
Analysis I

Vorlesungsmitschrift

Version: 29. September 2026

Lisa Beck
Sommersemester 2026



Dieses Skript entstand aus den Mitschriften der Vorlesung zur Analysis I an der Universität Augsburg und ist für eine gründliche Nachbereitung des Stoffes gedacht. Zu diesem Zweck sind nicht nur viele Bemerkungen ausführlicher als in der Vorlesung formuliert, sondern auch einige Übungen aufgenommen, deren Bearbeitung für das Verständnis der zuvor eingeführten Begriffe und Konzepte hilfreich sein kann. Darüber hinaus gibt es hier für einige Sätze die Beweise, die in der Vorlesung lediglich skizziert oder weggelassen wurden, und weitere Ergänzungen, die zwar wissenswert oder aufschlussreich, aber für das Verständnis der Vorlesung nicht essentiell sind. Dieses zusätzliche Material dient der Vertiefung für besonders interessierte Student:innen und ist jeweils mit ★ gekennzeichnet.

Hinweise zu Fehlern, Verbesserungsvorschläge oder sonstige Kommentare sind jederzeit willkommen und ich bitte darum, mir diese per E-Mail an lisa.beck@math.uni-augsburg.de zukommen zu lassen. An dieser Stelle möchte ich Tanja Lochner und Ferdinand Eitler für ihre Anmerkungen danken.

Inhaltsverzeichnis

1 Grundlagen	5
1.1 Aussagenlogik	6
1.2 Elementare Beweisprinzipien	11
1.3 Mengen	14
1.4 Funktionen	23
1.5 Natürliche Zahlen und vollständige Induktion	29
2 Reelle Zahlen	41
2.1 Die Körperaxiome	42
2.2 Das Anordnungsaxiom	47
2.3 Das Vollständigkeitsaxiom	60
3 Komplexe Zahlen	75
3.1 Der Körper der komplexen Zahlen	75
3.2 Darstellung in der komplexen Zahlenebene	81
4 Folgen	85
4.1 Konvergenz	87
4.2 Konvergenzkriterien für reelle Folgen	93
4.3 Häufungswerte und der Satz von Bolzano–Weierstraß	100
4.4 Cauchy-Folgen	106
5 Reihen	113
5.1 Konvergenzkriterien für reelle Reihen	119
5.2 Konvergenzkriterien für komplexe Reihen	123
5.3 Umordnungen	130
5.4 Potenzreihen	138
6 Grenzwerte und Stetigkeit von Funktionen	145
6.1 Grenzwerte	145
6.2 Stetigkeit und elementare Eigenschaften	151
6.3 Stetige Funktionen in Grenzprozessen	159
6.4 Stetige Funktionen auf kompakten Intervallen	166
7 Die Exponentialfunktion und die trigonometrischen Funktionen	175
7.1 Die Exponentialfunktion	175
7.2 Allgemeine Potenzen	182
7.3 Die trigonometrischen Funktionen	186

8	Differentialrechnung für Funktionen auf $\mathbb{R}$	201
8.1	Differenzierbarkeit und elementare Eigenschaften	202
8.2	Lokale Extrema und Mittelwertsatz	210
8.3	Differenzierbare Funktionen in Grenzprozessen	224
	Literatur	231
	Index	233

Kapitel 1

Grundlagen

In diesem Kapitel beschäftigen wir uns kurz mit allgemeinen mathematischen Grundlagen, die nicht nur in der Analysis relevant sind. Einige der Abschnitte dienen lediglich der Definition von Begriffen oder Operationen und wurden zum Teil bereits in der Schule behandelt. Andere Abschnitte dagegen, vor allem in den Unterkapiteln der Aussagenlogik und der elementaren Beweisprinzipien, betreffen die rigorose mathematische Argumentation und werden für fast alle Student:innen anfangs sehr abstrakt oder sogar unverständlich erscheinen. Daher empfiehlt es sich, diese Unterkapitel zu einem späteren Zeitpunkt noch einmal durchzuarbeiten, wenn Sie die ersten Beweise für (zum Teil auch aus der Schule “bekannte” oder anscheinend “offensichtliche”) mathematische Aussagen in den Vorlesungen gesehen haben und in diesen Beweisen dann die entsprechenden Prinzipien wiedererkennen können.

In einer mathematischen Theorie geht es grundsätzlich darum, aus wahren Aussagen mithilfe von zulässigen Schlüssen weitere (möglichst interessante) wahre Aussagen abzuleiten. Die abgeleiteten wahren Aussagen bezeichnet man typischerweise als *Satz* oder *Theorem* (für wesentliche Erkenntnisse), als *Proposition* (für eingeschränkt wesentliche Erkenntnisse), als *Lemma* (für kleinere Ergebnisse oder Hilfsaussagen) oder als *Korollar* (für einfache Folgerungen aus einem Satz, einer Proposition oder einem Lemma). Die Kette an *nachvollziehbaren* logischen Schlüssen, wie man aus bereits bekannten wahren Aussagen die neue wahre Aussage ableitet, nennt man *Beweis*. Was hierbei als nachvollziehbar angesehen wird, ist stark kontextbezogen. In einem Fachartikel, der sich in erster Linie an Expert:innen des Gebiets richtet, sind in Beweisen typischerweise weniger Zwischenschritte enthalten als bei einer Vorlesung, und selbst in einer Vorlesung werden manche Zwischenschritte lediglich genannt oder skizziert, solange sie von Studierenden mit relativ wenig Aufwand ausgearbeitet werden können (und sollen). In jedem Fall muss ein Beweis einer kritischen Betrachtung (wenn auch nur aus didaktischen Gründen) standhalten, d.h. man muss immer in der Lage sein, jeden Zwischenschritt mathematisch rigoros zu begründen. Innerhalb von mathematischen Theorien gibt es auch eine Reihe von mathematischen Objekten oder Sachverhalten mit besonderer Relevanz. Diese werden im Rahmen einer *Definition* genau spezifiziert, so dass man sich später darauf beziehen kann, ohne jedes Mal die geforderten Eigenschaften erneut anzuführen.

Ausgangspunkt jeder mathematischen Theorie sind also wahre Aussagen (und zulässige logische Schlüsse). Daher muss man sich zunächst auf einige wenige, als wahr angenommene Grundaussagen einigen, die man als *Axiome* bezeichnet. Bei der Wahl des Axiomensystems ist man grundsätzlich frei, jedoch gibt es eine Reihe von natürlichen Anforderungen, die ein Axiomensystem erfüllen sollte. Es darf kein Widerspruch abgeleitet werden können, d.h. dass sowohl eine Aussage als auch ihr Gegenteil wahr sind (*Widerspruchsfreiheit*). Auch sollten die Axiome unabhängig sein, also kein Axiom aus den übrigen folgen (*Minimalität*). Schließlich sollte man auf Basis der Axiome auch in der Lage sein, von jeder mathematischen Aussage entscheiden zu können, ob sie wahr oder falsch ist (*Vollständigkeit*). Inzwischen wurden viele Teilgebiete der Mathematik axiomatisch begründet (und wir werden ausschließlich diese anerkannten Axiomensysteme verwenden). So gibt es etwa Axiomensysteme für die Mengenlehre (Ernst Zermelo & Abraham Fraenkel, mit oder ohne Auswahlaxiom), die natürlichen Zahlen (Giuseppe Peano & Richard Dedekind) und die reellen Zahlen (David Hilbert), die Wahrscheinlichkeitstheorie (Andrei Kol-

mogorov) und die ebene Geometrie (David Hilbert). Dass die Erfüllung der Anforderungen keineswegs einfach ist, zeigte Kurt Gödel 1931 mit dem nach ihm benannten Unvollständigkeitssatz¹, der besagt, dass es unmöglich ist, ein sowohl vollständiges als auch widerspruchsfreies Axiomensystem für die ganze Mathematik zu finden. Dieses wichtige Resultat spielt im Rahmen dieser Vorlesung glücklicherweise keine Rolle.

1.1 Aussagenlogik

Logik ist ein umfangreiches Gebiet aus der Mathematik. Am Anfang des Studiums benötigt man davon aber nur ein paar Grundkenntnisse, die in diesem Kapitel erläutert werden. Wir müssen zunächst erklären, was wir unter einer (mathematischen oder nicht-mathematischen) Aussage verstehen.

Definition 1.1 (Aussage und Aussageform). *Eine Aussage ist eine sprachlich oder mittels Formeln formulierte Behauptung, die entweder wahr (w) oder falsch (f) ist. Eine Aussageform ist eine sprachlich oder mittels Formeln formulierte Behauptung, die eine oder mehrere freie Variablen enthält und aus der nach dem Einsetzen der Variable(n) aus einer zulässigen Grundmenge eine Aussage wird.*

Bemerkung 1.2. *In der Definition der Aussage wird das Prinzip der Zweiwertigkeit oder Bivalenzprinzip gefordert, also dass jede Aussage genau einen der Wahrheitswerte wahr oder falsch annimmt (streng genommen: relativ zu dem gewählten Axiomensystem). Dieses Prinzip bedeutet jedoch nicht, dass der Wahrheitswert der Aussage bekannt sein muss oder überhaupt ermittelt werden kann.*

Beispiele 1.3. Bei den folgenden Sätzen oder Formeln handelt es sich um Aussagen:

- Bielefeld existiert. (w)
- In Venedig gibt es mehr Brücken als in Augsburg. (f)
- $2 + 2 = 5$. (f)
- Es gibt unendlich viele Primzahlen. (w)
- Es gibt unendlich viele Primzahlzwillinge, also Paare (p_1, p_2) mit Primzahlen p_1, p_2 mit der Eigenschaft $p_2 - p_1 = 2$.(?²)
- Ist n eine natürliche Zahl, so ist die Zahl $n^2 - n$ gerade. (w)
- Die Zahl $\sqrt{2}$ ist eine rationale Zahl. (f)
- Jede stetige Funktion auf $[0, 1]$ mit $f(0) = 0$ und $f(1) = 100$ nimmt den Wert 42 an. (w)
- Jede stetige Funktion auf $[0, 1]$ ist differenzierbar. (f)

Bei den folgenden Ausdrücken handelt es sich um Aussageformen:

- $2 + x = 5$ mit einer reellen Zahl x . (w für $x = 3$, f für $x \neq 3$)
- $a^n + b^n = c^n$ für natürliche Zahlen a, b, c, n . (w für unendlich viele Tripel (a, b, c) für $n = 1, 2$, f³ für alle Tripel (a, b, c) für $n \geq 3$)

Fragen, Befehle und unvollständige Sätze dagegen sind ebenso wenig Aussagen wie Sätze, deren Wahrheitsgehalt widersprüchlich ist.

- Wie geht es dir?

¹Genauer besagt der erste Gödelsche Unvollständigkeitssatz, dass es in jedem widerspruchsfreien Axiomensystem, in dem "genügend" Aussagen über natürliche Zahlen gemacht werden können, wahre Aussagen gibt, die sich nicht beweisen lassen. Der zweite Gödelsche Unvollständigkeitssatz hingegen besagt, dass man in keinem solchen widerspruchsfreien Axiomensystem die Widerspruchsfreiheit nachweisen kann.

- Mach deine Hausaufgaben!
- $42 + 3$
- Diese Aussage ist falsch.
- Der nächste Satz ist falsch. Der vorhergehende Satz ist wahr.

Bei den letzten beiden Beispielen ist zu beachten, dass es einen Selbstbezug bzw. gegenseitigen Verweis gibt. Der Satz “Diese Aussage ist falsch.” ist weder falsch (denn in diesem Fall wäre er wahr) noch wahr (denn in diesem Fall wäre er falsch). Das andere Beispiel führt auf ein ähnliches Paradoxon. Ist der erste Satz wahr, so muss der zweite Satz falsch sein, was aber bedeutet, dass der erste Satz falsch ist. Ist umgekehrt der erste Satz falsch, so muss der zweite Satz wahr sein, was bedeutet, dass der erste Satz wahr ist. In beiden Fällen ergibt sich also ein Widerspruch.

Mithilfe von Junktoren oder logischen Operatoren können Aussagen verknüpft werden, so dass zusammengesetzte Aussagen entstehen.

Definition 1.4 (aussagenlogische Operationen). *Es seien A und B zwei beliebige (mathematische oder nicht-mathematische) Aussagen (d.h. mit jeweils beliebigem Wahrheitswert). Wir definieren die folgenden logischen Operationen:*

- Negation $\neg$: $\neg A$ (“nicht A ”) ist eine Aussage, die wahr ist, wenn A falsch ist, und die falsch ist, wenn A wahr ist.
- Konjunktion $\wedge$: $A \wedge B$ (“ A und B ” oder “sowohl A als auch B ”) ist eine Aussage, die wahr ist, wenn sowohl A als auch B wahr sind, und sonst falsch.
- Disjunktion $\vee$: $A \vee B$ (“ A oder B ”) ist eine Aussage, die wahr ist, wenn mindestens eine der Aussagen A und B wahr ist, und die falsch ist, wenn beide Aussagen A und B falsch sind.
- Implikation $\Rightarrow$: $A \Rightarrow B$ (“ A impliziert B ” oder “aus A folgt B ” oder “wenn A , dann B ”) ist eine Aussage, die wahr ist, wenn A falsch oder B richtig ist, und die falsch ist, wenn A wahr und B falsch sind.
- Äquivalenz $\Leftrightarrow$: $A \Leftrightarrow B$ (“ A äquivalent B ” oder “ B genau dann, wenn A ”) ist eine Aussage, die wahr ist, wenn A und B denselben Wahrheitswert haben, und sonst falsch. Falls $A \Leftrightarrow B$ wahr ist, so bezeichnet man die Aussagen A und B auch als äquivalent.

Die so definierten logischen Operationen kann man auch einfach über Wahrheitstabellen ausdrücken.

A	B	$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
w	w	f	w	w	w	w
w	f	f	f	w	f	f
f	w	w	f	w	w	f
f	f	w	f	f	w	w

Bemerkungen 1.5.

- (1) Wie beim Rechnen (Potenzierung, Addition und Subtraktion, Multiplikation und Division) mit reellen Zahlen gibt es auch bei logischen Operatoren eine Konvention in der Operatorrangfolge. Sofern keine Klammern gesetzt sind, werden zuerst Negation, dann Konjunktion und Disjunktion, und schließlich Implikation und Äquivalenz ausgeführt. Damit steht beispielsweise $A \wedge \neg B \Rightarrow C$ für $(A \wedge (\neg B)) \Rightarrow C$.

²Diese Aussage ist als die *Primzahlzwillinge-Vermutung* bekannt und eine offene Fragestellung. Im Jahr 2014 wurde mit einem von Yitang Zhang entwickelten Ansatz bewiesen, dass es zumindest unendlich viele Primzahlpaare gibt, deren Abstand höchstens 246 beträgt.

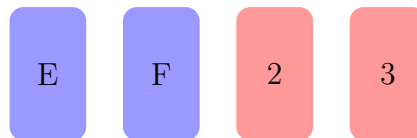
³Diese Vermutung wurde um 1637 von Pierre de Fermat aufgestellt. Erst im Jahr 1994 gelang es Andrew Wiles, den sogenannten großen Fermatschen Satz vollständig zu beweisen.

- (2) Die Wahrheitswerte der Implikation sind gerade so definiert, dass man aus der Wahrheit der Voraussetzung die Wahrheit der Konklusion folgern kann. Ist jedoch die Voraussetzung bereits falsch, so kann die Konklusion wahr oder falsch sein (*“ex falso quodlibet”*). Man muss also insbesondere nicht die Wahrheit der Voraussetzung kennen, um auf die Wahrheit der Implikation schließen zu können.

Wenn die Implikation $A \Rightarrow B$ wahr ist, so sagt man auch, dass

- A eine hinreichende Bedingung für B ist (es reicht also zu wissen, dass A wahr ist, um zu wissen, dass auch B wahr ist)
- B eine notwendige Bedingung für A ist (nur wenn B wahr ist, so kann auch A wahr sein).

Übung 1.6. Vor Ihnen auf dem Tisch liegen vier Karten, von denen Sie wissen, dass jeweils ein Buchstabe auf der einen Seite und eine Zahl auf der anderen Seite steht. Wie viele und welche der dargestellten Karten müssen Sie mindestens umdrehen, um zu wissen, ob die Aussage “wenn auf einer Seite einer Karte ein Vokal steht, dann steht auf der anderen Seite eine gerade Zahl” wahr ist?



Übung 1.7. Es seien A , B und C drei wahre Aussagen. Überprüfen Sie, welche der folgenden zusammengesetzten Aussagen wahr sind:

- (i) $(\neg A \Rightarrow \neg B) \vee \neg(B \wedge C)$,
- (ii) $A \vee \neg B \Rightarrow \neg A \vee \neg C$,
- (iii) $\neg(A \Rightarrow \neg B) \wedge C$.

Überlegen Sie sich zunächst die Reihenfolge für die Ausführung der Operatoren und stellen Sie dann eine (einzeilige) Wahrheitstafel auf, die auch die Wahrheitswerte von allen auftretenden Teilaussagen enthält.

In der Aussagenlogik gibt es eine Reihe von Tautologien, also (zusammengesetzte) Aussagen, die unabhängig vom Wahrheitswert der beteiligten Aussagen immer wahr sind. In der dargestellten abstrakten Form scheinen diese Tautologien noch nicht sehr nützlich zu sein. Wir werden aber im folgenden Kapitel 1.2 sehen, wie durch einige von ihnen wichtige Beweisprinzipien der Mathematik begründet werden.

Proposition 1.8 (Regeln der Aussagenlogik). *Es seien A , B und C beliebige Aussagen (d.h. mit jeweils beliebigem Wahrheitswert). Dann sind die folgenden Aussagen wahr:*

- (i) Triviale Aussage: $A \vee \neg A$,
- (ii) Widerspruchsfreiheit: $\neg(A \wedge \neg A)$,
- (iii) Doppelte Verneinung: $\neg(\neg A) \Leftrightarrow A$,
- (iv) Kommutativität von $\wedge$: $A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A$,
- (v) Kommutativität von $\vee$: $A \vee B \Leftrightarrow B \vee A$,
- (vi) Assoziativität von $\wedge$: $A \wedge (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \wedge C$,
- (vii) Assoziativität von $\vee$: $A \vee (B \vee C) \Leftrightarrow (A \vee B) \vee C$,
- (viii) Distributivität von $\vee$ bzgl. $\wedge$: $A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$,
- (ix) Distributivität von $\wedge$ bzgl. $\vee$: $A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$,

- (x) Regel von De Morgan für $\wedge$: $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$,
- (xi) Regel von De Morgan für $\vee$: $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$,
- (xii) Regeln für die Implikation:
- Transitivität: $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$,
 - Kontraposition: $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$,
 - Umformungen: $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow \neg(A \wedge \neg B)$ und $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow \neg A \vee B$,
- (xiii) Regeln für die Äquivalenz:
- Transitivität: $(A \Leftrightarrow B) \wedge (B \Leftrightarrow C) \Rightarrow (A \Leftrightarrow C)$,
 - Symmetrie: $(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow (B \Leftrightarrow A)$,
 - Zerlegung: $(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$,
 - Umformungen: $(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow (\neg A \vee B) \wedge (A \vee \neg B)$ und $(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$.

Beweis. Um (i)–(ii) nachzuweisen, muss man lediglich zeigen, dass die Aussagen $A \vee \neg A$ und $\neg(A \wedge \neg A)$ immer wahr sind, und für (iii) muss man überprüfen, dass $\neg(\neg A)$ und A immer denselben Wahrheitswert haben. Dies lässt sich einfach aus der Wahrheitstafel ablesen.

A	$\neg A$	$A \vee \neg A$	$A \wedge \neg A$	$\neg(A \wedge \neg A)$	$\neg(\neg A)$
w	f	w	f	w	w
f	w	w	f	w	f

Die Kommutativität von Konjunktion und Disjunktion in (iv) und (v) ist nach Definition klar.

Für die Assoziativität der Konjunktion in (vi) überlegt man sich (z.B. anhand einer Wahrheitstafel), dass beide Aussagen nur dann wahr sind, wenn alle Aussagen A , B und C wahr sind, und sonst falsch, d.h. sie haben wie behauptet denselben Wahrheitswert. Ähnlich überlegt man sich für die Assoziativität der Disjunktion in (vii), dass beide Aussagen dann wahr sind, wenn mindestens eine der Aussagen A , B und C wahr ist, und sonst falsch, d.h. auch hier haben beide Aussagen denselben Wahrheitswert.

