf die Kupferkomponenten gegeben, sondern über einen sogenannten Weak-Link, ein kurzes Stück Kupferdraht geeigneten Durchmessers, der die schlecht wärmeleitende Edelstahl-Distanzhülse zwischen Messing- und Kupferkomponenten überbrückt. So kann die Heizleistung am Heizerblock gering gehalten und auch bei vollständig eingetauchtem Messstab bis zu Raumtemperatur geheizt werden, ohne zuviel Wärme an das Kühlmedium zu verlieren und dieses zu verbrauchen. Weiterhin ist der gesamte Innenraum des Messstabes evakuierbar, um ungewollte Kühleffekte durch Konvektion und Wärmeleitung der Luft zu unterbinden. Dadurch wird insbesondere ein Temperaturgradient zwischen Probe und Temperatursensor verringert, der im Heizerblock eingebettet als Teil des Messstabes nie unmittelbar am Probenort befestigt werden kann (auswechselbare Spulen oder Widerstandsprobenhalter). Die Kühlleistung gelangt ebenso wie die zur Temperaturregelung benötigte Heizleistung einer Wicklung Heizdrahtes um den Heizerblock aus der gleichen Richtung zur Probe, so dass sich diese idealerweise thermisch an einem toten Ende befindet. Die elektrischen Zuleitungen werden am Heizerblock thermisch abgefangen und enden unten an Lötstützpunkten. Probenhalter werden in ein Gewinde im Heizerblock geschraubt und dessen elektrische Leitungen an den Lötstützpunkten verlötet.

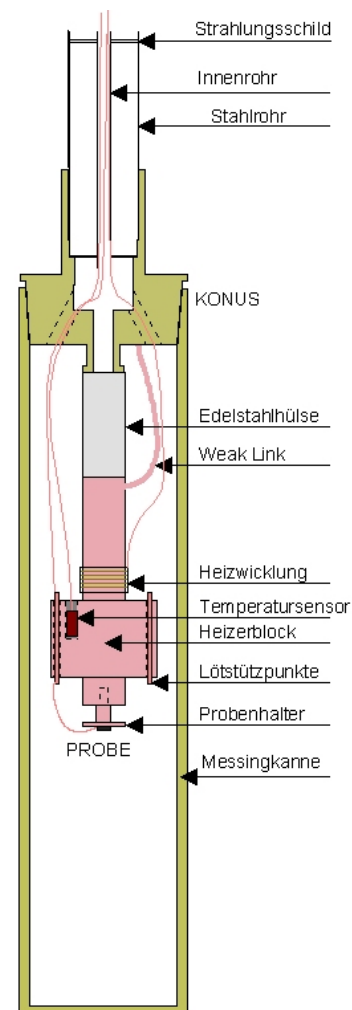


Abbildung 3: Kryo-Messstab

## 2.2 Messprinzip:

### 2.2.1 AC-Suszeptibilität

Zur Messung der AC-Suszeptibilität wird eine Mutual Inductance Bridge (MIB) verwendet.

Ein Wechselstrom  $I_{AC}$  durch die Primärspule  $I$  erzeugt in dieser ein magnetisches Wechselfeld, dessen Flussänderung in den darin befindlichen Spulen  $II$  und  $II'$  jeweils eine Spannung  $U_{ind}$  induziert:

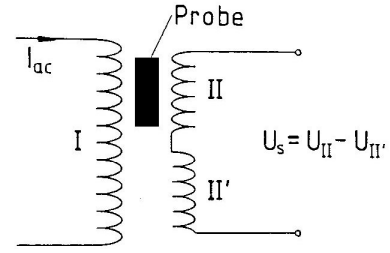


Abbildung 4: Mutual Inductance Bridge

$$U_{ind}(t) = -n\dot{\Phi} = -n \int \dot{B} dA \quad (12)$$

Die beiden Sekundärspulen haben gleiche Windungszahl, sind aber gegenläufig gewickelt. Die Spannung beträgt demnach

$$U_S = U_{II} - U_{II'} \quad (13)$$

Ohne Probe ist  $U_{Sig}$  idealerweise gleich Null (Spulenabgleich). Befindet sich jedoch in einer der Spulen, z. B. in  $II$ , eine Probe, so wird dort der magnetische Fluss verändert:

$$\dot{\Phi}_{II} = \int [\dot{B} - \mu_0(1 - N) \dot{M}] dA \quad (14)$$

( $N$  : Entmagnetisierungsfaktor)

Die messbare Spannung  $U_{Sig}$  beträgt dann

$$U_S = n\mu_0(1 - N) \int \dot{M} dA \quad (15)$$

$$U_S \sim \dot{M} = \frac{\partial M}{\partial H} \frac{\partial H}{\partial t} = \chi \dot{H} \quad (16)$$

Sie ist demnach proportional zur Suszeptibilität der Probe. Wegen der Zeitableitung ist sie allerdings um  $90^\circ$  phasenverschoben bezüglich des Stroms durch die Primärspule sowie linear an die Anregungsfrequenz  $\omega$  gekoppelt.