Um die Distributivität der Disjunktion bzgl. der Konjunktion in (viii) nachzuweisen, stellt man wieder die entsprechende Wahrheitstafel auf

A	B	C	$B \wedge C$	$A \vee B$	$A \vee C$	$A \vee (B \wedge C)$	$(A \vee B) \wedge (A \vee C)$
w	w	w	w	w	w	w	w
w	w	f	f	w	w	w	w
w	f	w	f	w	w	w	w
w	f	f	f	w	w	w	w
f	w	w	w	w	w	w	w
f	w	f	f	w	f	f	f
f	f	w	f	f	w	f	f
f	f	f	f	f	f	f	f

und bemerkt, dass die beiden in (viii) aufgeführten Aussagen in den letzten beiden Spalten stehen und die gleichen Wahrheitswerte haben. Die Distributivität der Konjunktion bzgl. der Disjunktion in (ix) zeigt man vollkommen analog.

Die Regel von De Morgan in (x) liest man aus der (vierten und siebten Spalte der) Wahrheitstafel

A	B	$A \wedge B$	$\neg(A \wedge B)$	$\neg A$	$\neg B$	$\neg A \vee \neg B$
w	w	w	f	f	f	f
w	f	f	w	f	w	w
f	w	f	w	w	f	w
f	f	f	w	w	w	w

ab. Die Regel von De Morgan in (xi) zeigt man wieder analog.

Für die Implikation in (xii) überlegen wir uns zunächst die Kontraposition und die anderen beiden Umformungen über eine Wahrheitstafel.

A	B	$A \Rightarrow B$	$\neg A$	$\neg B$	$\neg B \Rightarrow \neg A$	$A \wedge \neg B$	$\neg(A \wedge \neg B)$	$\neg A \vee B$
w	w	w	f	f	w	f	w	w
w	f	f	f	w	f	w	f	f
f	w	w	w	f	w	f	w	w
f	f	w	w	w	w	f	w	w

Die Transitivität der Implikation könnte man in vollkommen analoger Weise über eine (8-zeilige) Wahrheitstafel zeigen, aber wir führen hier einen direkten Beweis. Ist die Voraussetzung $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)$ falsch, so ist nichts zu zeigen. Ist dagegen $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)$ wahr, so müssen wir zeigen, dass auch die Implikation $A \Rightarrow C$ wahr ist. Hierfür unterscheiden wir die Fälle, ob A falsch oder wahr ist. Falls A falsch ist, so ist wieder nichts zu zeigen. Ist dagegen A wahr, so folgt aus der (wahren) Implikation $A \Rightarrow B$, dass auch B wahr ist, und daraus erhalten wir aus der (wahren) Implikation $B \Rightarrow C$, dass auch C wahr ist. Also ist die Implikation $A \Rightarrow C$ im Fall, dass A wahr ist, tatsächlich auch wahr. Damit ist der Beweis der Transitivität der Implikation abgeschlossen.

Für die Äquivalenz in (xiii) kann man die Transitivität mit der gleichen Argumentation wie bei der Implikation zeigen. Die Reflexivität der Äquivalenz ist nach Definition klar. Als nächstes zeigen wir die Zerlegungseigenschaft der Äquivalenz über die Wahrheitstafel.

A	B	$A \Leftrightarrow B$	$A \Rightarrow B$	$B \Rightarrow A$	$(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$
w	w	w	w	w	w
w	f	f	f	w	f
f	w	f	w	f	f
f	f	w	w	w	w

Mit der Umformung der Implikation aus (xii) haben wir

$$(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A) \Leftrightarrow (\neg A \vee B) \wedge (\neg B \vee A)$$

und wegen der Transitivität der Äquivalenz folgt sofort die erste behauptete Umformung der Äquivalenz. Die zweite Umformung kann man sich wieder leicht mit der Wahrheitstafel überlegen. $\square$

Bemerkungen 1.9.

- (1) *Da Konjunktion und Disjunktion assoziativ sind, können die Klammern in (vi) und (vii) weggelassen werden.*
- (2) *Die Implikation ist nicht assoziativ, d.h. für beliebige Aussagen A , B und C sind die Aussagen $(A \Rightarrow B) \Rightarrow C$ und $A \Rightarrow (B \Rightarrow C)$ nicht äquivalent und man muss die Klammerung beachten. Ist nämlich A eine falsche Aussage, so ist $A \Rightarrow (B \Rightarrow C)$ immer wahr, aber $(A \Rightarrow B) \Rightarrow C$ hat in diesem Fall immer denselben Wahrheitswert wie C (und ist damit insbesondere falsch, wenn C falsch ist).*
- (3) *Mit den Umformungen für Implikation und Äquivalenz sowie den Regeln von De Morgan erkennt man, dass man alle eingeführten aussagenlogischen Operationen auch nur mithilfe der Verneinung $\neg$ und Konjunktion $\wedge$ (oder Disjunktion $\vee$) ausdrücken kann.*

Übung 1.10. Es seien die folgenden Aussagen

- A : Die Sonne ist ein gelber Zwerg (w)
- B : Die Erde ist eine Scheibe (f)
- C : Der Mond besteht aus Käse (f)

gegeben. Formulieren Sie die Aussagen $A \vee B$, $\neg B \wedge C$, $\neg(A \wedge C)$ und $B \Rightarrow C$ in Worten und bestimmen Sie jeweils den Wahrheitsgehalt.



Twitter-Beitrag von der Nasa

Übung 1.11. Niels Bohr wird die Aussage “Denn wenn man nicht zunächst über die Quantentheorie entsetzt ist, kann man sie doch unmöglich verstanden haben” zugeschrieben, und Richard Feynman meinte, “es ist sicher zu sagen, niemand versteht Quantenmechanik” (und damit auch keine Quantentheorie). Nimmt man beide Aussagen als wahr an, kann man dann folgern, dass niemand zunächst über die Quantentheorie entsetzt ist?

Übung 1.12 (Logikrätsel nach Raymond M. Smullyan). Auf einer Insel ist jeder Einwohner entweder ein Ritter, der immer die Wahrheit sagt, oder ein Knappe, der immer lügt. Außerdem kennt jeder Einwohner seinen eigenen Status sowie den Status aller anderen Einwohner. Ein Besucher kommt nun auf die Insel. Auf was kann er bei den folgenden Situationen schließen?

- (i) Er trifft auf die Inselbewohner Anton und Berta. Anton sagt: “Berta ist ein Knappe”, und Berta sagt: “Keiner von uns ist ein Knappe”.
- (ii) Er trifft auf die Inselbewohner Ludwig und Martha. Martha sagt: “Genau einer von uns ist ein Ritter”.
- (iii) Er trifft auf die Inselbewohner Gustav, Heinrich und Ida. Gustav sagt: “Heinrich sagt nie die Wahrheit”, Heinrich sagt: “Ida sagt immer die Wahrheit”, und Ida sagt: “Gustav hat einen anderen Status als ich”.

1.2 Elementare Beweisprinzipien

Wir stellen hier nun einige elementare Beweisprinzipien vor, die sich aus den Regeln der Aussagenlogik aus Proposition 1.8 ergeben. Zum besseren Verständnis der Prinzipien beweisen wir jeweils einfache Resultate (und setzen an dieser Stelle schon einige Kenntnisse aus der Schule voraus).

Der direkte Beweis. Bei einem direkten Beweis nutzt man die Transitivität der Implikation, also Proposition 1.8 (xii). Ausgehend von den gegebenen Voraussetzungen A folgert man durch eine Folge logischer Schlüsse über Zwischenaussagen $A_1, \dots, A_m$ schließlich die gesuchte Behauptung B . Der Schluss $A \Rightarrow B$ wird damit gezeigt über die Gültigkeit der Implikationen

$$A \Rightarrow A_1, \quad A_1 \Rightarrow A_2, \quad \dots \quad A_{m-1} \Rightarrow A_m \quad \text{und} \quad A_m \Rightarrow B.$$

Als Beispiel für diese Beweistechnik beweisen wir eine Aussage über die Parität ganzer Zahlen.

Definition 1.13 (Parität ganzer Zahlen). *Eine ganze Zahl n heißt gerade, falls sie durch 2 teilbar ist, und andernfalls heißt sie ungerade.*

Bemerkungen 1.14.

- (1) *Jede ganze Zahl ist nach Definition entweder gerade oder ungerade.*

- (2) Eine ganze Zahl n ist genau dann durch 2 teilbar, wenn sie die Darstellung $n = 2k$ für eine geeignete ganze Zahl k hat. Da jede ganze Zahl n entweder von der Form $n = 2k$ oder von der Form $n = 2k - 1$ für eine geeignete ganze Zahl k ist, erhalten wir als äquivalente Definition: eine ganze Zahl n ist genau dann gerade, wenn sie von der Form $n = 2k$ für eine ganze Zahl k ist, und sie ist genau dann ungerade, wenn sie von der Form $n = 2k - 1$ für eine ganze Zahl k ist.
- (3) Die Summe zweier ganzer Zahlen $n = n_1 + n_2$ ist genau dann gerade, wenn die Zahlen die gleiche Parität haben, d.h. wenn beide Zahlen entweder gerade oder ungerade sind. Dies sieht man einfach durch Unterscheidung aller möglichen auftretenden Fälle $n_1 \in \{2k_1 - 1, 2k_1\}$, $n_2 \in \{2k_2 - 1, 2k_2\}$ für geeignete ganze Zahlen k_1 und k_2 .
- Falls n_1 und n_2 beide gerade sind, dann sind wir in der Situation $n_1 = 2k_1$ und $n_2 = 2k_2$ und damit erhalten wir $n = 2k_1 + 2k_2 = 2k$ mit $k = k_1 + k_2$.
 - Falls n_1 und n_2 beide ungerade sind, dann haben wir $n_1 = 2k_1 - 1$ und $n_2 = 2k_2 - 1$ und somit $n = 2k_1 + 2k_2 - 2 = 2k$ mit $k = k_1 + k_2 - 1$.
 - Falls genau eine der Zahlen n_1 und n_2 gerade ist, dann haben wir entweder $n_1 = 2k_1$ und $n_2 = 2k_2 - 1$ oder $n_1 = 2k_1 - 1$ und $n_2 = 2k_2$ (also die beiden letzten ausstehenden Fälle), und in diesen Fällen gilt dann $n = 2k_1 + 2k_2 - 1 = 2k - 1$ mit $k = k_1 + k_2$.
- (4) Das Produkt zweier ganzer Zahlen ist genau dann gerade, wenn mindestens eine der beiden Zahlen gerade ist.

Satz 1.15. Es sei n eine natürliche Zahl. Dann ist $n^2 - n$ eine gerade Zahl.

Direkter Beweis. Wir schreiben $n^2 - n$ zunächst in Produktform als

$$n^2 - n = (n - 1)n.$$

Genau eine der Zahlen $n - 1$ und n ist gerade und die andere ungerade. Damit ist $n^2 - n$ als Produkt einer geraden und einer ungeraden Zahl nach Bemerkung 1.14 (4) gerade und die Aussage des Satzes damit bewiesen. $\square$

Beweis durch Kontraposition. Beim Beweis durch Kontraposition verwendet man die Regel der Aussagenlogik aus Proposition 1.8 (xii), dass die Implikation $A \Rightarrow B$ genau dann wahr ist, wenn die Implikation $\neg B \Rightarrow \neg A$ wahr ist, also den Zusammenhang

$$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A).$$

Obwohl logisch äquivalent, stellt sich dieser Beweisansatz in manchen Situationen als leichter im Vergleich zu einem direkten Zugang heraus. Für den Beweis der Implikation $\neg B \Rightarrow \neg A$ kann wiederum ein direkter Beweis erfolgen. Als Beispiel für die Beweistechnik der Kontraposition zeigen wir eine Eigenschaft über Primzahlen.

Definition 1.16 (Primzahl). Eine Primzahl ist eine natürliche Zahl $p \geq 2$, die nur durch sich selbst und durch 1 teilbar ist.

Satz 1.17. Es sei n eine natürliche Zahl. Falls $2^n - 1$ eine Primzahl⁴ ist, so ist auch n eine Primzahl.

⁴Primzahlen der Form $2^n - 1$ werden als *Mersenne-Primzahlen* bezeichnet. Diese wurden in der Antike im Zusammenhang mit vollkommenen Zahlen untersucht (also solchen Zahlen, die die Summe ihrer echten Teiler sind, wie beispielsweise die Zahl $6 = 1 + 2 + 3$). Tatsächlich ist eine gerade Zahl genau dann vollkommen, wenn sie von der Form $2^{n-1}(2^n - 1)$ ist und dabei $2^n - 1$ eine Primzahl ist. Ob es endlich viele oder unendlich viele vollkommene Zahlen (und damit Mersenne-Primzahlen) gibt, ist ein offenes Problem. Auch ist bisher weder bewiesen noch widerlegt worden, dass es eine ungerade vollkommene Zahl gibt.

Beweis durch Kontraposition. Wir müssen nun die Aussage beweisen, dass die Zahl $2^n - 1$ keine Primzahl sein kann, falls n keine Primzahl ist. Es sei also n eine natürliche Zahl, die keine Primzahl ist. Dabei dürfen wir $n \neq 1$ annehmen, da $2^1 - 1 = 1$ im Fall $n = 1$ offensichtlich keine Primzahl ist. Dann existieren zwei natürliche Zahlen $p, m \geq 2$ mit der Eigenschaft $n = pm$. Wir überlegen uns zunächst, dass für alle reellen Zahlen q und jede natürliche Zahl $m \geq 2$ die Identität

$$q^m - 1 = (q - 1)(q^{m-1} + \dots + q + 1)$$

gilt (beispielsweise durch Ausmultiplizieren der rechten Seite mit anschließender Vereinfachung, ein ausführlicher Beweis dieser Aussage folgt auch später bei Satz 1.83). Mit dem Potenzgesetz $2^n = (2^p)^m$ und der letzten Formel, angewandt mit $q = 2^p$, erhalten wir dann

$$2^n - 1 = (2^p)^m - 1 = (2^p - 1)(2^{p(m-1)} + \dots + 2^p + 1).$$

Die beiden Faktoren $2^p - 1$ und $2^{p(m-1)} + \dots + 2^p + 1$ auf der rechten Seiten sind jeweils natürliche Zahlen, größer als 1 und echte Teiler von $2^n - 1$. Folglich ist die Zahl $2^n - 1$ keine Primzahl und wir haben die Aussage des Satzes nach dem Kontrapositionsprinzip bewiesen. $\square$

Beweis durch Widerspruch. Beim Beweis durch Widerspruch verwendet man die Regel der Aussagenlogik aus Proposition 1.8 (xii), dass die Implikation $A \Rightarrow B$ genau dann wahr ist, wenn die Aussage $\neg(A \wedge \neg B)$ wahr ist, also den Zusammenhang

$$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow \neg(A \wedge \neg B).$$

Man nimmt also das Gegenteil $\neg B$ der zu zeigenden Aussage an, und leitet dann über gültige logische Schlüsse aus der Annahme A und weiteren wahren Aussagen einen *Widerspruch* her (“reductio ad absurdum”). Dieser Widerspruch besteht darin, dass man zeigt, dass sowohl eine weitere Aussage C als auch ihre Negation $\neg C$ wahr ist. Das Schema des Widerspruchsbeweises ist daher

$$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow ((A \wedge \neg B) \Rightarrow C) \wedge ((A \wedge \neg B) \Rightarrow \neg C).$$

Als Beispiel für diese Beweistechnik zeigen wir die Irrationalität der Wurzel einer Primzahl.

Definition 1.18 (rationale und irrationale Zahlen). *Eine reelle Zahl x heißt rational, falls es eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ und ganze Zahl $z \in \mathbb{Z}$ mit der Eigenschaft $x = \frac{z}{n}$ gibt, und andernfalls heißt sie irrational.*

Satz 1.19. *Es sei p eine Primzahl. Dann ist die Zahl $\sqrt{p}$ irrational.*

Beweis durch Widerspruch. Wir nehmen an, dass die Aussage des Satzes falsch und damit $\sqrt{p}$ eine rationale Zahl ist. In diesem Fall gibt es dann eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ und eine ganze Zahl $z \in \mathbb{Z}$ mit der Eigenschaft $\sqrt{p} = \frac{z}{n}$. Da Wurzeln nicht-negativ sind, ist z sogar ebenfalls eine natürliche Zahl, und nach Kürzen gemeinsamer Teiler können wir annehmen, dass n und z teilerfremd sind. Durch Multiplikation der Gleichung $\sqrt{p} = \frac{z}{n}$ mit n und Quadrieren erhalten wir

$$n^2 p = z^2.$$

Dies bedeutet, dass p ein Teiler von z^2 ist. Da p aber eine Primzahl ist, muss p damit auch z selbst teilen, d.h. wir finden eine natürliche Zahl $m \geq 2$, so dass $z = mp$ gilt. Eingesetzt in die obere Gleichung erhalten wir nach Kürzung eines Faktors p

$$n^2 = m^2 p.$$

Mit derselben Argumentation wie eben sehen wir, dass p auch n teilt. Folglich ist $p \geq 2$ ein gemeinsamer Teiler von n und z , was einen Widerspruch zur teilerfremden Wahl von n und z darstellt. Damit muss die anfängliche Annahme, dass $\sqrt{p}$ eine rationale Zahl ist, falsch sein, womit die Aussage des Satzes durch Widerspruch bewiesen ist. $\square$

Beweis einer Äquivalenz. Ist die Äquivalenz zweier Aussagen A und B zu beweisen, so kann man die Regel der Aussagenlogik aus Proposition 1.8 (xiii) verwenden und die Äquivalenz $A \Leftrightarrow B$ in die beiden Implikationen $A \Rightarrow B$ und $B \Rightarrow A$ zerlegen, also

$$(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A).$$

Vollkommen analog kann man die Äquivalenz von drei Aussagen A , B und C (unter Ausnutzung der Transitivität der Implikation) über einen *Ringschluss*

$$(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C) \wedge (C \Rightarrow A)$$

zeigen. Für den Beweis jeder Implikation wiederum kann je nach Situation ein direkter Beweis oder ein indirekter Beweis (durch Kontraposition oder Widerspruch) nützlich sein. Als Beispiel für diese Beweistechnik zeigen wir eine einfache Eigenschaft über die Parität natürlicher Zahlen.

Satz 1.20. *Es sei n eine natürliche Zahl. Dann ist n genau dann gerade, wenn n^2 gerade ist.*

Beweis. Wir zeigen zunächst die Implikation, dass n^2 gerade ist, wenn n gerade ist, mit einem direkten Beweis. Ist n gerade, so ist n^2 das Produkt zweier gerader Zahlen und damit nach Bemerkung 1.14 (4) selbst gerade.

Als nächstes zeigen wir durch Kontraposition die andere Implikation, dass n gerade ist, wenn n^2 gerade ist. Dazu nehmen wir die Negation der Folgerung an, also dass n ungerade ist. In diesem Fall ist dann n^2 das Produkt von zwei ungeraden Zahlen und damit wiederum nach Bemerkung 1.14 (4) selbst ungerade. Also haben wir wie gefordert die Negation der Annahme gezeigt. $\square$

Bemerkungen 1.21 (Allgemeine Hinweise zu Beweisen).

- (1) *Wenn Sie etwas beweisen wollen, dann machen Sie sich zunächst klar, was die Voraussetzungen sind und welche Aussage zu zeigen ist.*
- (2) *Überlegen Sie sich mögliche Beweisstrategien. Dabei ist es meist nützlich, darüber nachzudenken, welche Aussagen es im Zusammenhang mit den Voraussetzungen und der zu zeigenden Folgerung (oder ihrer Negation) gibt und welche Zwischenschritte Ihnen helfen würden. Auch können Sie sich an Beweisen verwandter Aussagen orientieren.*
- (3) *Zerlegen Sie einen längeren Beweis in sinnvolle Zwischenschritte, denen man gut folgen kann. Erläutern Sie diese Zwischenschritte in Worten und geben Sie die dabei verwendeten Argumente an. Führen Sie die Details der Zwischenschritte mathematisch rigoros aus (gerade am Anfang des Studiums, wenn Sie das korrekte Argumentieren noch lernen müssen).*
- (4) *Vereinfachen Sie die Darstellung immer soweit wie möglich. Falls Sie Abkürzungen verwenden, so führen Sie diese klar ein und verwenden Sie dabei sinnvolle Bezeichnungen.*

1.3 Mengen

Das Konzept der Menge ist für viele Bereiche der Mathematik essentiell. Viele mathematische Objekte (auch Zahlen, Funktionen oder geometrische Objekte) lassen sich durch Mengen beschreiben. Entsprechend lassen sich viele mathematische Aussagen auf Mengen zurückführen und können daher mit Mitteln der Mengenlehre bewiesen werden.

Definition 1.22 (naive Mengendefinition nach Georg Cantor). *Unter einer Menge verstehen wir jede Zusammenfassung M von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche die Elemente von M genannt werden) zu einem Ganzen. Wenn M eine Menge ist und x ein Objekt, so schreiben wir $x \in M$, falls x ein Element der Menge M ist, und sonst $x \notin M$.*

Bemerkung 1.23. Es handelt sich im streng mathematischen Sinn nicht um eine Definition, da einige der Begriffe wie “Zusammenfassung”, “Objekt” oder “Anschauung” nicht klar definiert sind. Es handelt sich eher um eine intuitive Beschreibung, die für unsere Zwecke jedoch vollkommen ausreichend ist. Wesentliche Aspekte der Definition einer Menge sind, dass alle Objekte eine Menge unterschieden werden können (also dasselbe Objekt nicht mehrmals in einer Menge vorkommt) und dass jede Menge eindeutig durch ihre Elemente charakterisiert ist. Insbesondere sind damit zwei Mengen genau dann gleich, wenn sie dieselben Elemente enthalten.

Beispiele 1.24. Aus dem vorherigen Abschnitt oder der Schule sind bereits einige Mengen von Zahlen bekannt:

- die Menge $\mathbb{N}$ aller natürlichen Zahlen (Konvention: $0 \notin \mathbb{N}$),
- die Menge $\mathbb{Z}$ aller ganzen Zahlen,
- die Menge $\mathbb{Q} := \{\frac{z}{n} : z \in \mathbb{Z} \text{ und } n \in \mathbb{N}\}$ aller rationalen Zahlen (hier kommt jedes Element der Menge unendlich oft vor, für die Charakterisierung der Menge spielt dies jedoch keine Rolle)
- die Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen,
- die Menge $\{0, 2, 4, 6, 8\}$ aller einstelligen geraden Zahlen,
- die Menge $\{x \in \mathbb{R} : 5x^2 - 4x + 1 = 0\}$ aller Nullstellen der Polynomfunktion $x \mapsto 5x^2 - 4x + 1$,
- die Menge $\{n^2 : n \in \mathbb{N}\}$ aller Quadratzahlen.

Bemerkung 1.25 (Beschreibung von Mengen). Es gibt verschiedene äquivalente Möglichkeiten, Mengen zu beschreiben⁵. In der Regel schreibt man Mengen wie in den obigen Beispielen in geschweiften Klammern (und verwendet für die Mengen sinnvolle Abkürzungen wie bei den natürlichen, ganzen, rationalen oder reellen Zahlen). Ist A eine Aussageform über einer Menge M , so interpretiert man dabei $\{x \in M : A(x)\}$ als die Menge aller Elemente $x \in M$, für die die Aussage $A(x)$ wahr ist. Am häufigsten findet man in mathematischen Texten die folgenden Beschreibungen von Mengen (hier exemplarisch für die Menge aller Quadratzahlen):

- (1) sprachliche Beschreibung durch die Angabe der Eigenschaften, z.B. die Menge aller Quadratzahlen,
- (2) Aufzählung, also bei endlichen Mengen durch vollständige Angabe aller Argumente (hierbei kommt es nicht auf die Reihenfolge an) und bei unendlichen Mengen durch die Angaben der ersten Elemente mit Fortsetzungspunkten, wenn die Fortsetzungsregel klar ist, z.B.

$$\{1, 4, 9, 16, 25, \dots\},$$

- (3) Beschreibung durch Angabe der Eigenschaften der Elemente, z.B.

$$\{n \in \mathbb{N} : \text{es existiert ein } m \in \mathbb{N} \text{ mit } n = m^2\},$$

- (4) abgekürzte Beschreibung durch Angabe eines Bildungsgesetzes der Elemente, z.B.

$$\{n^2 : n \in \mathbb{N}\}.$$

Definition 1.26 (leere Menge). Die Menge, die keine Elemente enthält, heißt die leere Menge und wird mit $\emptyset$ (oder manchmal auch mit $\{\}$) bezeichnet.

Bemerkung 1.27. Die leere Menge ist damit die eindeutig bestimmte Menge, für die $x \notin \emptyset$ für alle Objekte x gilt.

⁵Eine unnötig komplizierte Beschreibung in Rube-Goldberg-Form – die Menge $\{13\}$ kann etwa auch als die Menge aller Mirpzahlen (d.h. Primzahlen, die rückwärts gelesen eine andere Primzahl ergeben), die kleiner als $2^3 + 3^2$ sind, ausgedrückt werden – ist typischerweise nicht sehr hilfreich.

Für jedes Objekt ist die Eigenschaft, Element einer gegebenen Menge zu sein, eine Eigenschaft, die entweder wahr oder falsch ist. Über diese Elementbeziehung kann man nun charakterisieren, in welcher Beziehung Mengen zueinander stehen. Insbesondere lassen sich darüber Konzepte wie Teilmenge, Mengengleichheit und disjunkte Menge einführen.

Definition 1.28 (Teilmenge, gleiche und disjunkte Mengen). *Es seien M und N zwei beliebige Mengen.*

- (i) *Wenn für jedes Element $x \in M$ auch $x \in N$ gilt, so nennen wir M eine Teilmenge von N und schreiben $M \subset N$ (oder $N \supset M$).*
- (ii) *Wenn sowohl $M \subset N$ als auch $N \subset M$ gilt, so nennen wir M und N gleiche Mengen und schreiben $M = N$. Andernfalls schreiben wir $M \neq N$.*
- (iii) *Wenn $M \subset N$ und $M \neq N$ gilt, so nennen wir M eine echte Teilmenge von N und schreiben $M \subsetneq N$.*
- (iv) *Wenn es kein Element x gibt mit $x \in M$ und $x \in N$, so nennen wir M und N disjunkte Mengen.*

Bemerkungen 1.29.

- (1) *Vorsicht bei der Notation von Mengen: Die Menge $\emptyset$ bezeichnet die leere Menge, wohingegen $\{\emptyset\}$ die Menge bezeichnet, die nur ein einziges Element, nämlich die leere Menge, enthält. Also haben wir $\emptyset \neq \{\emptyset\}$. Ähnlich bezeichnet $\{1\}$ die Menge, die nur die Zahl 1 als Element enthält, und $\{\{1\}\}$ bezeichnet die Menge, die nur die Menge $\{1\}$ als Element enthält. Also haben wir $\{1\} \neq \{\{1\}\}$. Beide Mengen sind zudem auch verschieden von der Zahl 1 selbst.*
- (2) *Für eine beliebige Menge M sind $\emptyset$ und M stets Teilmengen von M (und zwar die kleinst- und größtmögliche).*

Ähnlich wie bei Aussagen, die sich über aussagenlogische Operationen verknüpfen lassen, können aus Mengen mithilfe von Mengenoperationen neue Mengen gebildet werden. Die elementarsten Operationen hierbei sind Vereinigung, Durchschnitt und Differenz von Mengen, die wie folgt definiert sind.

Definition 1.30 (Operationen mit Mengen). *Es seien M und N zwei beliebige Mengen. Wir definieren die folgenden Mengenoperationen:*

- *Durchschnitt $\cap$: der Durchschnitt (oder Schnitt) $M \cap N$ ("M geschnitten N") von M und N ist definiert als die Menge*

$$M \cap N := \{x: x \in M \wedge x \in N\},$$

- *Vereinigung $\cup$: die Vereinigung $M \cup N$ ("M vereinigt N") von M und N ist definiert als die Menge*

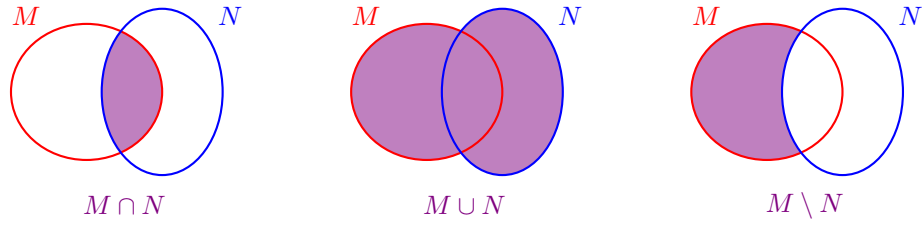
$$M \cup N := \{x: x \in M \vee x \in N\},$$

- *Differenz $\setminus$: die Differenz $M \setminus N$ ("M ohne N") von M und N ist definiert als die Menge*

$$M \setminus N := \{x: x \in M \wedge x \notin N\}.$$

Bemerkungen 1.31.

- (1) *Man kann sich leicht überlegen, dass M genau dann eine Teilmenge von N ist, wenn $M \cap N = M$ oder wenn $M \cup N = N$ gilt, und dass M und N genau dann disjunkte Menge sind, wenn $M \cap N = \emptyset$ gilt. Insbesondere ist damit die leere Menge $\emptyset$ sowohl Teilmenge als auch disjunkt zu jeder beliebigen Menge.*
- (2) *Die Mengenoperationen von Durchschnitt, Vereinigung und Differenz von zwei Mengen M und N kann man graphisch über Venn-Diagramme veranschaulichen.*



Aus den Regeln der Aussagenlogik aus Proposition 1.8 lassen sich nun einfach die entsprechenden Regeln für Mengenoperationen ableiten.

Proposition 1.32 (Regeln für Mengenoperationen). *Es seien L , M und N beliebige Mengen. Dann gelten die folgenden Aussagen:*

- (i) Kommutativität von $\cap$: $M \cap N = N \cap M$,
- (ii) Kommutativität von $\cup$: $M \cup N = N \cup M$,
- (iii) Assoziativität von $\cap$: $L \cap (M \cap N) = (L \cap M) \cap N$,
- (iv) Assoziativität von $\cup$: $L \cup (M \cup N) = (L \cup M) \cup N$,
- (v) Distributivität von $\cup$ bzgl. $\cap$: $L \cup (M \cap N) = (L \cup M) \cap (L \cup N)$,
- (vi) Distributivität von $\cap$ bzgl. $\cup$: $L \cap (M \cup N) = (L \cap M) \cup (L \cap N)$,
- (vii) Regel von De Morgan für $\cap$: $L \setminus (M \cap N) = (L \setminus M) \cup (L \setminus N)$,
- (viii) Regel von De Morgan für $\cup$: $L \setminus (M \cup N) = (L \setminus M) \cap (L \setminus N)$.

Beweis. Alle Aussagen lassen sich direkt aus den Regeln von Proposition 1.8 beweisen (oder, ohne diesen Umweg, auch über eigene Wahrheitstabellen, wobei für ein beliebiges Objekt x die Aussagen dann über Elementbeziehungen definiert werden). Die Kommutativität von $\cap$ sehen wir mithilfe der Äquivalenzen

$$\begin{aligned}
 x \in M \cap N &\Leftrightarrow x \in M \wedge x \in N && \text{(nach Definition des Schnitts)} \\
 &\Leftrightarrow x \in N \wedge x \in M && \text{(mit der Kommutativität von } \wedge \text{)} \\
 &\Leftrightarrow x \in N \cap M && \text{(nach Definition des Schnitts).}
 \end{aligned}$$

Dies zeigt nämlich, dass x genau dann ein Element der Menge $M \cap N$ ist, wenn es ein Element der Menge $N \cap M$ ist. Die Kommutativität der Vereinigung $\cup$ sowie die Assoziativitätsregeln folgen vollkommen analog. Auf die erste Distributivitätsregel schließen wir über

$$\begin{aligned}
 x \in L \cup (M \cap N) &\Leftrightarrow x \in L \vee x \in (M \cap N) && \text{(nach Definition der Vereinigung)} \\
 &\Leftrightarrow x \in L \vee (x \in M \wedge x \in N) && \text{(nach Definition des Schnitts)} \\
 &\Leftrightarrow (x \in L \vee x \in M) \wedge (x \in L \vee x \in N) && \text{(mit der Distributivität von } \vee \text{ bzgl. } \wedge \text{)} \\
 &\Leftrightarrow x \in L \cup M \wedge x \in L \cup N && \text{(nach Definition der Vereinigung)} \\
 &\Leftrightarrow x \in (L \cup M) \cap (L \cup N) && \text{(nach Definition des Schnitts).}
 \end{aligned}$$

Die zweite Distributivitätsregel folgt analog. Ähnlich zeigt man auch die Regeln von De Morgan (siehe Übung 1.33). $\square$

Übung 1.33. Beweisen Sie die beiden Regeln von De Morgan aus Proposition 1.32 (vii) und (viii) und veranschaulichen Sie diese anhand von Venn-Diagrammen.

Übung 1.34. Es seien L , M und N beliebige Mengen. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Formeln:

- (i) $L \setminus (M \setminus N) = (L \setminus M) \cup N$,
- (ii) $(L \setminus M) \setminus N = L \setminus (M \cup N)$.

Manchmal ist es nützlich, die Vereinigung oder den Schnitt nicht nur von zwei Mengen, sondern von ganzen Familien von Mengen zu bilden.

Definition 1.35 (Mengenfamilie, Vereinigung und Schnitt von Mengenfamilien). *Es sei I eine beliebige (Index-)Menge. Ist für jedes $i \in I$ eine Menge M_i gegeben, so bezeichnen wir diese Menge von Mengen als eine Mengenfamilie und kürzen sie mit $\{M_i\}_{i \in I}$ ab. Dann definieren wir*

- (i) *den Durchschnitt von $\{M_i\}_{i \in I}$ im Fall $I \neq \emptyset$ als die Menge*

$$\bigcap_{i \in I} M_i := \{x: \text{für alle } i \in I \text{ gilt } x \in M_i\},$$

- (ii) *die Vereinigung von $\{M_i\}_{i \in I}$ als die Menge*

$$\bigcup_{i \in I} M_i := \{x: \text{es gibt ein } i \in I \text{ mit } x \in M_i\}.$$

Bemerkung 1.36. *Aus den Kommutativ- und Assoziativgesetzen aus Proposition 1.32 schließen wir insbesondere, dass der Durchschnitt und die Vereinigung von endlich vielen Mengen wohldefiniert ist und die Reihenfolge der Mengen und der Operatorausführung keine Rolle spielt. Daher sind die Konzepte des Durchschnitts und der Vereinigung einer Mengenfamilie mit der Definition 1.30 des Durchschnitts und der Vereinigung zweier Mengen verträglich. Im Spezialfall $I = \{1, \dots, n\}$ schreiben wir auch*

$$\bigcap_{i=1}^n M_i := \bigcap_{i \in I} M_i = M_1 \cap \dots \cap M_n \quad \text{und} \quad \bigcup_{i=1}^n M_i := \bigcup_{i \in I} M_i = M_1 \cup \dots \cup M_n.$$

Insbesondere kann man nun Aussageformen auf einer Menge betrachten. Dabei interessiert man sich häufig dafür, ob die Aussage auf mindestens ein, genau ein oder alle Elemente der Menge zutrifft. Dies lässt sich mithilfe der folgenden *Quantoren* beschreiben.

Definition 1.37 (Existenz- und Allquantor). *Es seien M eine Menge und A eine Aussageform auf der Grundmenge M .*

- (i) *Existenzquantor: Der Existenzquantor $\exists$ (ein horizontal gespiegeltes E) bedeutet “es existiert (mindestens) ein”. Wir schreiben*

$$\exists x \in M: A(x)$$

für die Aussage, dass (mindestens) ein Element $x \in M$ existiert, so dass die Aussage $A(x)$ wahr ist. Die Negation $\neg(\exists x \in M: A(x))$ dieser Aussage drückt man gewöhnlich auch über die Schreibweise $\nexists x \in M: A(x)$ aus.

- (ii) *Eindeutigkeitsquantor: Der Eindeutigkeitsquantor $\exists!$ bedeutet “es existiert genau ein”. Wir schreiben*

$$\exists! x \in M: A(x)$$

für die Aussage, dass genau ein Element $x \in M$ existiert, so dass die Aussage $A(x)$ wahr ist.

- (iii) *Allquantor: Der Allquantor $\forall$ (ein vertikal gespiegeltes A) bedeutet “für alle”. Wir schreiben*

$$\forall x \in M: A(x)$$

für die Aussage, dass für alle $x \in M$ die Aussage $A(x)$ wahr ist.

⁶Der Durchschnitt der Mengenfamilie $\{M_i\}_{i \in I}$ ist im Fall $I = \emptyset$ nicht sinnvoll definiert, da er jedes Objekt als Element enthalten müsste.

Bemerkungen 1.38.

- (1) Aussagen über Mengen lassen sich häufig über Quantoren formulieren. Sind etwa M und N Mengen, so können wir die Teilmengenbeziehung $M \subset N$ auch über Quantoren als $\forall x \in M: x \in N$ ausdrücken.
- (2) Umgekehrt lassen sich Quantorenaussagen auch über Mengen formulieren. Ist etwa M eine Menge und A eine Aussageform auf der Grundmenge M so gelten

$$\begin{aligned}\exists x \in M: A(x) &\Leftrightarrow \{x \in M: A(x)\} \neq \emptyset, \\ \forall x \in M: A(x) &\Leftrightarrow \{x \in M: A(x)\} = M.\end{aligned}$$

- (3) Ist die Aussage $\exists x \in M: A(x)$ wahr, so verwendet man sie typischerweise in der Form, dass man ein (ausgezeichnetes) Element $x_0 \in M$ auswählt, so dass die Aussage $A(x_0)$ wahr ist, und für dieses x_0 dann weitere Eigenschaften zeigt. Möchte man dagegen zeigen, dass die Aussage $\exists x \in M: A(x)$ wahr ist, so muss man die Existenz eines solchen Elements $x_0 \in M$, für das die Aussage $A(x_0)$ wahr ist, beweisen.
- (4) Ist die Aussage $\forall x \in M: A(x)$ wahr, so kann man für jedes $x \in M$ verwenden, dass $A(x)$ wahr ist. Möchte man dagegen zeigen, dass die Aussage $\forall x \in M: A(x)$ wahr ist, so muss man für ein beliebiges Element $x \in M$ beweisen, dass die Aussage $A(x)$ wahr ist.

Für die Negation von Aussagen, die mit Existenz- und Allquantoren formuliert sind, gelten die folgenden einfachen Regeln:

Lemma 1.39 (Negation von Existenz- und Allquantor). *Es seien M eine Menge und A eine Aussageform auf der Grundmenge M . Dann gelten die folgenden Aussagen:*

- (i) Negation des Existenzquantors: $\neg(\exists x \in M: A(x)) \Leftrightarrow \forall x \in M: \neg A(x)$,
- (ii) Negation des Allquantors: $\neg(\forall x \in M: A(x)) \Leftrightarrow \exists x \in M: \neg A(x)$.

Beweis. Da für jedes $x \in M$ entweder die Aussage $A(x)$ oder $\neg A(x)$ wahr ist, können wir die Menge M auch als die Vereinigung

$$M = \{x \in M: A(x)\} \cup \{x \in M: \neg A(x)\}$$

schreiben. Mithilfe von Bemerkung 1.38 (2) erhalten wir dann die Äquivalenzen

$$\begin{aligned}\neg(\exists x \in M: A(x)) &\Leftrightarrow \{x \in M: A(x)\} = \emptyset \\ &\Leftrightarrow \{x \in M: \neg A(x)\} = M \Leftrightarrow \forall x \in M: \neg A(x),\end{aligned}$$

womit die Aussage (i) bewiesen ist. Die Aussage in (ii) kann man analog beweisen oder direkt aus der Negation der rechten Aussage in (i) und der doppelten Verneinung aus Proposition 1.8 folgern. $\square$

Bemerkungen 1.40.