Um die Phasenverschiebung zwischen dem Strom durch die Primärspule und der Anregungsspannung des Oszillators zu minimieren, kann ein externer Vorwiderstand ( $1 \text{ k}\Omega$ ) im Primärkreis dienen. Zwar wird dadurch die Amplitude des Primärstroms verringert, seine Variation im Verlauf des Abkühlprozesses jedoch verringert, ebenso wie die der Phasenverschiebung des dann nahezu ohmschen Stromkreises. Weiterhin bietet sich durch Spannungsabgriffe über dem Vorwiderstand die Möglichkeit, gerade diese Informationen mit Hilfe eines zweiten Lock-In Verstärkers zu detektieren.

### 2.2.2 Elektrischer Widerstand (optional)

Zur Messung des elektrischen Widerstands eines polykristallinen Dysprosiumstäbchens wird die 4-Punkt AC-Methode verwendet, um Zuleitungs- und Kontaktwiderstände sowie Thermospannungen zu eliminieren und die Filtereigenschaft des Lock-In zu nutzen.

### 3 Vor Versuchsbeginn zu bearbeitende Aufgaben:

1. Stellen Sie die DGL für die Ausgangsspannung  $U_a(t)$  eines RC-Gliedes auf. Von welchem Typ ist diese DGL, wie lässt sie sich interpretieren?
2. Zeigen Sie, dass ein zur DGL vom Typ  $\dot{x} = ax + b(t)$  gehöriges Anfangswertproblem  $x(t_0) = x_0$  die allgemeine Lösung

$$\bullet \quad x(t; t_0, x_0) = x_0 e^{a(t-t_0)} + \int_{t_0}^t b(\tilde{t}) e^{a(t-\tilde{t})} d\tilde{t}$$

besitzt. Wie sieht daher die Lösung der DGL des Tiefpasses für folgende einfache Spezialfälle von  $U_e(t)$  aus? (Skizze)

$$\bullet \quad U_e(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0; \\ U_0 & t > 0. \end{cases} \quad \bullet \quad U_e(t) = \begin{cases} U_0 & t \leq 0. \\ 0 & t > 0; \end{cases}$$

3. Leiten Sie daraus das Verhalten der Ausgangsspannung  $U_a(t)$  ab, wenn als Eingangssignal eine Rechteckspannung der Kreisfrequenz  $\omega$  anliegt:

$$\bullet \quad U_e(t) = \begin{cases} 0 & t < 0. \\ U_0 & 0 < t \bmod T < T/2 \\ 0 & T/2 < t \bmod T < T. \end{cases} \quad ; T = 2\pi/\omega$$

Unterscheiden Sie die Fälle  $\omega\tau \ll 1$ ,  $\omega\tau \approx 1$ ,  $\omega\tau \gg 1$  ( $\tau = RC$ ). Betrachten Sie sowohl das Einschwingverhalten als auch den Langzeitlimes (Skizze genügt).

4. Was ändert sich, wenn als Eingangsspannung ein gleichgerichteter Sinus anliegt?

$$\bullet \quad U_e(t) = U_0 |\sin(\omega t)|$$

(Skizze für  $\omega\tau \approx 1$  genügt) Inwiefern hat dieser Fall Bezug zu einem reinen Sinussignal  $U_e(t) = U_0 \sin(\omega t)$ , das als Signalspannung auf einen Lock-In (vom Typ EG&G mit Halbleiter-Gate) gegeben wird?

5. Berechnen Sie die Fit-Funktionen für die Peaks der Filtercharakteristik eines Lock-In (Referenzfrequenz: 35 Hz) im Bereich ( $20 \text{ Hz} < f < 200 \text{ Hz}$ ) für drei verschiedene Zeitkonstanten des Tiefpasses ( $\tau = 100, 300, 1000 \text{ ms}$ ). Mittels eines Additionstheorems lässt sich zunächst für die Eingangsspannung des Tiefpasses (Formel (3)) eine Fourierdarstellung (Summe von Cosinus-Termen) gewinnen. Unter der Annahme, dass vom Tiefpass ohnehin nur die niederfrequenten Komponenten durchgelassen werden, kann dessen Dämpfungsverhalten (Formel (5)) dann näherungsweise auf den jeweils relevanten Summanden der Fourierdarstellung beschränkt werden.