- (1) Beweis durch Gegenbeispiel: Um eine allgemeine Behauptung zu widerlegen, ist es gemäß Lemma 1.39 (ii) ausreichend ein Beispiel anzugeben, für das die Behauptung falsch ist (Vorsicht: umgekehrt kann man natürlich keine allgemeine Behauptungen durch deren Nachweis in einzelnen Beispielfällen beweisen).
- (2) Negation einer Quantorenfolge: Will man eine Aussage negieren, bei der eine Folge von Quantoren mit verschiedenen Variablen vorkommt, etwa der Form

$$\forall x_1 \in M_1 \exists x_2 \in M_2 \exists x_3 \in M_3: A(x_1, x_2, x_3)$$

(mit gegebenen Mengen M_1, M_2, M_3 und einer Aussageform $A(x_1, x_2, x_3)$), so muss man die Quantoren der Reihe nach von links nach rechts "abarbeiten", also Existenz- und Allquantor vertauschen und die nachfolgende Aussage verneinen. Die Negation der obigen Aussage lautet dann

$$\exists x_1 \in M_1 \forall x_2 \in M_2 \forall x_3 \in M_3: \neg A(x_1, x_2, x_3).$$

Übung 1.41. Formulieren Sie die Aussage “Bei allen Studierenden gibt es (mindestens) ein Kapitel aus der Vorlesung Analysis I, das ein anderer Studierender besser erklären kann” mathematisch mithilfe von Quantoren und einer geeigneten Aussageform. Was ist die Negation (in Worten und in Quantorenschreibweise)?

Übung 1.42. Es seien M die Menge aller Menschen, G die Menge aller Getränke und $A(m, g)$ für $m \in M$ und $g \in G$ die Aussageform

$$A(m, g): m \text{ mag das Getränk } g.$$

Überlegen Sie sich die Bedeutung aller Aussagen, die mit Existenz- und Allquantor formuliert werden können.

Wenn eine Aussageform mehrere durch (verschiedene) Quantoren gebundene Variablen enthält, so macht die Reihenfolge der Quantoren einen Unterschied. Ebenso muss man aufpassen, wenn Quantoren bei Aussagen mit Junktoren verwendet werden.

Proposition 1.43 (Rechenregeln für Quantoren). *Es seien M und N beliebige Mengen, $A_1(x), A_2(x)$ Aussageformen für $x \in M$ und $B(x, y)$ eine Aussageform für $x \in M$ und $y \in N$. Dann gelten die folgenden Aussagen:*

- (i) Vertauschbarkeit von Existenzquantoren: $\exists x \in M \exists y \in N: C(x, y) \Leftrightarrow \exists y \in N \exists x \in M: C(x, y)$,
- (ii) Vertauschbarkeit von Allquantoren: $\forall x \in M \forall y \in N: C(x, y) \Leftrightarrow \forall y \in N \forall x \in M: C(x, y)$,
- (iii) Vertauschung von Existenz- und Allquantor: $\exists x \in M \forall y \in N: C(x, y) \Rightarrow \forall y \in N \exists x \in M: C(x, y)$,
- (iv) Verträglichkeit von Existenzquantor und Disjunktion:

$$\exists x \in M: A_1(x) \vee A_2(x) \Leftrightarrow (\exists x \in M: A_1(x)) \vee (\exists x \in M: A_2(x)),$$

- (v) Verträglichkeit von Allquantor und Konjunktion:

$$\forall x \in M: A_1(x) \wedge A_2(x) \Leftrightarrow (\forall x \in M: A_1(x)) \wedge (\forall x \in M: A_2(x)).$$

Beweis.

- (i) Diese Aussage ist klar, da es keine Rolle spielt, ob wir zunächst ein geeignetes Element $x_0 \in M$ oder ein geeignetes Element $y_0 \in N$ wählen.
- (ii) Ähnlich wie für (i) argumentiert man, dass es keine Rolle spielt, ob wir zunächst das beliebige Element $x \in M$ oder das beliebige Element $y \in N$ wählen. Alternativ kann man auch die Negation von (i) verwenden (mit Aussageform $\neg C(x, y)$ anstelle von $C(x, y)$).
- (iii) Gibt es ein $x_0 \in M$, so dass $\forall y \in N: C(x_0, y)$ wahr ist, so ist auch $\forall y \in N \exists x \in M: C(x, y)$ wahr (einfach mit der Wahl $x = x_0 \in M$). Daher ist die Implikation in (iii) wahr (aber die umgekehrte Implikation $\Leftarrow$ ist im Allgemeinen falsch).
- (iv) Existiert ein $x_0 \in M$, so dass $A_1(x_0) \vee A_2(x_0)$ wahr ist, so ist mindestens eine der beiden Aussagen $\exists x \in M: A_1(x)$ oder $\exists x \in M: A_2(x)$ wahr, womit die Implikation $\Rightarrow$ gezeigt ist. Ist umgekehrt $(\exists x \in M: A_1(x)) \vee (\exists x \in M: A_2(x))$ wahr, so können wir ohne Einschränkung (durch Vertauschung von A_1 und A_2) annehmen, dass $\exists x \in M: A_1(x)$ wahr ist. Dann existiert ein $x_0 \in M$, so dass $A_1(x_0)$ und daher auch $A_1(x_0) \vee A_2(x_0)$ wahr ist. Dies zeigt die andere Implikation.
- (v) Dies folgt aus der Negation von (iv) (mit Aussagenformen $\neg A_1(x)$ und $\neg A_2(x)$ anstelle von $A_1(x)$ und $A_2(x)$). $\square$

Übung 1.44. Überlegen Sie sich die Bedeutung der folgenden Aussagen:

- (i) $\exists n \in \mathbb{N} \exists m \in \mathbb{N}: n = 2m$.
- (ii) $\forall x \in \mathbb{R} \exists n \in \mathbb{N}: n > x$.
- (iii) $\nexists q \in \mathbb{Q}: q^2 = 2$.

Übung 1.45. Formulieren Sie die folgenden Aussagen mit Quantoren:

- (i) Es gibt keine größte natürliche Zahl.
- (ii) Eine natürliche Zahl, die größer oder gleich 2 ist, ist genau dann eine Primzahl, wenn sie nur durch sich selbst und 1 teilbar ist.
- (iii) Jede gerade Zahl, die größer als 2 ist, lässt sich als Summe zweier Primzahlen schreiben⁷.

Hat man zwei (oder mehr) Mengen, so gibt es auch die Möglichkeit, ein Mengenprodukt zu definieren, um eine neue Menge zu bilden.

Definition 1.46 (kartesisches Produkt und geordnetes Paar). *Es seien M und N zwei Mengen. Wir definieren das kartesische⁸Produkt $M \times N$ (“ M kreuz N ”) der Mengen M und N als die Menge*

$$M \times N := \{(x, y) : x \in M \wedge y \in N\},$$

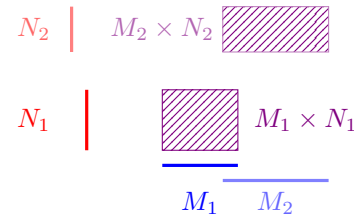
wobei wir (x, y) ein (geordnetes) Paar nennen. Wir bezeichnen außerdem zwei (geordnete) Paare (x, y) und (x', y') aus $M \times N$ genau dann als gleich, wenn $x = x'$ und $y = y'$ gelten.

Bemerkungen 1.47.

- (1) *In der Ebene $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ kann man die Position eines Punktes über ein geordnetes Paar (x, y) beschreiben, wobei x für den Wert der ersten Koordinate und y für den Wert der zweiten Koordinate steht. Aber auch im Alltag tritt das kartesische Produkt (implizit) häufig auf, etwa bei der Position einer Figur auf dem Schachbrett, bei Uhrzeiten oder bei Datumsangaben.*

- (2) *Man kann sich leicht die folgenden Eigenschaften von kartesischen Produkten, insbesondere hinsichtlich Vereinigung und Durchschnitt, überlegen:*

- $M \times N = \emptyset$ gilt genau dann, wenn $M = \emptyset$ oder $N = \emptyset$ gilt,
- $(M_1 \times N_1) \cap (M_2 \times N_2) = (M_1 \cap M_2) \times (N_1 \cap N_2)$,
- $(M_1 \times N_1) \cup (M_2 \times N_2) \subset (M_1 \cup M_2) \times (N_1 \cup N_2)$.



- (3) *Das kartesische Produkt ist nicht kommutativ, d.h. im Allgemeinen gilt $M \times N \neq N \times M$. Es ist jedoch assoziativ, d.h. es gilt $(L \times M) \times N = L \times (M \times N)$ (nach kanonische Identifikation als 3-Tupel), so dass man dafür einfach $L \times M \times N$ schreiben kann. In analoger Weise definiert man daher auch das kartesische Produkt $M_1 \times \dots \times M_n$ für n Mengen $M_1, \dots, M_n$, dessen Elemente nun (geordnete) n -Tupel $(x_1, \dots, x_n)$ mit $x_1 \in M_1, \dots, x_n \in M_n$ sind.*

Auch Mengen können Elemente von Mengen sein. Ein wichtiges solches Mengensystem ist die Potenzmenge einer Menge.

⁷Diese Aussage ist als die *starke Goldbachsche Vermutung* bekannt. Sie gilt als eines der bekanntesten ungelösten Problemen der Mathematik und konnte bisher nur für Zahlen kleiner als $4 \cdot 10^{18}$ gezeigt werden.

⁸Das kartesische Produkt ist nach René Descartes (1596–1650) benannt, dessen latinisierter Name Renatus Cartesius ist und der sich insbesondere mit der rechnerischen Lösung geometrischer Probleme beschäftigte.

Definition 1.48 (Potenzmenge und Mengensystem). *Es sei M eine Menge. Wir definieren die Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ als die Menge aller Teilmengen von M , also*

$$\mathcal{P}(M) := \{N : N \subset M\}.$$

Des Weiteren bezeichnen wir jede Teilmenge von $\mathcal{P}(M)$ als ein Mengensystem über der Grundmenge M .

Bemerkung 1.49. *Für jede Menge M gilt $\emptyset \in \mathcal{P}(M)$. Ist N eine weitere Menge, so kann man die Teilmengenbeziehung $N \subset M$ äquivalent auch ausdrücken als $N \in \mathcal{P}(M)$.*

Beispiele 1.50.

- Für die leere Menge gilt $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\} \neq \emptyset$.
- Für die Menge $\{1, 2, 3\}$ gilt

$$\mathcal{P}(\{1, 2, 3\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}.$$

★ **Exkurs zu den Axiomen der Mengenlehre nach Zermelo–Fraenkel.** Das Axiomensystem der Mengenlehre wurde federführend von Ernst Zermelo⁹ & Abraham Fraenkel am Anfang des 20. Jahrhunderts entwickelt, um eine Mengenlehre, die frei von Paradoxa ist, zu begründen. Diese Axiome bestehen neben der Forderung, dass es überhaupt eine Menge gibt, im Wesentlichen aus plausibel klingenden Konstruktionsprinzipien für Mengen.

- (1) *Extensionalitätsaxiom:* Zwei Mengen sind genau dann gleich, wenn sie die gleichen Elemente enthalten. Insbesondere bedeutet dies, dass die Menge sich nicht ändert, wenn man die Reihenfolge der Elemente vertauscht oder ein Element der Menge mehrmals aufführt.
- (2) *Leermengenaxiom:* Es gibt eine Menge, die kein einziges Element enthält. Diese ist (nach dem Extensionalitätsaxiom) eindeutig.
- (3) *Paarmengenaxiom:* Für je zwei Mengen M und N gibt es eine (eindeutige) Menge $\{M, N\}$, die genau M und N als Elemente enthält.
- (4) *Potenzmengenaxiom:* Für jede Menge M gibt es eine Menge $\mathcal{P}(M)$, die genau alle Teilmengen von M als Teilmengen enthält.
- (5) *Vereinigungsmengenaxiom:* Für jede Menge M gibt es eine (eindeutige) Menge $\cup M$, die genau die Elemente der Elemente von M als Elemente enthält.
- (6) *Unendlichkeitsaxiom:* Es gibt eine Menge M mit $\emptyset \in M$, so dass mit $x \in M$ auch $\{x\} \in M$ gilt.
- (7) *Aussonderungsschema:* Für jede Menge M und jede Aussageform A über M gibt es eine Menge, die genau alle Elemente $x \in M$ enthält, für die die Aussage $A(x)$ wahr ist.
- (8) *Ersetzungsschema:* Es sei A eine Aussageform in zwei Variablen mit der Eigenschaft, dass für jedes x höchstens ein y existiert, so dass die Aussage $A(x, y)$ wahr ist. Dann gibt es zu jeder Menge M eine Menge, die gerade aus allen y besteht, so dass die Aussage $A(x, y)$ für ein $x \in M$ wahr ist.
- (9) *Fundierungsaxiom:* Jede nicht-leere Menge A enthält ein Element B , dessen Schnitt mit A leer ist.

⁹Ernst Zermelo (1871–1953) war ein deutscher Mathematiker, der große Beiträge in der Mathematik vor allem in der Mengentheorie leistete. Er arbeitete einige Jahre am mathematischen Institut der Universität Göttingen, an dem viele der bedeutendsten Mathematiker der damaligen Zeit arbeiteten. In einer Logik-Vorlesung soll Ernst Zermelo gesagt haben, dass alle Mathematiker in Göttingen einer von zwei Klassen angehören – der Klasse derjenigen, die tun, was Felix Klein gefällt und ihnen selbst missfällt, oder der Klasse derjenigen, die tun, was ihnen selbst gefällt und Felix Klein missfällt. Zu welcher Klasse gehört dann Felix Klein (der großen Anteil daran hatte, dass Göttingen zu einem Zentrum für Mathematik wurde)? Ernst Zermelos Antwort darauf war, dass Felix Klein gar kein Mathematiker wäre.

Die Axiome (1)–(9) werden als das Zermelo–Fraenkel Axiomensystem (ZF) bezeichnet. Dieses Axiomensystem ist tatsächlich nicht minimal, sondern enthält Redundanzen: Das Aussonderungsschema (7) folgt aus dem Ersetzungsschema (8), das Leermengenaxiom (2) aus dem Unendlichkeitsaxiom (6) und dem Ersetzungsschema (8), und das Paarmengenaxiom (3) aus dem Potenzmengenaxiom (4) und dem Ersetzungsschema (8). Daher würde es reichen (1), (4)–(6), (8) und (9) als Axiomensystem für die Mengenlehre zu fordern.

Zum Zermelo–Fraenkel Axiomensystem wird häufig noch das Auswahlaxiom hinzugenommen, dass die Existenz (aber nicht die Konstruktion) einer Auswahlfunktion postuliert.

- (10) *Auswahlaxiom*: Ist M eine Menge von paarweise disjunkten nicht-leeren Mengen, dann gibt es eine Menge, die genau ein Element aus jedem Element von M enthält.

Ist ZF um das Auswahlaxiom erweitert, so spricht man vom Zermelo–Fraenkel Axiomensystem mit Auswahlaxiom (ZFC). Das Auswahlaxiom ist von den meisten Mathematikern akzeptiert, jedoch nicht unumstritten. Daher wird seine Verwendung, soweit möglich, vermieden. In vielen Gebieten der Mathematik können tatsächlich aber nur mithilfe des Auswahlaxioms bestimmte Konstruktionen durchgeführt werden. Das Auswahlaxiom (10) selbst ist unabhängig vom Zermelo–Fraenkel Axiomensystem. Es wurde gezeigt, dass ZF sowohl mit dem Auswahlaxiom (10) (Kurt Gödel, 1938) als auch mit dessen Negation $\neg(10)$ (Paul Cohen, 1963) widerspruchsfrei ist, falls ZF selbst widerspruchsfrei ist.

Bemerkung 1.51 (Die “Menge” aller Mengen als widersprüchliches Konzept). *Tatsächlich gibt es, anders als Cantors Definition 1.22 einer Menge suggeriert, Einschränkungen bei der Bildung von Mengen. Wir nehmen nun an, dass es eine Menge $\mathcal{M}$ aller Mengen gäbe, also*

$$\mathcal{M} := \{M : M \text{ ist eine Menge}\}.$$

Dann können wir (nach dem Aussonderungsaxiom) die Teilmengen $\mathcal{N}$ aller Mengen, die sich nicht selbst enthalten, betrachten, also

$$\mathcal{N} := \{M : M \text{ ist eine Menge mit } M \notin M\}.$$

Da $\mathcal{N}$ eine Menge ist, stellt sich die Frage, ob $\mathcal{N}$ nun sich selbst enthält oder nicht. Falls $\mathcal{N} \in \mathcal{N}$ wahr ist, so müsste nach Definition von $\mathcal{N}$ auch $\mathcal{N} \notin \mathcal{N}$ folgen, was aber wiederum $\mathcal{N} \in \mathcal{N}$ impliziert. Also gilt

$$(\mathcal{N} \in \mathcal{N} \Rightarrow \mathcal{N} \notin \mathcal{N}) \wedge (\mathcal{N} \notin \mathcal{N} \Rightarrow \mathcal{N} \in \mathcal{N}).$$

Somit erhalten wir die widersprüchliche Äquivalenz

$$\mathcal{N} \in \mathcal{N} \Leftrightarrow \mathcal{N} \notin \mathcal{N},$$

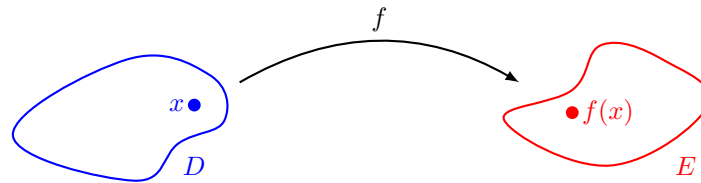
die als Russellsche Antinomie¹⁰ bekannt ist. Dieser Widerspruch wird dadurch aufgelöst, dass die Zusammenfassung von Mengen im Allgemeinen keine Menge, sondern eine Klasse darstellt. Ist diese Klasse selbst eine Menge, so nennt man sie unecht, und andernfalls echt. Wie wir gerade gesehen haben, ist die Zusammenfassung $\mathcal{M}$ aller Mengen keine Menge und damit ein Beispiel für eine echte Klasse.

1.4 Funktionen

In diesem Abschnitt führen wir kurz das allgemeine Konzept einer Funktion oder Abbildung ein und erläutern bereits einige wichtige Begriffe und Eigenschaften in diesem Zusammenhang.

¹⁰Bertrand Russell (1872–1970) war nicht nur Mathematiker, sondern auch Philosoph, politischer Aktivist (liberal, sozialistisch, pazifistisch) und Schriftsteller (das Buch “Marriage and Morals”, in dem der Moralbegriff von Sexualität und Ehe aus viktorianischer Zeit kritisch hinterfragt wird, kostete ihn 1940 wegen “moralischer Unreife” eine Professorenstelle am City College of New York, brachte ihm aber 1950 den Nobelpreis für Literatur). Er publizierte die nach ihm benannte Antinomie 1903, die unabhängig auch von Ernst Zermelo entdeckt wurde. Bertrand Russell löste den auftretenden logischen Widerspruch durch die Einführung von Klassen (verschiedenen Typs) und formulierte zur Veranschaulichung später auch das *Barbierparadoxon*. Man kann einen Barbier als einen definieren, der all jene und nur jene rasiert, die sich nicht selbst rasieren. Die Frage ist: Rasiert der Barbier sich selbst?

Definition 1.52 (Abbildung, Funktion). Es seien D und E zwei Mengen. Eine Abbildung oder Funktion f von D nach E , notiert als $f: D \rightarrow E$, ist eine Vorschrift, die jedem Element der Menge D genau ein Element der Menge E zuordnet. In diesem Fall bezeichnen wir das einem Element $x \in D$ zugeordnete Element aus E mit $f(x)$, nennen D den Definitionsbereich von f und E den Wertebereich von f .



Bemerkung 1.53. Besteht der Definitionsbereich nur aus endlich vielen Elementen $\{x_1, \dots, x_n\}$, so kann man eine Funktion durch eine vollständige Liste der zugeordneten Werte $\{f(x_1), \dots, f(x_n)\}$ angeben. Typischerweise, insbesondere im Fall von Definitionsbereichen, die unendlich viele Elemente enthalten, sind Funktionen jedoch durch eine Funktionsvorschrift gegeben, beispielsweise

- $D = E = \mathbb{R}$ und Funktionsvorschrift $x \mapsto x^2 - 2x$,
- $D = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $E = \mathbb{R}$ und Funktionsvorschrift $(x_1, x_2) \mapsto x_1 + x_2$,
- $D = E = \{n \in \mathbb{N} : n \geq 2\}$ und Funktionsvorschrift $n \mapsto$ kleinster Primteiler von n .

Definition 1.54 (Graph, Bild, Urbild). Es seien D und E zwei Mengen und $f: D \rightarrow E$ eine Funktion von D nach E .

(i) Wir definieren den Graph von f als die Menge

$$\begin{aligned} \text{graph}(f) &:= \{(x, f(x)) : x \in D\} \\ &= \{(x, y) : x \in D \text{ und } y = f(x)\} \subset D \times E. \end{aligned}$$

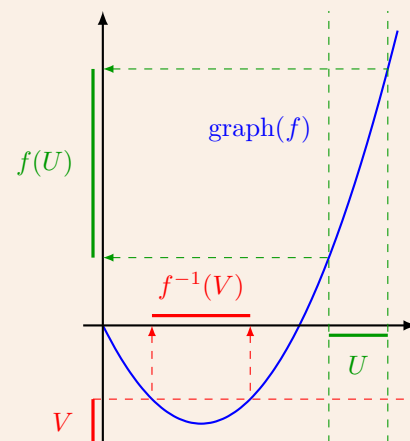
(ii) Ist U eine Teilmenge von D , so definieren wir das Bild von U unter f als die Menge

$$\begin{aligned} f(U) &:= \{f(x) : x \in U\} \\ &= \{y \in E : \exists x \in U \text{ mit } f(x) = y\} \subset E. \end{aligned}$$

(iii) Ist V eine Teilmenge von E , so definieren wir das Urbild von V unter f als die Menge

$$f^{-1}(V) := \{x \in D : f(x) \in V\} \subset D.$$

Ist $y \in V$, so bezeichnen wir die Menge $f^{-1}(\{y\})$ auch als das Urbild von y (statt von $\{y\}$) unter f .



Übung 1.55. Es seien D und E zwei Mengen und $f: D \rightarrow E$ eine Funktion von D nach E . Beweisen Sie für beliebige Teilmengen $U, U' \subset D$, $V, V' \subset E$ die folgenden Eigenschaften

$$\begin{aligned} f(U \cup U') &= f(U) \cup f(U'), \\ f^{-1}(V \cap V') &= f^{-1}(V) \cap f^{-1}(V'), \\ f^{-1}(V \cup V') &= f^{-1}(V) \cup f^{-1}(V'). \end{aligned}$$

Überlegen Sie sich auch, dass die Aussage $f(U \cap U') = f(U) \cap f(U')$ im Allgemeinen falsch ist.

Die Konzepte der Bildmenge und der Urbildmenge heben sich im Allgemeinen zwar nicht gegenseitig auf, jedoch gelten zumindest die folgenden Teilmengenbeziehungen:

Lemma 1.56. *Es seien D und E zwei Mengen und $f: D \rightarrow E$ eine Funktion von D nach E . Dann gelten die folgenden Aussagen:*

- (i) *Ist U eine Teilmenge von D , so gilt $U \subset f^{-1}(f(U))$.*
- (ii) *Ist V eine Teilmenge von E , so gilt $f(f^{-1}(V)) \subset V$.*

Beweis.

- (i) Es sei $x \in U$ beliebig. Nach Definition des Bildes gilt dann $f(x) \in f(U)$, so dass $x \in f^{-1}(f(U))$ nach Definition des Urbildes (mit der Wahl $V := f(U)$) folgt. Da $x \in U$ beliebig war, haben wir damit die erste Behauptung $U \subset f^{-1}(f(U))$ gezeigt.
- (ii) Im Fall $f^{-1}(V) = \emptyset$ ist die Aussage offensichtlich erfüllt. Andernfalls sei $y \in f(f^{-1}(V))$ beliebig. Nach Definition des Bildes (mit $U := f^{-1}(V)$) existiert ein $x \in f^{-1}(V)$ mit $f(x) = y$. Wegen $x \in f^{-1}(V)$ gilt nach Definition des Urbildes auch $f(x) \in V$, so dass $y = f(x) \in V$ folgt. Da $y \in f(f^{-1}(V))$ beliebig war, haben wir damit auch die zweite Behauptung $f(f^{-1}(V)) \subset V$ gezeigt. $\square$

In Lemma 1.56 gelten im Allgemeinen tatsächlich keine Mengengleichheiten. Die Menge U in (i) ist eine echte Teilmenge des Urbildes $f^{-1}(f(U))$, wenn Punkte aus U auf die gleichen Werte abgebildet werden wie Punkte aus $D \setminus U$, und das Bild $f(f^{-1}(V))$ in (ii) ist eine echte Teilmenge von V , wenn nicht alle Elemente von V im Bild $f(D)$ enthalten sind. Im ersten Fall sagt man, dass f nicht injektiv ist, und im zweiten Fall, dass f nicht surjektiv ist.

Definition 1.57 (Injektivität, Surjektivität, Bijektivität). *Es seien D und E zwei Mengen. Eine Funktion $f: D \rightarrow E$ von D nach E heißt*

- injektiv, falls für alle $x, x' \in D$ mit $f(x) = f(x')$ schon $x = x'$ folgt,
- surjektiv, falls für jedes $y \in E$ ein $x \in D$ mit $f(x) = y$ existiert,
- bijektiv, falls sie sowohl injektiv als auch surjektiv ist.

Bemerkung 1.58. *Injektivität, Surjektivität und Bijektivität einer Funktion $f: D \rightarrow E$ kann man als Eigenschaft des Urbildes für alle Elemente des Wertebereichs verstehen:*

- *Injektivität von f bedeutet gerade, dass niemals zwei verschiedene Elemente der Definitionsmenge auf dasselbe Element im Wertebereich abgebildet werden. Dies ist gleichbedeutend damit, dass die Menge $f^{-1}(\{y\})$ für jedes $y \in f(D)$ genau ein Element und für jedes $y \in E \setminus f(D)$ kein Element enthält.
Falls f nicht injektiv ist, so existieren Elemente $x, x' \in D$ mit $x \neq x'$ und $f(x) = f(x')$. Äquivalent dazu ist, dass ein $y \in E$ existiert, so dass die Menge $f^{-1}(\{y\})$ (mindestens) zwei Elemente enthält.*
- *Surjektivität von f bedeutet dagegen, dass jedes Element $y \in E$ im Bild von f liegt, also $f(D) = E$ gilt. Die Menge $f^{-1}(\{y\})$ enthält in diesem Fall also für jedes $y \in E$ mindestens ein Element.
Falls f nicht surjektiv ist, so existiert ein $y \in E$, so dass $f(x) \neq y$ für alle $x \in D$ gilt. Äquivalent dazu ist, dass ein $y \in E$ existiert, so dass $f^{-1}(\{y\}) = \emptyset$ gilt.*
- *Bijektivität von f bedeutet bedeutet folglich, dass $f^{-1}(\{y\})$ für jedes $y \in E$ genau ein Element enthält.*

Übung 1.59. Untersuchen Sie die folgenden Funktionen auf Injektivität und Surjektivität:

- (i) $f_1: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ mit Funktionsvorschrift $(x_1, x_2) \mapsto x_1 + x_2$,
- (ii) $f_2: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ mit Funktionsvorschrift $n \mapsto \frac{n-1}{2}$, falls n ungerade ist, und $n \mapsto -\frac{n}{2}$, falls n gerade ist,

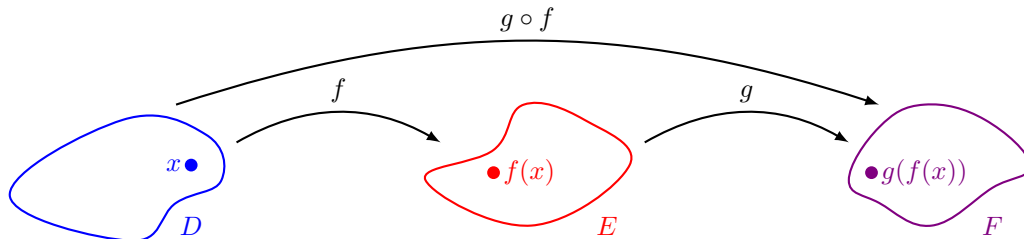
- (iii) $f_3: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit Funktionsvorschrift $x \mapsto x^2 - 2x$,
- (iv) $f_4: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ mit Funktionsvorschrift $x \mapsto \frac{1}{x}$,
- (v) $f_5: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ mit Funktionsvorschrift $x \mapsto x^2$, falls $x \geq 0$, und $x \mapsto -x^2$, falls $x < 0$,
- (vi) $f_6: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit Funktionsvorschrift $x \mapsto x^2$, falls $x \geq 0$, und $x \mapsto -x^2$, falls $x < 0$.

Übung 1.60. Überlegen Sie sich, dass in den beiden Aussagen in Lemma 1.56 tatsächlich Mengengleichheit gilt, falls für die Funktion f in (i) Injektivität und in (ii) Surjektivität vorausgesetzt wird.

Haben wir zwei Funktionen, bei der der Wertebereich der einen Funktion gerade der Definitionsbereich der anderen Funktion ist, so können wir die Funktionen hintereinander ausführen und das Konzept der Verkettung von Funktionen erklären.

Definition 1.61 (Verkettung). *Es seien D , E und F drei Mengen. Sind $f: D \rightarrow E$ und $g: E \rightarrow F$ zwei Funktionen, so definieren wir die Verkettung oder Komposition $g \circ f: D \rightarrow F$ ("g verkettet mit f") über die Abbildungsvorschrift*

$$g \circ f(x) := g(f(x)) \quad \text{für alle } x \in D.$$



Bemerkung 1.62 (Assoziativität der Verkettung). *Sind $f: D \rightarrow E$, $g: E \rightarrow F$ und $h: F \rightarrow G$ drei Funktionen mit Mengen D , E , F und G so gilt wegen*

$$h \circ (g \circ f)(x) = h(g \circ f(x)) = h(g(f(x))) = h \circ g(f(x)) = (h \circ g) \circ f(x)$$

für alle $x \in D$ die Identität

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

Daher ist die Verkettung assoziativ und wir können in diesem Fall auch $h \circ g \circ f$ schreiben.

Eigenschaften wie Injektivität und Surjektivität übertragen sich von den involvierten Funktionen auf ihre Verkettung.

Lemma 1.63 (Verkettung injektiver und surjektiver Funktionen). *Es seien D , E und F drei Mengen und $f: D \rightarrow E$ und $g: E \rightarrow F$ zwei Funktionen. Dann gelten die folgenden Eigenschaften für die Verkettung $g \circ f: D \rightarrow F$:*

- Sind f und g beide injektiv, so ist auch $g \circ f$ injektiv.
- Sind f und g beide surjektiv, so ist auch $g \circ f$ surjektiv.
- Sind f und g beide bijektiv, so ist auch $g \circ f$ bijektiv.

Beweis. Wir betrachten zunächst den Fall, dass f und g beide injektiv sind. Es seien nun $x, x' \in D$ beliebig mit

$$g \circ f(x) = g \circ f(x') \quad \Leftrightarrow \quad g(f(x)) = g(f(x')).$$

Wegen der Injektivität von g folgt dann $f(x) = f(x')$, und aus der Injektivität von f folgt daraus wiederum $x = x'$. Also ist die Injektivität von $g \circ f$ bewiesen.

Als nächstes betrachten wir den Fall, dass f und g beide surjektiv sind. Es sei nun $z \in F$ beliebig. Wegen der Surjektivität von g existiert dann ein $y \in E$ mit $g(y) = z$. Wegen der Surjektivität von f gibt es zu dem so bestimmten $y \in E$ dann ein $x \in D$ mit $f(x) = y$. Daher gilt insgesamt

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = g(y) = z$$

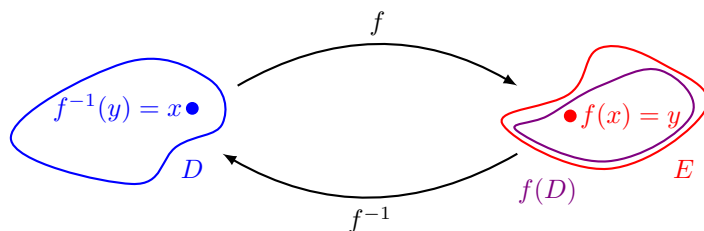
und wir haben die Surjektivität von $g \circ f$ bewiesen.

Kombinieren wir die beiden Aussagen zur Injektivität und zur Surjektivität, so folgt sofort die Bijektivität von $g \circ f$, falls die Funktionen f und g beide bijektiv sind. $\square$

Betrachten wir nun eine injektive Funktion, so enthält das Urbild jedes Elements aus dem Bild genau ein Element aus dem Definitionsbereich. Diese eindeutige Zuordnung definiert gerade die Umkehrfunktion (auf dem Bild der Funktion).

Definition 1.64 (Umkehrfunktion). *Es seien D und E zwei Mengen und $f: D \rightarrow E$ eine injektive Funktion. Wir definieren die Umkehrfunktion $f^{-1}: f(D) \rightarrow D$ von f über die Äquivalenz*

$$f^{-1}(y) = x \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = y.$$



Bemerkung 1.65. Für eine beliebige Funktion $f: D \rightarrow E$ hatten wir in Definition 1.54 das Urbild definiert. Dieses wurde mit f^{-1} notiert und gibt für eine beliebige Teilmenge V des Wertebereichs E gerade die Teilmenge des Definitionsbereichs D zurück, dessen Elemente alle nach V abgebildet werden.

Nur unter der Voraussetzung der Injektivität lässt sich über diese Urbildbeziehung eine Umkehrfunktion gewinnen, die ebenfalls mit f^{-1} notiert wird. Die Umkehrfunktion gibt dabei für ein beliebiges Element des Bildes $f(D)$ gerade das eindeutige Element seines Urbildes im Definitionsbereichs zurück.

Die Umkehrfunktion hat die Eigenschaft, dass die Verkettungen sowohl der Funktion mit der Umkehrfunktion als auch der Umkehrfunktion mit der Funktion identische Abbildungen ergeben. Dies charakterisiert die Umkehrfunktion sogar eindeutig.

Definition 1.66 (identische Abbildung). *Ist M eine beliebige Menge, so ist die identische Abbildung auf M definiert als die Funktion $\text{Id}_M: M \rightarrow M$ mit $x \mapsto x$.*

Lemma 1.67. *Es seien D und E zwei Mengen und $f: D \rightarrow E$ eine injektive Funktion. Dann ist die Umkehrfunktion f^{-1} die einzige Funktion von $f(D)$ nach D mit den Eigenschaften*

$$f \circ f^{-1} = \text{Id}_{f(D)} \quad \text{und} \quad f^{-1} \circ f = \text{Id}_D.$$

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass die angegebenen Eigenschaften für die Umkehrfunktion tatsächlich gelten. Es sei zunächst $y \in f(D)$ beliebig. Setzen wir $x := f^{-1}(y)$, so sehen wir aus der Definition der Umkehrfunktion

$$f \circ f^{-1}(y) = f(f^{-1}(y)) = f(x) = y.$$

Damit folgt $f \circ f^{-1} = \text{Id}_{f(D)}$. Nun sei $x \in D$ beliebig. Mit $y := f(x)$ sehen wir wiederum aus der Definition der Umkehrfunktion

$$f^{-1} \circ f(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(y) = x,$$

woraus wir auf $f^{-1} \circ f = \text{Id}_D$ schließen.

Um schließlich zu zeigen, dass nur die Umkehrfunktion diese Eigenschaften besitzt, sei nun $g: f(D) \rightarrow D$ eine weitere Funktion mit den Eigenschaften

$$f \circ g = \text{Id}_{f(D)} \quad \text{und} \quad g \circ f = \text{Id}_D.$$

Für $y \in f(D)$ beliebig folgt dann aus der ersten Identität sowie der definierenden Äquivalenz der Umkehrabbildung (mit der Wahl $x := g(y) \in D$)

$$f \circ g(y) = y \quad \Leftrightarrow \quad f(g(y)) = y \quad \Leftrightarrow \quad f^{-1}(y) = g(y).$$

Also muss $g = f^{-1}$ gelten und die Aussage des Lemmas ist bewiesen. $\square$

Korollar 1.68. *Es seien D , E und F drei Mengen. Sind $f: D \rightarrow E$ und $g: E \rightarrow F$ zwei injektive Funktionen, so ist die Umkehrfunktion der Verkettung $g \circ f: D \rightarrow F$ gegeben¹¹ durch*

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

Beweis. Gemäß Lemma 1.67 ist es ausreichend zu zeigen, dass die Eigenschaften

$$(g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) = \text{Id}_{g \circ f(D)} \quad \text{und} \quad (f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) = \text{Id}_D$$

gelten. Es sei zunächst $z \in g \circ f(D)$ beliebig. Daraus folgern wir zuerst $z \in g(E)$ und danach, da g injektiv ist, $g^{-1}(z) \in f(D)$. Dann gilt wegen $f \circ f^{-1} = \text{Id}_{f(D)}$ und $g \circ g^{-1} = \text{Id}_{g(E)}$

$$(g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1})(z) = g \circ f \circ f^{-1} \circ g^{-1}(z) = g \circ g^{-1}(z) = z.$$

Da $z \in g \circ f(D)$ beliebig war, folgt die erste zu zeigende Identität.

Nun sei $x \in D$ beliebig. Dann nutzen wir $g^{-1} \circ g = \text{Id}_E$ und $f^{-1} \circ f = \text{Id}_D$, um

$$(f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f)(x) = f^{-1} \circ g^{-1} \circ g \circ f(x) = f^{-1} \circ f(x) = x$$

zu erhalten. Da $x \in D$ beliebig war, folgt die zweite zu zeigende Identität, und die Aussage des Korollars ist bewiesen. $\square$

Schließlich ist es manchmal noch nützlich, eine Funktion nur auf einer Teilmenge des Definitionsbereichs zu betrachten. Dazu definieren wir das Konzept der Einschränkung einer Funktion.

Definition 1.69 (Einschränkung). *Es seien D und E zwei Mengen und $f: D \rightarrow E$ eine Funktion von D nach E . Ist U eine Teilmenge von D , so nennen wir die Funktion $f|_U: U \rightarrow E$ definiert über die Vorschrift*

$$f|_U(x) = f(x) \quad \text{für } x \in U$$

die Einschränkung von f auf U .

Bemerkungen 1.70.

- (1) *Ist U eine Teilmenge von D , so ist die Inklusionsabbildung $i_U: U \rightarrow D$ über die Vorschrift $x \mapsto x$ definiert. Dann kann die Einschränkung $f|_U$ aus Definition 1.69 auch als Verkettung $f \circ i_U$ ausgedrückt werden.*
- (2) *Ist $f: D \rightarrow E$ eine Funktion, die nicht injektiv ist, so kann man durch eine geeignete Wahl von $U \subset D$ sicherstellen, dass die Einschränkung $f|_U: U \rightarrow E$ injektiv ist (und dann beispielsweise eine Umkehrfunktion zur Einschränkung $f|_U$ bestimmen).*

¹¹Eine solche Rechenregel wird im Englischen auch als “Shoes-and-socks property” bezeichnet. Beim Invertieren des Anziehens von Socken und Schuhen (also dem Ausziehen) sollte man die Reihenfolge vertauschen und zunächst die Schuhe und dann erst die Socken ausziehen.

1.5 Natürliche Zahlen und vollständige Induktion

Die Menge der natürlichen Zahlen enthält alle beim Zählen verwendeten Zahlen $1, 2, 3, \dots$ und wird mit

$$\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \dots\}$$

abgekürzt. Wir verwenden die Konvention, dass 0 keine natürliche Zahl ist, und definieren

$$\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}.$$

Axiomatisch begründet wurden die natürlichen Zahlen durch Richard Dedekind (1888) und Giuseppe Peano (1889).

Definition 1.71 (Peano-Axiome der natürlichen Zahlen). *Es seien N eine Menge, $1 \in N$ ein Element und $s: N \rightarrow N$ eine Abbildung. Wir sagen, dass das Tripel $(N, 1, s)$ die Peano-Axiome erfüllt, falls die folgenden Eigenschaften gelten:*

- (P1) für alle $n \in N$ gilt $s(n) \neq 1$, d.h. $1 \notin s(N)$,
- (P2) für alle $n, n' \in N$ mit $s(n) = s(n')$ gilt $n = n'$, d.h. s ist injektiv,
- (P3) Ist M eine beliebige Teilmenge von N , so dass $1 \in M$ und $s(n) \in M$ für alle $n \in M$ gelten, so folgt bereits $M = N$.