## 4 Versuchsdurchführung

**1. Aufgabe: Filtercharakteristik** Messen Sie die Filtercharakteristik eines Lock-In. Stellen Sie dazu den Lock-In (Modell EG&G) auf eine interne Referenzfrequenz von 35 Hz ein. Stellen Sie sicher dass alle Eingangsfilter deaktiviert sind (nur FLAT, MAN leuchten) und auch alle anderen Einstellungen ihre Standardwerte anzeigen ('Line Reject', 'Offset' und 'Expand' deaktiviert, 'Dyn Res' auf NORM, 'Slope' auf 6dB und 'Display' auf 'R  $\theta$ '). Legen Sie an den Eingang des Lock-In eine Wechselspannung an (z.B. von zweitem Lock-In: Stanford Reserach SR830) und messen Sie die sich ergebende Schwebungsamplitude R als Funktion der Eingangsfrequenz ( $20 \text{ Hz} < f < 200 \text{ Hz}$ ) für drei verschiedene Integrationszeiten des EG&G-Lock-In ( $\tau = 100, 300, 1000 \text{ ms}$ ). Wählen Sie dabei geeignete Stützstellen für die Eingangsfrequenz, um Aussagen über Lage, Amplitude und Halbwertsbreite der Peaks machen zu können (zur exakten experimentellen Bestimmung der Peaklage kann die Phaseninformation genutzt werden!). Zur Auswertung nutzen Sie die Möglichkeiten der Kurvenanpassung moderner Datenanalysesoftware wie beispielsweise OriginPro unter Verwendung der Fit-Funktion aus Vorbereitungsaufgabe 5.

### 2. Aufgabe: AC-Suszeptibilität von Dysprosium

Starten Sie die Abkühl- und Aufwärmmessungen der magnetischen AC-Suszeptibilität von Dysprosium im Temperaturintervall von 80 K bis 300 K mit dem SR830 Lock-In ( $f=589 \text{ Hz}$ ,  $U=3\text{V}$ ,  $\tau=1\text{s}$ ). Zur Auswertung bestimmen Sie nach Abzug der Leermessung aus geeigneten Auftragungen der Daten die Néel-Temperatur  $T_N$  und die paramagnetische Curie-Weiss-Temperatur  $\theta$ . Letztere ist mithilfe einer Fit-Funktion über einen geeigneten Temperaturbereich der Daten zu ermitteln. Gibt es Unterschiede zwischen Abkühl- und Aufwärmmessung? Vergleichen Sie mit Literaturwerten und diskutieren Sie mögliche Fehlerquellen.

### 3. Aufgabe: Phasenverschiebung

Legen Sie an den Eingang des EGG Lock-In das Ausgangssignal seines Oszillators an und variieren Sie die Phasenlage mit angemessener Schrittweite.

Tragen Sie die Y-Komponente des Lock-In-Signals über dem Phasenwinkel auf und bewerten Sie etwaige Abweichungen vom theoretisch erwarteten Verlauf. (Die Auswertung erfolgt wie in Teilaufgabe 1 durch eine Kurvenanpassung mit geeigneten Fitparametern)

### Hinweise zum Protokoll

Theorieteil eher knapp halten, dennoch sollte das Funktionsprinzip des Lock-In-Verstärkers klar und zusammen mit den Vorbereitungsaufgaben hinreichend vertieft dargestellt werden. Zum Thema Magnetismus sollte man zwar einen Überblick über die verschiedenen Typen und deren theoretische Modelle darstellen, lange technische Herleitungen allerdings vermeiden und Schwerpunkte dort setzen, wo ein Bezug zum durchgeführten Experiment besteht (Dysprosium).

Prinzipiell sollte alles, was bei der tatsächlichen Versuchsdurchführung beachtet werden musste und theoretischen Hintergrund besitzt, angemessen erklärt werden.

Die Auswertung sollte mit modernen Hilfsmitteln der Datenanpassung möglichst viel aus den Daten 'herausholen' und es sollten alle Schritte nachvollziehbar sein. Bitte auch die Auswertungsdatei per Email zurücksenden.