In diesem Fall nennen wir $(N, 1, s)$ ein Modell der natürlichen Zahlen, s eine Nachfolgerabbildung und $s(n)$ den Nachfolger eines Elements $n \in N$.

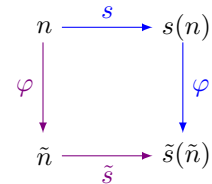
Bemerkung 1.72. In einem Modell der natürlichen Zahlen haben die Peano-Axiome die folgende Bedeutung. Gemäß Axiom (P1) ist das ausgezeichnete Element 1 nicht der Nachfolger einer natürlichen Zahl. Mit Axiom (P2) haben je zwei verschiedene Zahlen aus N auch verschiedene Nachfolger. Das Induktionsaxiom (P3) stellt schließlich sicher, dass alle Elemente von $N \setminus \{1\}$ tatsächlich im Bild der Nachfolgerabbildung liegen (da die Menge $M := \{1\} \cup s(N)$ nach Definition die beiden Eigenschaften in (P3) erfüllt und daher mit N übereinstimmen muss).

Setzen wir das Zermelo–Fraenkel Axiomensystem der Mengenlehre voraus, so lässt sich (ausgehend von einer unendlichen Menge, die nach dem Unendlichkeitsaxiom existiert) zeigen, dass es ein solches Modell der natürlichen Zahlen gibt. Des Weiteren kann man auch zeigen, dass dieses Modell der natürlichen Zahlen im Wesentlichen eindeutig ist, und zwar in dem Sinne, dass alle anderen Modelle der natürlichen Zahlen sich durch Umbenennung ergeben. Da wir später auch die reellen Zahlen axiomatisch einführen und die natürlichen Zahlen eine Teilmenge davon sind, geben wir dieses Existenz- und Eindeutigkeitsresultat der natürlichen Zahlen hier der Vollständigkeit halber nur an.

Satz 1.73 (Existenz und Eindeutigkeit der natürlichen Zahlen).

- (i) Es gibt eine Menge N , ein Element $1 \in N$ und eine Abbildung $s: N \rightarrow N$, so dass $(N, 1, s)$ ein Modell der natürlichen Zahlen darstellt.
- (ii) Es seien $(N, 1, s)$ und $(\tilde{N}, \tilde{1}, \tilde{s})$ zwei Modelle der natürlichen Zahlen. Dann existiert eine bijektive Funktion $\varphi: N \rightarrow \tilde{N}$ mit den Eigenschaften $\varphi(1) = \tilde{1}$ und $\varphi \circ s = \tilde{s} \circ \varphi$.

Bemerkung 1.74. Die erste Eigenschaft in Satz 1.73 (ii) bedeutet, dass die ausgewählten “Startelemente” 1 und $\tilde{1}$ für die Nachfolgerabbildungen auf N und $\tilde{N}$ mittels der Funktion φ aufeinander abgebildet werden. Die zweite Eigenschaft in (ii) dagegen bedeutet, dass die Funktion φ mit den Nachfolgerabbildungen “verträglich” ist und es keine Rolle spielt, ob man ausgehend von einem Element aus dem ersten Modell $(N, 1, s)$ zunächst ins andere Modell $(\tilde{N}, \tilde{1}, \tilde{s})$ wechselt und dort den Nachfolger bildet oder umgekehrt zunächst den Nachfolger im ersten Modell bildet und dann ins andere Modell wechselt.



Grundsätzlich gibt es zwar unendlich viele Modelle der natürlichen Zahlen: Man muss lediglich ein Startelement festlegen und dann sukzessive Nachfolger jedes Elements definieren, so dass die Peano-Axiome erfüllt sind.

$$\vdash \rightarrow \P \rightarrow \Upsilon \rightarrow \Pi \rightarrow \Re \rightarrow \D \rightarrow + \rightarrow \P \rightarrow \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{H} \rightarrow \Theta \rightarrow \mathbb{R} \rightarrow \# \rightarrow \dots$$

Damit ist aber bereits die Struktur der natürlichen Zahlen eindeutig festgelegt. Als Standardmodell der natürlichen Zahlen gelten arabische Zahlen $\mathbb{N}$ in Dezimalsystem mit Startelement 1 und einer Nachfolgerabbildung $s_{\mathbb{N}}$ gemäß

$$1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 6 \rightarrow 7 \rightarrow 8 \rightarrow 9 \rightarrow 10 \rightarrow 11 \rightarrow 12 \rightarrow 13 \rightarrow \dots$$

Die Nachfolgerabbildung erlaubt dabei das Zählen

$$\begin{aligned} 1 \\ 2 &= s_{\mathbb{N}}(1) \\ 3 &= s_{\mathbb{N}}(2) = s_{\mathbb{N}}(s_{\mathbb{N}}(1)) \\ 4 &= s_{\mathbb{N}}(3) = s_{\mathbb{N}}(s_{\mathbb{N}}(2)) = s_{\mathbb{N}}(s_{\mathbb{N}}(s_{\mathbb{N}}(1))) \\ 5 &= s_{\mathbb{N}}(4) = s_{\mathbb{N}}(s_{\mathbb{N}}(3)) = s_{\mathbb{N}}(s_{\mathbb{N}}(s_{\mathbb{N}}(2))) = s_{\mathbb{N}}(s_{\mathbb{N}}(s_{\mathbb{N}}(s_{\mathbb{N}}(1)))) \quad \text{etc.} \end{aligned}$$

und die Definition der Operation “+1” mittels $n + 1 := s_{\mathbb{N}}(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Über das Induktionsaxiom (P3) lässt sich ein Beweisprinzip herleiten, das man verwenden kann, um zu zeigen, dass eine Aussageform über der Grundmenge der natürlichen Zahlen immer wahr ist.

Satz 1.75 (Prinzip der vollständigen Induktion). *Es sei A eine Aussageform über allen natürlichen Zahlen $n \geq 1$. Dann ist $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ wahr, falls die folgenden Bedingungen gelten:*

- (i) Induktionsanfang: $A(1)$ ist wahr,
- (ii) Induktionsschritt: für alle $n \geq 1$ ist die Implikation $A(n) \Rightarrow A(n+1)$ wahr.

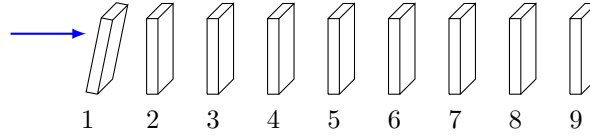
Beweis. Wir definieren die Teilmenge

$$M := \{n \in \mathbb{N} : A(n)\} \subset \mathbb{N}.$$

Dann gilt $1 \in M$ wegen des Induktionsanfangs, und für jedes $n \in M$ folgt aufgrund des Induktionsschritts auch $n + 1 \in M$. Die Menge $M \subset \mathbb{N}$ erfüllt also die beiden Bedingungen des Induktionsaxioms (P3) aus Definition 1.71, so dass wir auf $M = \mathbb{N}$ schließen. Folglich ist $A(n)$ nach Definition von M für alle $n \in \mathbb{N}$ wahr. $\square$

Bemerkungen 1.76.

- (1) Analog lässt sich auch das starke Prinzip der vollständigen Induktion zeigen, bei der der Induktionsschritt ersetzt wird durch die stärkere Bedingung, dass für alle $n \geq 1$ die Implikation $A(1) \wedge \dots \wedge A(n) \Rightarrow A(n+1)$ wahr ist.
- (2) In Anwendungen soll manchmal eine Aussage nur ab einem bestimmten Index $n_0 \in \mathbb{N}$ gezeigt werden. In diesem Fall stellt der Beweis von $A(n_0)$ den Induktionsanfang dar, und entsprechend muss die Implikation im Induktionsschritt dann für alle $n \geq n_0$ gezeigt werden.
- (3) Im Induktionsschritt nennt man $A(n)$ die Induktionsannahme oder Induktionsvoraussetzung und $A(n+1)$ die Induktionsbehauptung.
- (4) Das Prinzip der vollständigen Induktion kann man sich wie einen Dominoeffekt vorstellen. Wenn der erste Dominostein fällt und jeder fallende Dominostein den nächsten umstößt, so fallen am Ende alle Dominosteine.



- (5) Auf das verwandte Prinzip des kleinsten Elements und des kleinsten Verbrechers gehen wir später in Bemerkung 2.47 ein.

Auf den natürlichen Zahlen kann man nun rekursiv auch die Addition, die Multiplikation und das Potenzieren von natürlichen Zahlen erklären und dafür dann alle aus der Schule bekannten Rechenregeln ableiten. Wir erklären solche Rechenregeln im nächsten Kapitel allgemeiner für reelle Zahlen. Daher wollen wir diese für den Moment nun voraussetzen und noch einige nützliche Anwendungen des Prinzips der vollständigen Induktion auf endliche Summen und Produkte zeigen.

Definition 1.77 (Summen- und Produktschreibweise). *Es sei für jedes $k \in \mathbb{Z}$ ein Element $a_k \in \mathbb{R}$ gegeben. Für $n_0 \in \mathbb{Z}$ setzen wir*

$$\sum_{k=n_0}^{n_0-1} a_k = 0 \quad \text{und} \quad \prod_{k=n_0}^{n_0-1} a_k = 1.$$

Dann definieren wir rekursiv für $n \geq n_0$

$$\sum_{k=n_0}^n a_k = \sum_{k=n_0}^{n-1} a_k + a_n = a_{n_0} + \dots + a_n$$

und

$$\prod_{k=n_0}^n a_k = \left(\prod_{k=n_0}^{n-1} a_k \right) a_n = a_{n_0} \cdot \dots \cdot a_n.$$

Bemerkungen 1.78. *Es seien $n_0, n \in \mathbb{Z}$ sowie für jedes $k \in \mathbb{Z}$ ein Element $a_k \in \mathbb{R}$ gegeben. Für endliche Summen und Produkte lassen sich die folgenden Regeln einfach verifizieren, indem überprüft wird, dass rechts und links die Summe oder das Produkt jeweils über die gleichen Elemente gebildet wird:*

- (1) Die Benennung des Laufindex (i, j, k, ℓ etc.) in der Summe oder dem Produkt spielt keine Rolle (solange sie nicht mit einer bereits definierten Indexbelegung übereinstimmt).
- (2) Eine Indexverschiebung ändert den Wert von Summe und Produkt nicht, d.h. für $\ell \in \mathbb{Z}$ gelten

$$\sum_{k=n_0}^n a_k = \sum_{k=n_0-\ell}^{n-\ell} a_{k+\ell} \quad \text{und} \quad \prod_{k=n_0}^n a_k = \prod_{k=n_0-\ell}^{n-\ell} a_{k+\ell}.$$

- (3) In Summe und Produkt kann die Reihenfolge beliebig gewählt werden. Insbesondere kann man etwa die Reihenfolge umkehren

$$\sum_{k=n_0}^n a_{n+n_0-k} = \sum_{k=n_0}^n a_k \quad \text{und} \quad \prod_{k=n_0}^n a_{n+n_0-k} = \prod_{k=n_0}^n a_k.$$

- (4) Die Summe von Summen und das Produkt von Produkten kann zu einer Summe bzw. einem Produkt zusammengefasst werden, also

$$\sum_{k=n_0}^n a_k + \sum_{k=n_0}^n b_k = \sum_{k=n_0}^n (a_k + b_k) \quad \text{und} \quad \left(\prod_{k=n_0}^n a_k \right) \cdot \left(\prod_{k=n_0}^n b_k \right) = \prod_{k=n_0}^n (a_k b_k).$$

- (5) Konstanten können aus Summe und Produkt (mit der entsprechenden Multiplizität) ausgeklammert werden, d.h. für $\lambda \in \mathbb{R}$ gelten

$$\sum_{k=n_0}^n \lambda a_k = \lambda \sum_{k=n_0}^n a_k \quad \text{und} \quad \prod_{k=n_0}^n (\lambda a_k) = \lambda^{n-n_0+1} \prod_{k=n_0}^n a_k.$$

- (6) Summe und Produkt können aufgeteilt werden, d.h. für $n_0 < n_1 \leq n$ gelten

$$\sum_{k=n_0}^n a_k = \sum_{k=n_0}^{n_1-1} a_k + \sum_{k=n_1}^n a_k \quad \text{und} \quad \prod_{k=n_0}^n a_k = \left(\prod_{k=n_0}^{n_1-1} a_k \right) \cdot \left(\prod_{k=n_1}^n a_k \right).$$

Aufgrund der Möglichkeit einer Indexverschiebung werden viele Eigenschaften von endlichen Summen oder Produkten nur für den Fall $n_0 = 0$ oder $n_0 = 1$ aufgeführt. Wir überlegen uns zunächst, dass sich eine Summe oder ein Produkt mit einer sogenannten Teleskopeigenschaft sehr einfach berechnen lässt.

Lemma 1.79 (Teleskopsumme und Teleskopprodukt). *Es sei für jedes $k \in \mathbb{N}$ ein Element $a_k \in \mathbb{R}$ gegeben (mit $a_k \neq 0$ für das Produkt). Dann gelten für jedes $n \in \mathbb{N}$*

$$\sum_{k=1}^n (a_k - a_{k+1}) = a_1 - a_{n+1} \quad \text{und} \quad \prod_{k=1}^n \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{a_{n+1}}{a_1}.$$

Beweis. Wir ziehen für ein beliebiges $n \in \mathbb{N}$ in der Teleskopsumme zunächst die Summen auseinander und das Vorzeichen heraus. Wenden wir dann noch eine Indexverschiebung an, so sehen wir

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n (a_k - a_{k+1}) &= \sum_{k=1}^n a_k - \sum_{k=1}^n a_{k+1} \\ &= \sum_{k=1}^n a_k - \sum_{k=2}^{n+1} a_k = a_1 + \sum_{k=2}^n a_k - \sum_{k=2}^n a_k - a_{n+1} = a_1 - a_{n+1}. \end{aligned}$$

Eine alternative Herangehensweise ist die vollständige Induktion, die wir nun für das Teleskopprodukt anwenden. Um den Induktionsanfang zu zeigen, betrachten wir den Fall $n = 1$ und verifizieren

$$\prod_{k=1}^1 \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{a_2}{a_1}.$$

Für den Induktionsschritt nehmen wir nun an, dass die Aussage für ein $n \in \mathbb{N}$ gilt. Damit folgt

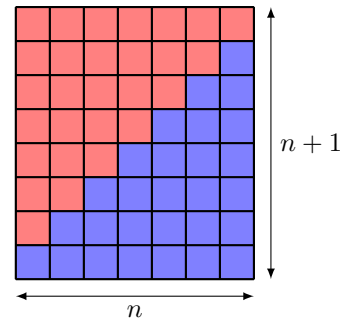
$$\prod_{k=1}^{n+1} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \left(\prod_{k=1}^n \frac{a_{k+1}}{a_k} \right) \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} \stackrel{\text{IV}}{=} \frac{a_{n+1}}{a_1} \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} = \frac{a_{n+2}}{a_1},$$

also die behauptete Aussage für $n+1$. Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion ist die Behauptung damit auch für das Teleskopprodukt bewiesen. $\square$

Viele Aussagen über endliche Summen oder Produkte können wie im Beweis des vorherigen Lemmas 1.79 direkt oder mit vollständiger Induktion bewiesen werden. Typischerweise versuchen Mathematiker möglichst "schöne" Beweise zu finden. Unter Schönheit kann man dabei etwa verstehen, dass der Beweis sehr elementar ist, intuitiv geführt wird oder besonders elegant ist.

Satz 1.80 (Gaußsche Summenformel). *Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt*

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}.$$



Beweis. Beweis mit vollständiger Induktion. Wir bezeichnen im Folgenden den Wert der linken Seite der Behauptung mit L_n und den Wert der rechten Seite mit R_n . Für $n = 1$ haben wir

$$L_1 = \sum_{k=1}^1 k = 1 \quad \text{und} \quad R_1 = \frac{1(1+1)}{2} = 1,$$

so dass mit $L_1 = R_1$ der Induktionsanfang gilt. Für den Induktionsschritt nehmen wir nun an, dass die Aussage für ein (beliebiges, aber festes) $n \in \mathbb{N}$ wahr ist, also die Identität $L_n = R_n$ gilt. Dann folgt

$$\begin{aligned} L_{n+1} &= \sum_{k=1}^{n+1} k = \sum_{k=1}^n k + n + 1 \\ &\stackrel{\text{IV}}{=} \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 = \frac{n+1}{2}(n+2) = R_{n+1}. \end{aligned}$$

Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion gilt dann $L_n = R_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und die Behauptung des Satzes ist gezeigt.

Alternativer direkter Beweis. Wir können die Behauptung alternativ auch durch das direkte Rechnen mit Summen beweisen. Dazu teilen wir für ein beliebiges $n \in \mathbb{N}$ zunächst die Summe auf, vertauschen dann die Reihenfolge der Summation in der zweiten Summe und fassen schließlich die entstandenen Summen wieder zusammen. So finden wir

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n k &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n k + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n k = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n k + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (n+1-k) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (k+n+1-k) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (n+1) = \frac{1}{2} n(n+1). \quad \square \end{aligned}$$

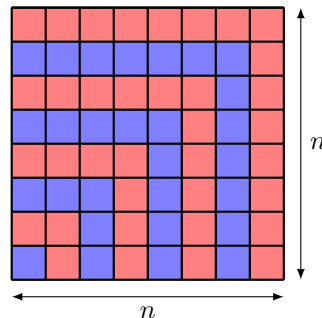
Übung 1.81. Es sei $n \in \mathbb{N}$.

- (i) Zeigen Sie, dass 3 ein Teiler der Zahl $4^n - 1$ ist.
- (ii) Zeigen Sie für die Summe über die ersten n ungeraden natürlichen Zahlen

$$\sum_{k=1}^n (2k-1) = n^2.$$

- (iii) Zeigen Sie für die Summe über die ersten n Quadratzahlen natürlicher Zahlen

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$



Definition 1.82 (ganzzahlige Potenzen von reellen Zahlen). Für jede reelle Zahl $x \in \mathbb{R}$ und jedes $n \in \mathbb{N}_0$ setzen wir induktiv

$$\begin{aligned} x^0 &:= 1, \\ x^{n+1} &:= x^n \cdot x = \underbrace{x \cdot \dots \cdot x}_{(n+1)\text{-mal}} \end{aligned}$$

sowie

$$x^{-n} := (x^{-1})^n \quad \text{für } x \neq 0.$$

Satz 1.83 (geometrische Summenformel). *Es sei $q \neq 1$ eine reelle Zahl. Für jede Zahl $n \in \mathbb{N}_0$ gilt*

$$\sum_{k=0}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

Beweis. Beweis über vollständige Induktion. Für $n = 0$ gilt

$$\sum_{k=0}^0 q^k = q^0 = 1 \quad \text{und} \quad \frac{1 - q^1}{1 - q} = 1,$$

also ist der Induktionsanfang gezeigt. Für den Induktionsschritt nehmen wir nun an, dass die behauptete Identität für ein (beliebiges, aber festes) $n \in \mathbb{N}_0$ wahr ist. Damit berechnen wir

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n+1} q^k &= \sum_{k=0}^n q^k + q^{n+1} \stackrel{\text{IV}}{=} \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} + q^{n+1} \\ &= \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} + \frac{q^{n+1}(1 - q)}{1 - q} = \frac{1 - q^{n+2}}{1 - q}. \end{aligned}$$

Damit ist die behauptete Identität für $n + 1$ anstelle von n gezeigt. Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion ist der Satz also für alle $n \in \mathbb{N}_0$ bewiesen.

Alternativer direkter Beweis. Wir berechnen mithilfe der Teleskopsumme aus Lemma 1.79 (unter Beachtung des Startindex 0 anstelle von 1) für ein beliebiges $n \in \mathbb{N}_0$

$$(1 - q) \sum_{k=0}^n q^k = \sum_{k=0}^n (1 - q)q^k = \sum_{k=0}^n (q^k - q^{k+1}) = q^0 - q^{n+1} = 1 - q^{n+1}.$$

Nach Division durch $1 - q$ ist dies die behauptete geometrische Summenformel. $\square$

Wir definieren nun die Fakultät einer natürlichen Zahl und erklären dann ihre Bedeutung in der Kombinatorik.

Definition 1.84 (Fakultät). *Es sei $n \in \mathbb{N}_0$. Wir definieren die Fakultät von n als*

$$n! := \prod_{k=1}^n k = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n.$$

★ **Satz 1.85** (kombinatorische Bedeutung der Fakultät). *Es sei $n \in \mathbb{N}$. Die Anzahl aller möglichen Anordnungen einer n -elementigen Menge ist $n!$.*

Beweis. Wir beweisen den Satz über vollständige Induktion. Wir betrachten zunächst den Fall $n = 1$, also dass die Menge nur ein einziges Element enthält. Hier gibt es für die Anordnung nur eine Möglichkeit, und wegen $1! = 1$ ist damit der Induktionsanfang gezeigt.

Für den Induktionsschritt nehmen wir an, dass die Aussage für eine n -elementige Menge mit (beliebigem, aber festem) $n \in \mathbb{N}$ wahr ist. Haben wir nun eine $(n + 1)$ -elementige Menge, so wählen wir ein beliebiges Element davon aus (z.B. das erste oder letzte) und setzen es auf eine der $(n + 1)$ Positionen, so dass es dafür also $n + 1$ Möglichkeiten gibt. Bei jeder dieser Positionswahlen des ausgewählten Elements hat man für die verbliebenen n Elemente nach Induktionsvoraussetzung $n!$ Möglichkeiten für die Anordnung. Nach Konstruktion sind je zwei so erzeugte Anordnungen unterschiedlich, da sich entweder die Position des ausgewählten Elements unterscheidet oder, bei gleicher Position des ausgewählten Elements, nach Induktionsannahme die Anordnung der restlichen Elemente unterschiedlich ist. Folglich gibt es wie behauptet insgesamt

$$(n + 1) \cdot n! = (n + 1)!$$

verschiedene Möglichkeiten der Anordnung der $(n + 1)$ -elementigen Menge. Damit ist die Aussage des Satzes bewiesen. $\square$

Beispiel 1.86. Die Menge $\{1, 2, 3\}$ hat insgesamt $3! = 6$ mögliche Anordnungen, und zwar

$$123, \quad 132, \quad 213, \quad 231, \quad 312 \quad \text{und} \quad 321.$$

Bemerkung 1.87. Jede Anordnung aus Satz 1.85 entspricht einer Permutation, also einer bijektiven Abbildung $\sigma: \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$. Hierbei bedeutet $\sigma(k) = \ell$, dass das k -te Element an der ℓ -ten Stelle ist. Daher bedeutet der letzte Satz auch, dass es genau $n!$ Permutationen einer n -elementigen Menge gibt.

Als nächstes führen wir (verallgemeinerte) Binomialkoeffizienten ein. Einerseits zeigen wir dann ihre Bedeutung im Zusammenhang mit dem binomischen Lehrsatz und andererseits erklären wir ihre kombinatorische Bedeutung.

Definition 1.88 (Binomialkoeffizient). Es sei $x \in \mathbb{R}$ eine reelle Zahl. Wir definieren für $k \in \mathbb{N}_0$ den Binomialkoeffizienten

$$\binom{x}{k} = \prod_{\ell=1}^k \frac{x - \ell + 1}{\ell}.$$

Bemerkungen 1.89.

(1) Aus der Definition folgt für jedes $x \in \mathbb{R}$ unmittelbar

$$\binom{x}{0} = 1 \quad \text{und} \quad \binom{x}{1} = x.$$

(2) Ist $x = n \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl, so vereinfacht sich der Ausdruck der Binomialkoeffizienten zu

$$\binom{n}{k} = \left(\prod_{\ell=1}^k \frac{n - \ell + 1}{\ell} \right) \frac{(n - k)!}{(n - k)!} = \frac{n!}{k!(n - k)!} = \binom{n}{n - k} \quad \text{für alle } k \leq n$$

sowie

$$\binom{n}{k} = 0 \quad \text{für alle } k > n$$

(da in diesem Fall der Faktor $\frac{n - \ell + 1}{\ell}$ im Produkt für den Index $\ell = n + 1 \leq k$ verschwindet). Speziell für $n = 2, 3, 4$ haben wir etwa

$$\begin{aligned} \binom{2}{0} &= 1, & \binom{2}{1} &= 2, & \binom{2}{2} &= 1, \\ \binom{3}{0} &= 1, & \binom{3}{1} &= 3, & \binom{3}{2} &= 3, & \binom{3}{3} &= 1 \\ \binom{4}{0} &= 1, & \binom{4}{1} &= 4, & \binom{4}{2} &= 6, & \binom{4}{3} &= 4, & \binom{4}{4} &= 1. \end{aligned}$$

Wir werden später in Satz 1.94 sehen, dass die Bezeichnung von $\binom{n}{k}$ als Binomialkoeffizienten darin begründet liegt, dass sie bei der Entwicklung von $(x + y)^n$ als Polynom in x und y als Koeffizienten auftreten.

Als Vorbereitung für den binomischen Lehrsatz müssen wir eine (von vielen) Eigenschaften der Binomialkoeffizienten herleiten.

Lemma 1.90 (Rekursionsformel für Binomialkoeffizienten). Es seien $n \in \mathbb{N}$ und $k \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}.$$

Beweis. Wir weisen die Rekursionsformel direkt über Bemerkung 1.89 (2) nach und unterscheiden dafür die Fälle $k < n$, $k = n$ und $k > n$.

- In den Fällen $k < n$ können wir die behauptete Formel einfach über die Darstellung der Binomialkoeffizienten aus Bemerkung 1.89 (2) nachrechnen:

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} \\ &= \frac{(k+1)n!}{(k+1)!(n-k)!} + \frac{n!(n-k)}{(k+1)!(n-k)!} = \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!} = \binom{n+1}{k+1}. \end{aligned}$$

- Im Fall $k = n$ haben wir nach Bemerkung 1.89 (2)

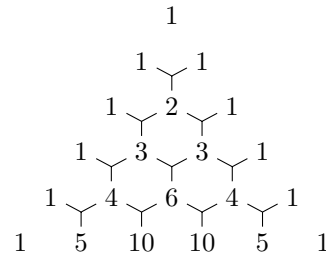
$$\binom{n+1}{k+1} = 1 = 1 + 0 = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}.$$

- Ähnlich sehen wir für den Fall $k > n$

$$\binom{n+1}{k+1} = 0 = 0 + 0 = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}.$$

□

Bemerkung 1.91. Das Pascalsche Dreieck ist eine graphische Veranschaulichung der Binomialkoeffizienten. Der Binomialkoeffizient $\binom{n}{k}$ wird dabei für $n \in \mathbb{N}_0$ und $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ in der n -ten Zeile an der k -ten Position in einer Dreiecksstruktur eingetragen. Das Pascalsche Dreieck kann man auch erzeugen, indem man an den Rändern jeweils den Wert 1 einträgt und die anderen Zeilen als Summe der beiden Werte bildet, die in der darüber liegenden Zeile schräg darüber stehen. Diese einfache Berechnung der Binomialkoeffizienten entspricht gerade der eben bewiesenen Rekursionsformel.



★ **Übung 1.92** (Fibonacci-Zahlen im Pascalschen Dreieck). Die Fibonacci-Zahlen¹² sind eine unendliche Folge natürlicher Zahlen. Die ersten beiden Folgenglieder sind als 1 definiert und alle anderen Folgenglieder ergeben sich als Summe der beiden vorherigen Folgenglieder, also

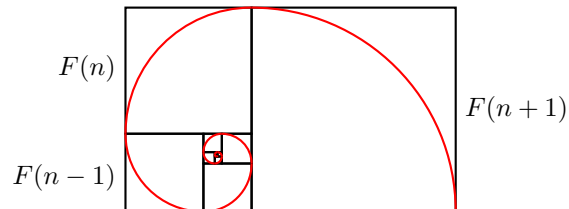
$$F(1) = F(2) = 1$$

und

$$F(n+2) = F(n+1) + F(n) \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Zeigen Sie

$$F(n) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n-k-1}{k} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N},$$



wobei die *Gauß-Klammer* $\lfloor x \rfloor$ für $x \in \mathbb{R}$ die größte ganze Zahl, die kleiner oder gleich x ist, bezeichne. Veranschaulichen Sie diesen Zusammenhang außerdem graphisch im Pascalschen Dreieck.

¹²Leonardo Fibonacci (ca. 1170-1240) war ein italienischer Mathematiker, der auf seinen Reisen die indisch-arabische Mathematik kennengelernt hatte und die dabei gewonnenen Erkenntnisse in seinem Buch "Liber Abaci" (Buch der Berechnung) niederschrieb. Mit der nach ihm benannten (aber bereits seit der Antike bekannten) Zahlenfolge beschrieb er das Wachstum von Kaninchenpopulationen. Startet man mit einem Kaninchenpaar und nimmt an, dass Kaninchenpaare nach einer Generation zeugungsfähig werden, dann jede Generation ein neues Kaninchenpaar gebären und niemals sterben, so beschreibt die Fibonacci-Zahl $F(n+2)$ gerade die Anzahl an Kaninchenpaaren nach $n+2$ Generationen (die sich nach Annahme gerade als Summe aller Kaninchenpaare $F(n+1)$ nach $n+1$ Generationen und dem Nachwuchs der geschlechtsreifen Kaninchenpaare $F(n)$ in der $(n+1)$ -ten Generation ergibt).

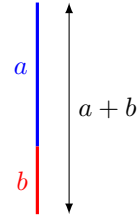
★ **Übung 1.93** (Fibonacci-Zahlen und der goldene Schnitt).

- (i) Man sagt, dass eine Strecke im *goldenen Schnitt* geteilt wird, wenn das Verhältnis der gesamten Strecke $a + b$ zu seiner größeren Teilstrecke a gerade dem Verhältnis der größeren Teilstrecke a zur kleineren Teilstrecke b entspricht. Überlegen Sie sich, dass für dieses Verhältnis $\alpha = (1 + \sqrt{5})/2$ (die *goldene Zahl*) gilt.

- (ii) Zeigen Sie, dass α eine irrationale Zahl ist.

- (iii) Zeigen Sie für die Fibonacci-Zahlen aus Übung 1.92

$$F(n) = \frac{\alpha^n - (1 - \alpha)^n}{\sqrt{5}} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$



Mithilfe der Rekursionsformel aus Lemma 1.90 können wir nun den binomischen Lehrsatz beweisen.

Satz 1.94 (binomischer Lehrsatz). Für alle reellen Zahlen $x, y \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}_0$ gilt (mit der Konvention $x^0 = 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$ aus Definition 1.82)

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}.$$

Beweis. Wir beweisen den Satz mit dem Prinzip der vollständigen Induktion. Für den Induktionsanfang $n = 0$ bemerken wir

$$(x + y)^0 = 1 \quad \text{und} \quad \sum_{k=0}^0 \binom{0}{k} x^k y^{-k} = \binom{0}{0} x^0 y^0 = 1,$$

so dass die Gültigkeit der Aussage in diesem Fall verifiziert ist.

Für den Induktionsschritt nehmen wir an, dass die Aussage für ein (beliebiges, aber festes) $n \in \mathbb{N}$ wahr ist. Damit schreiben wir $(x + y)^{n+1}$ zunächst als

$$\begin{aligned} (x + y)^{n+1} &= (x + y)(x + y)^n \stackrel{\text{IV}}{=} x \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k} + y \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{k+1} y^{n-k} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k+1} \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} x^k y^{n-k+1} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k+1}, \end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt noch eine Indexverschiebung in der ersten Summe angewandt haben. Berücksichtigen wir nun die Rekursionsformel aus Lemma 1.90 sowie

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 = \binom{n+1}{0} = \binom{n+1}{n+1},$$

so erhalten wir die behauptete Formel über

$$\begin{aligned} (x + y)^{n+1} &= \sum_{k=1}^n \binom{n}{k-1} x^k y^{n-k+1} + \binom{n}{n} x^{n+1} y^0 + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k+1} + \binom{n}{0} x^0 y^{n+1} \\ &= \sum_{k=1}^n \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right) x^k y^{n-k+1} + x^{n+1} y^0 + x^0 y^{n+1} \\ &= \sum_{k=1}^n \binom{n+1}{k} x^k y^{n-k+1} + \binom{n+1}{n+1} x^{n+1} y^0 + \binom{n+1}{0} x^0 y^{n+1} \end{aligned}$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^k y^{n-k+1}.$$

Folglich ist die Aussage des Satzes nach dem Prinzip der vollständigen Induktion bewiesen. $\square$

Bemerkungen 1.95.

- (1) Die Koeffizienten in der Formel für $(x+y)^n$ kann man auch einfach aus der n -ten Zeile des Pascalschen Dreiecks aus Bemerkung 1.91 ablesen. Ausgeschrieben lautet der binomische Lehrsatz für die ersten fünf Zahlen für n

$$\begin{aligned}(x+y)^0 &= 1 \\(x+y)^1 &= x+y \\(x+y)^2 &= x^2+2xy+y^2 \\(x+y)^3 &= x^3+3x^2y+3xy^2+y^3 \\(x+y)^4 &= x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+y^4.\end{aligned}$$

- (2) Setzt man speziell $x = y = 1$ bzw. $-x = y = 1$ im binomischen Lehrsatz ein, so erhält man für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Formeln

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = (1+1)^n = 2^n \quad \text{und} \quad \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = (-1+1)^n = 0.$$

★ **Satz 1.96** (kombinatorische Bedeutung der Binomialkoeffizienten). Es seien $k, n \in \mathbb{N}_0$ mit $k \leq n$. Die Anzahl aller möglichen k -elementigen Teilmengen einer n -elementigen Menge ist $\binom{n}{k}$.

Beweis. Wir beweisen auch diese Aussage mithilfe des Prinzips der vollständigen Induktion, und zwar über $n \in \mathbb{N}_0$. Für den Induktionsanfang betrachten wir den Fall $n = 0$. Die leere Menge ist die einzige Menge mit 0 Elementen, und diese hat eine einzige 0-elementige Teilmenge, nämlich die leere Menge selbst. Wegen $\binom{0}{0} = 1$ ist damit die Aussage für $n = 0$ (für alle zugelassenen Werte von k) korrekt.

Für den Induktionsschritt nehmen wir an, dass für ein (beliebiges, aber festes) $n \in \mathbb{N}_0$ gilt, dass die Anzahl aller möglichen k -elementigen Teilmengen einer n -elementigen Menge $\binom{n}{k}$ ist. Wir betrachten nun eine $(n+1)$ -elementige Menge M und wollen die Behauptung für jedes $k \in \{0, 1, \dots, n+1\}$ beweisen. Für $k = 0$ bzw. $k = n+1$ gibt es offensichtlich nur eine k -elementige Teilmenge, und zwar die leere Menge bzw. M selbst. Es bleibt noch die Aussage für jedes $k \in \{1, \dots, n\}$ zu zeigen. Wir fixieren ein beliebiges Element $x \in M$ und überlegen uns, dass L genau dann eine k -elementige Teilmenge von M ist, wenn

- entweder $L \subset M \setminus \{x\}$ gilt und L genau k Elemente hat (dies ist der Fall für $x \notin L$),
- oder $L \setminus \{x\} \subset M \setminus \{x\}$ gilt und L außer x genau $(k-1)$ weitere Elemente hat (dies ist der Fall für $x \in L$).

Da die Menge $M \setminus \{x\}$ genau n Elemente enthält, wissen wir, dass es für den ersten Fall $\binom{n}{k}$ und für den zweiten Fall $\binom{n}{k-1}$ Möglichkeiten gibt. Nach der Rekursionsformel aus Lemma 1.90 gibt es insgesamt also

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$$

Teilmengen von M mit k Elementen. Dies zeigt, dass die Aussage für $n+1$ (für alle zugelassenen Werte von k) gilt. Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion ist der Satz dann bewiesen. $\square$

Bemerkungen 1.97.

- (1) Wir haben mit Satz 1.96 insbesondere gezeigt, dass die über Brüche definierten Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$ für $k, n \in \mathbb{N}_0$ aus $\mathbb{N}_0$ sind.
- (2) Insgesamt besitzt eine n -elementige Menge 2^n verschiedene Teilmengen. Dies kann man sich entweder direkt überlegen (für jedes Element der Menge gibt es immer die beiden Möglichkeiten, dass das Element in einer Teilmenge enthalten ist oder nicht) oder aus Bemerkung 1.95 (2) folgern.
- (3) Im Spiel Lotto "6 aus 49 ohne Superzahl" gibt es insgesamt $\binom{49}{6} = 13\,983\,816$ Möglichkeiten für die Ziehung der Lottozahlen.

Abschließend beweisen wir, dass es unendlich viele Primzahlen gibt. Zunächst zeigen wir eine Hilfsaussage:

Lemma 1.98. *Jede natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ besitzt (mindestens) einen Primteiler.*

Beweis. Wir beweisen die Aussage über vollständige Induktion. Für den Induktionsanfang stellen wir fest, dass die Zahl $n = 2$ eine Primzahl ist und durch sich selbst teilbar ist, also einen Primteiler besitzt.

Für den Induktionsschritt verwenden wir die in Bemerkung 1.76 (1) beschriebene Variante der vollständigen Induktion und nehmen an, dass die Aussage für jedes $2 \leq k \leq n$ für ein (beliebiges, aber festes) $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ gilt. Die Zahl $n + 1$ ist entweder eine Primzahl, woraus die Behauptung direkt folgt, oder sie ist keine Primzahl, d.h. es existieren natürliche Zahlen $k, m \geq 2$ mit $n + 1 = km$. Wegen $k \leq n$ besitzt k nach Induktionsvoraussetzung einen Primteiler, der wegen $n + 1 = km$ auch ein Primteiler von $n + 1$ ist. Also gilt die behauptete Aussage für $n + 1$. Die Aussage des Lemmas ist daher mit vollständiger Induktion bewiesen. $\square$

Satz 1.99 (Euklid). *Es gibt unendlich viele Primzahlen.*

Beweis. Wir beweisen den Satz durch Widerspruch und nehmen an, dass die Aussage des Satzes falsch ist. Dies bedeutet, dass es nur endlich viele Primzahlen $p_1, p_2, \dots, p_n$ (für eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$) gibt. Nun definieren wir die (natürliche) Zahl

$$N := \prod_{k=1}^n p_k + 1 = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_n + 1.$$

Einerseits gilt nun, dass N durch keine der Primzahlen $p_1, \dots, p_n$ teilbar ist (es bleibt immer Rest 1), also keinen Primteiler besitzt (nach Annahme gibt es nämlich keine anderen Primzahlen als $p_1, \dots, p_n$). Andererseits muss N gemäß des eben gezeigten Lemmas 1.98 mindestens einen Primteiler besitzen. Dies ergibt einen Widerspruch und die Annahme, dass es nur endlich viele Primzahlen gibt, muss folglich falsch sein. Damit ist der Satz, dass es unendlich viele Primzahlen gibt, bewiesen. $\square$

Kapitel 2

Reelle Zahlen

Die reellen Zahlen bilden die Grundlage der Analysis. Die Menge der reellen Zahlen enthalten die natürlichen Zahlen, die ganzen Zahlen und die rationalen Zahlen als Teilmengen, haben jedoch als Menge (bezüglich der Verknüpfungen von Addition und Multiplikation) bessere Eigenschaften. Betrachten wir zunächst die Menge

$$\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \dots\}$$

der natürlichen Zahlen aus Kapitel 1.5, so ergibt die Addition oder Multiplikation zweier natürlicher Zahlen wieder eine natürliche Zahl. Die Subtraktion zweier natürlicher Zahlen ergibt im Allgemeinen aber keine natürliche Zahl, d.h. die Gleichung

$$m + x = n$$

hat für zwei beliebige gegebene natürliche Zahlen $m, n \in \mathbb{N}$ nicht unbedingt eine Lösung $x \in \mathbb{N}$ (nämlich nur genau dann, wenn $m < n$ gilt). Dieses Problem lässt sich dadurch lösen, dass man die Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen erweitert und die Menge

$$\mathbb{Z} := \{z: z \in \mathbb{N}_0 \text{ oder } -z \in \mathbb{N}\}$$

aller ganzen Zahlen betrachtet. Die Addition, Multiplikation und Subtraktion zweier ganzer Zahlen ergibt nun wieder eine ganze Zahl (und die Menge der ganzen Zahlen ist tatsächlich die kleinste Menge mit dieser Eigenschaft). Allerdings liefert schon die Division einer ganzen Zahl durch eine natürliche Zahl im Allgemeinen keine ganze Zahl mehr, d.h. die Gleichung

$$nx = z$$

hat für beliebig gegebene Zahlen $n \in \mathbb{N}$ und $z \in \mathbb{Z}$ nicht unbedingt eine Lösung $x \in \mathbb{Z}$. Dieses Problem lässt sich durch eine erneute Erweiterung lösen, indem man nun die Menge

$$\mathbb{Q} := \{q: nq = z \text{ für geeignete Zahlen } n \in \mathbb{N} \text{ und } z \in \mathbb{Z}\}$$

der rationalen Zahlen betrachtet (und die Menge der rationalen Zahlen ist auch hier die kleinste Menge mit dieser Eigenschaft). Insbesondere hat damit jedes Element $q \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ auch ein multiplikatives Inverses. Wie wir anhand der Wurzel von Primzahlen gesehen haben (siehe Satz 1.19), hat die Menge der rationalen Zahlen aber noch “Lücken”, so dass man eine erneute Erweiterung vornehmen muss und dann durch eine “Vervollständigung” der rationalen Zahlen auf die reellen Zahlen kommt.

Eine alternative Möglichkeit der Einführung der reellen Zahlen ist ihre axiomatische Begründung, die auf David Hilbert¹ zurückgeht und die wir in diesem Kapitel vorstellen werden.

¹David Hilbert (1862–1943) war ein deutscher Mathematiker, der die Mathematik vollständig auf einem Axiomensystem aufbauen wollte, das nachweislich widerspruchsfrei sein sollte. Auf dem internationalen Mathematikerkongress im Jahre 1900 in Paris stellt er in einem Vortrag eine Liste von 23 ungelösten Problemen aus verschiedensten Teilgebieten der Mathematik vor, von deren Lösungen er sich wesentliche Fortschritte auf den jeweiligen Gebieten versprach. Von diesen sogenannten *Hilbertschen Problemen* gelten inzwischen 15 als gelöst, 3 als ungelöst und 5 als prinzipiell unlösbar.

Axiom 2.1 (Axiom der reellen Zahlen). *Es gibt eine Menge der reellen Zahlen, die wir mit $\mathbb{R}$ bezeichnen, so dass $\mathbb{R}$ ein Körper, geordnet und vollständig ist.*

Ziel dieses Kapitels ist es, die in Axiom 2.1 aufgeführten Begriffe eines Körpers, einer Anordnung und der Vollständigkeit der Reihe nach einzuführen und dann genauer zu studieren: So werden wir rein auf Basis der Körperaxiome zunächst Rechenregeln ableiten, die im Spezialfall der reellen Zahlen gerade den aus der Schule bekannten Rechenregeln entsprechen (nun aber mathematisch rigoros bewiesen sind). Anschließend erklären wir, wie anhand des Anordnungsaxioms Elemente eines Körpers miteinander verglichen und so auch die Konzepte von oberen und unteren Schranken von Mengen, Beträge und Intervalle sinnvoll definiert werden können. Schließlich behandeln wir noch das Vollständigkeitsaxiom, mit dem die oben erwähnten “Lücken” in den rationalen Zahlen geschlossen werden. Dabei werden wir einige “intuitive” Vorstellungen der reellen Zahlen formalisieren und insbesondere auch die übliche Darstellung in Form von Dezimalzahlen wiedergewinnen.

2.1 Die Körperaxiome

Wir geben in diesem Abschnitt die Definition eines Körpers an und leiten daraus alle Regeln für das Rechnen mit Gleichungen ab. Zunächst führen wir den Begriff einer (kommutativen) Gruppe ein, die für die Definition eines Körpers zentral ist.

Definition 2.2 ((kommutative) Gruppe). *Ein Paar $(G, *)$ aus einer nicht-leeren Menge G und einer (inneren) Verknüpfung $*: G \times G \rightarrow G$ heißt Gruppe, falls die folgenden Eigenschaften erfüllt sind:*

- (G1) Assoziativgesetz: *es gilt $(x * y) * z = x * (y * z)$ für alle $x, y, z \in G$,*
 - (G2) Neutrales Element: *es existiert ein (neutrales) Element $e \in G$ mit $e * x = x = x * e$ für alle $x \in G$,*
 - (G3) Inverse Elemente: *zu jedem $x \in G$ existiert ein (inverses) Element $x' \in G$ mit $x * x' = e = x' * x$.*
- Eine Gruppe $(G, *)$ heißt ferner kommutativ oder abelsch, falls zusätzlich gilt:*
- (G4) Kommutativgesetz: *es gilt $x * y = y * x$ für alle $x, y \in G$.*

Bemerkungen 2.3 (Notation in additiven bzw. multiplikativen Gruppen).

- (1) *Ist die Verknüpfung die Addition, so spricht man von einer additiven Gruppe. Üblicherweise wird das neutrale Element mit 0 und das zu einem Element $x \in G$ inverse Element mit $-x$ bezeichnet.*
- (2) *Ist die Verknüpfung die Multiplikation, so spricht man von einer multiplikativen Gruppe. Üblicherweise wird das neutrale Element mit 1 und das zu einem Element $x \in G$ inverse Element mit x^{-1} bezeichnet.*

Beispiele 2.4.

- $(\mathbb{Z}, +)$ ist eine kommutative Gruppe,
- $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$ und $(\mathbb{Q}, +)$ sind kommutative Gruppen,
- $(\mathbb{R}, +)$ und $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ sind kommutative Gruppen.

Übung 2.5. Überlegen Sie sich (mit den bekannten Rechenregeln), warum die folgenden Mengen mit der angegebenen Verknüpfung keine Gruppen bilden: $(\mathbb{N}_0, +)$, $(\mathbb{Z}, -)$ und $(\mathbb{Z} \setminus \{0\}, \cdot)$.

In einer nicht-kommutativen Gruppen spielt die Reihenfolge der Elemente also eine Rolle, in kommutativen Gruppen dagegen nicht. Aus der Definition einer Gruppe gewinnt man sehr leicht einige elementare Eigenschaften:

Lemma 2.6 (elementare Eigenschaften in Gruppen). *Es seien $(G, *)$ eine Gruppe und $x, y \in G$ beliebige Elemente. Dann gelten die folgenden Aussagen:*

- (i) *Das neutrale Element $e \in G$ ist eindeutig.*
- (ii) *Das zu x inverse Element $x' \in G$ ist eindeutig.*
- (iii) *Es gelten $e' = e$ und $(x')' = x$.*
- (iv) *Die Gleichung $x * z = y$ bzw. $z * x = y$ besitzt die eindeutige Lösung $z = x' * y$ bzw. $z = y * x'$.*
- (v) *Das inverse Element von $x * y$ ist $y' * x'$.*

Beweis.

- (i) Wir nehmen an, dass ein Element $\tilde{e} \in G$ die Eigenschaften eines neutralen Elements hat, also $\tilde{e} * x = x = x * \tilde{e}$ für alle $x \in G$ erfüllt. Wenden wir diesen Zusammenhang nun für die Wahl $x = e$ an, so erhalten wir

$$e = \tilde{e} * e \stackrel{(G2)}{=} \tilde{e},$$

also die Eindeutigkeit des neutralen Elements.

- (ii) Wir nehmen an, dass ein Element $\tilde{x} \in G$ die Eigenschaften eines zu x inversen Elements hat, also $x * \tilde{x} = e = \tilde{x} * x$ erfüllt. Damit folgt

$$\tilde{x} \stackrel{(G2)}{=} \tilde{x} * e \stackrel{(G3)}{=} \tilde{x} * (x * x') \stackrel{(G1)}{=} (\tilde{x} * x) * x' = e * x' \stackrel{(G2)}{=} x',$$

also die Eindeutigkeit des inversen Elements.

- (iii) Diese Aussage ist klar wegen $e * e = e$ bzw. $x * x' = e = x' * x$ und der Eindeutigkeit des inversen Elements aus (ii).
- (iv) Wir beweisen die Aussage nur für die erste Gleichung, für die zweite Gleichung geht man analog vor. Dass $z = x' * y$ eine Lösung ist, sieht man durch Einsetzen

$$x * (x' * y) \stackrel{(G1)}{=} (x * x') * y \stackrel{(G3)}{=} e * y \stackrel{(G2)}{=} y.$$

Für den Beweis der Eindeutigkeit sei nun $z \in G$ eine Lösung von $x * z = y$. Dann folgt bereits die behauptete Darstellung

$$z \stackrel{(G2)}{=} e * z \stackrel{(G3)}{=} (x' * x) * z \stackrel{(G1)}{=} x' * (x * z) = x' * y.$$

- (v) Wir überlegen uns zunächst

$$(x * y) * (y' * x') \stackrel{(G1)}{=} x * (y * (y' * x')) \stackrel{(G1)}{=} x * ((y * y') * x') \stackrel{(G3)}{=} x * (e * x') \stackrel{(G2)}{=} x * x' \stackrel{(G3)}{=} e.$$

Da sich $(y' * x') * (x * y) = e$ analog ergibt, folgt die Behauptung aus der Eindeutigkeit des inversen Elements aus (ii). $\square$

Nun kommen wir zur Definition eines Körpers.

Definition 2.7 (Körper). *Ein Körper ist eine Menge $\mathbb{K}$, die versehen ist mit zwei (inneren) Verknüpfungen der*

Addition: $+: \mathbb{K} \times \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$,

Multiplikation: $\cdot: \mathbb{K} \times \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$,

so dass die folgenden Eigenschaften erfüllt sind:

- (i) $(\mathbb{K}, +)$ bildet eine kommutative Gruppe, wobei das neutrale Element mit 0 und das zu $x \in \mathbb{K}$ inverse Element mit $-x$ bezeichnet wird,
- (ii) $(\mathbb{K} \setminus \{0\}, \cdot)$ bildet eine kommutative Gruppe, wobei das neutrale Element mit 1 und das zu $x \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ inverse Element mit x^{-1} bezeichnet wird,
- (iii) Für das Zusammenspiel von Addition und Multiplikation gilt das Distributivgesetz

$$x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z) \quad \text{für alle } x, y, z \in \mathbb{K}.$$

Bemerkungen 2.8.

- (1) Bei den beiden Verknüpfungen der Addition und der Multiplikation muss es sich nicht um die auf den reellen Zahlen bekannten Verknüpfungen handeln. Wenn klar ist, um welche Verknüpfungen es sich handelt, so sprechen wir auch kurz von einem Körper $\mathbb{K}$ anstelle von $(\mathbb{K}, +, \cdot)$.
- (2) In einem Körper $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ verwendet man in der Regel die folgenden vereinfachten Schreibweisen:
 - Subtraktion: $x - y$ anstelle von $x + (-y)$,
 - Kurzschreibweise für die Multiplikation: xy anstelle von $x \cdot y$,
 - Division: $\frac{x}{y}$ anstelle von xy^{-1} ,
 - Punkt vor Strich: $xy + z$ anstelle von $(xy) + z$.

Die elementaren Eigenschaften von Gruppen aus Lemma 2.6 lassen sich direkt auf einen Körper übertragen, und für das Zusammenspiel zwischen Addition und Multiplikation lassen sich einige Eigenschaften direkt aus der Definition eines Körpers ableiten. Insgesamt erhalten wir die folgenden wichtigen (und allgemeingültigen) Eigenschaften eines Körpers, wobei wir für die Darstellung die oben eingeführte Notation verwenden.

Lemma 2.9 (elementare Eigenschaften in Körpern). *Es seien $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ ein Körper und $x, y, z \in \mathbb{K}$ beliebige Elemente. Dann gelten für die Addition und Multiplikation die folgenden Aussagen:*

- (i) Die neutralen Elemente 0 der Addition und 1 der Multiplikation sind eindeutig.
- (ii) Das zu x inverse Element $-x$ der Addition und das zu $x \neq 0$ inverse Element x^{-1} der Multiplikation ist eindeutig.
- (iii) Es gelten $-0 = 0$, $-(-x) = x$, $1^{-1} = 1$ und (für $x \neq 0$) $(x^{-1})^{-1} = x$.
- (iv) Die Gleichung $x + \tilde{z} = y$ besitzt die eindeutige Lösung $\tilde{z} = y - x$.
- (v) Das inverse Element der Addition von $x + y$ ist $-x - y$, und das (für $x, y \neq 0$) inverse Element der Multiplikation von $x \cdot y$ ist $x^{-1} \cdot y^{-1}$.
- (vi) Die Identität $x \cdot y = 0$ gilt genau dann, wenn $x = 0$ oder $y = 0$ gilt.
- (vii) Die Multiplikation ist auf $\mathbb{K}$ assoziativ, d.h. es gilt $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$.
- (viii) Die Multiplikation ist auf $\mathbb{K}$ kommutativ, d.h. es gilt $x \cdot y = y \cdot x$.
- (ix) Die Gleichung $x \cdot \tilde{z} = y$ besitzt (für $x \neq 0$) die eindeutige Lösung $\tilde{z} = \frac{y}{x}$.
- (x) Es gilt auch das zweite Distributivgesetz $(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$.
- (xi) Es gilt $(-x) \cdot y = -(x \cdot y) = x \cdot (-y)$.

Beweis. Die Aussagen (i)–(v) sind direkte Konsequenzen aus den Aussagen (i)–(v) aus Lemma 2.6, unter Ausnutzung der Tatsachen, dass $(\mathbb{K}, +)$ und $(\mathbb{K} \setminus \{0\}, \cdot)$ in einem Körper jeweils eine kommutative Gruppen bilden. Nur die restlichen Aussagen müssen noch bewiesen werden.

- (vi) Wir zeigen zuerst die Implikation, dass $x \cdot y = 0$ für $x = 0$ oder $y = 0$ gilt. Dafür überlegen wir uns mithilfe des Distributivgesetzes zunächst

$$x \cdot 0 \stackrel{(G2,+)}{=} x \cdot (0 + 0) = x \cdot 0 + x \cdot 0$$

und folgern aus (iv) dann $x \cdot 0 = x \cdot 0 - x \cdot 0 = 0$. Der Beweis von $0 \cdot y = 0$ ergibt sich vollkommen analog. Nun zeigen wir die andere Implikation, dass $x \cdot y = 0$ nur für $x = 0$ oder $y = 0$ möglich ist. Es sei also $x \cdot y = 0$. Im Fall $x = 0$ ist die Behauptung wahr, und wir brauchen daher nur den Fall $x \neq 0$ zu betrachten. Hier sehen wir

$$y \stackrel{(G2,\cdot)}{=} 1 \cdot y \stackrel{(G3,\cdot)}{=} (x^{-1} \cdot x) \cdot y \stackrel{(G1,\cdot)}{=} x^{-1} \cdot (x \cdot y) = x^{-1} \cdot 0 = 0,$$

wobei wir in der letzten Gleichheit die zuvor bewiesene Identität $x \cdot 0 = 0$ für alle $x \in \mathbb{K}$ verwendet haben.

- (vii) Dass die Multiplikation auf $\mathbb{K} \setminus \{0\}$ assoziativ ist, gilt nach Definition eines Körpers. Ist (mindestens) eines der Elemente $x, y, z \in \mathbb{K}$ gleich 0, so gilt $(x \cdot y) \cdot z = 0 = x \cdot (y \cdot z)$ wegen (vi). Damit ist die Multiplikation auf ganz $\mathbb{K}$ assoziativ.
- (viii) Dass die Multiplikation auf $\mathbb{K} \setminus \{0\}$ kommutativ ist, gilt nach Definition eines Körpers. Ist (mindestens) eines der Elemente $x, y \in \mathbb{K}$ gleich 0, so gilt $x \cdot y = 0 = y \cdot x$ wegen (vi). Damit ist die Multiplikation auf ganz $\mathbb{K}$ kommutativ.
- (ix) Für $y \neq 0$ ergibt sich die Aussage als Konsequenz von Lemma 2.6 (iv), da $(\mathbb{K} \setminus \{0\}, \cdot)$ eine kommutative Gruppe bildet, und für $y = 0$ folgt die Aussage sofort aus (vi).
- (x) Dies folgt direkt aus dem Distributivgesetz aus der Definition des Körpers und der Kommutativität der Multiplikation auf $\mathbb{K}$ aus (viii)

$$(x + y) \cdot z \stackrel{(viii)}{=} z \cdot (x + y) = z \cdot x + z \cdot y \stackrel{(viii)}{=} x \cdot z + y \cdot z.$$

- (xi) Mithilfe des Distributivgesetzes aus (x) sehen wir

$$(-x) \cdot y + x \cdot y \stackrel{(x)}{=} (-x + x) \cdot y \stackrel{(G3,+)}{=} 0 \cdot y \stackrel{(vi)}{=} 0,$$

und damit folgt $(-x) \cdot y = -(x \cdot y)$ wegen der Eindeutigkeit des inversen Elements der Addition aus (ii). Vertauscht man die Rollen von x und y und nutzt die Kommutativität der Multiplikation aus (viii), so folgt auch $x \cdot (-y) = -(x \cdot y)$ und damit die Behauptung. $\square$

Bemerkung 2.10. Mit Lemma 2.9 haben wir nun insbesondere gezeigt, dass der Körper $\mathbb{K}$ (und nicht nur die Gruppe $\mathbb{K} \setminus \{0\}$) unter der Verknüpfung der Multiplikation assoziativ und kommutativ ist sowie dass $x \cdot 1 = x$ für alle $x \in \mathbb{K}$ gilt. Dies wird in der Literatur häufig bereits in der Definition eines Körpers gefordert, ist für uns aber eine Folgerung aus der Definition eines Körpers. In jedem Fall dürfen diese Eigenschaften eines Körpers sowie auch die anderen Rechenregeln aus Lemma 2.9 in Zukunft immer verwendet werden.

Beispiele 2.11.

- Der kleinste Körper ist $\mathbb{F}_2 := \{0, 1\}$, versehen mit einer Addition und einer Multiplikation, die über die Verknüpfungstabellen

+	0	1
0	0	1
1	1	0

und

·	0	1
0	0	0
1	0	1

gegeben sind. Die Körpereigenschaften lassen sich einfach verifizieren (und man kann sich auch

überlegen, dass eine andere Definition der Verknüpfungen, so dass alle Eigenschaften eines Körpers erfüllt sind, nicht möglich ist).

- $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ sind Körper (versehen mit der bekannten Addition und Multiplikation).

★ **Übung 2.12.** Überlegen Sie sich, ob es einen Körper mit genau drei Elementen gibt, und geben Sie gegebenenfalls die Verknüpfungstafeln der Addition und Multiplikation an.

Bemerkungen 2.13 (endliche Summe und Produkte).

- (1) *Durch wiederholte Anwendung des Assoziativgesetzes (mit vollständiger Induktion) erhalten wir, dass endliche Summen und Produkte*

$$\sum_{k=n_0}^n x_k \quad \text{und} \quad \prod_{k=n_0}^n x_k$$

von Elementen x_k eines Körpers $\mathbb{K}$ mit $n_0 \leq k \leq n$ und $n_0, n \in \mathbb{Z}$ wohldefiniert sind (vgl. Definition 1.77 für die Notation). Man beachte, dass der Körper $\mathbb{K}$, aus dem die summierten Elemente stammen, ein anderes neutrales Element der Addition besitzen kann als die Gruppe $(\mathbb{Z}, +)$, durch die die Elemente indiziert sind. Üblicherweise ist aus dem Kontext klar, welches neutrale Element gemeint ist, zur Präzisierung kann man die neutralen Elemente $0_{\mathbb{K}} \in \mathbb{K}$ und $0_{\mathbb{Z}} \in \mathbb{Z}$ jedoch mit einem Index kennzeichnen.

- (2) *Wiederholte Anwendung des Kommutativgesetzes zeigt, dass die Reihenfolge der Elemente in einer endlichen Summe oder einem endlichen Produkt keine Rolle spielt. Speziell für Doppelsummen über Elemente $x_{jk} \in \mathbb{K}$ mit $m_0 \leq j \leq m$, $n_0 \leq k \leq n$ und $m_0, m, n_0, n \in \mathbb{Z}$ gilt*

$$\begin{aligned} \sum_{j=m_0}^m \sum_{k=n_0}^n x_{jk} &= \sum_{k=n_0}^n x_{m_0 k} + \dots + \sum_{k=n_0}^n x_{mk} \\ &= \sum_{j=m_0}^m x_{jn_0} + \dots + \sum_{j=m_0}^m x_{jn} = \sum_{k=n_0}^n \sum_{j=m_0}^m x_{jk}. \end{aligned}$$

- (3) *Wiederholte Anwendung der beiden Distributivgesetze zeigt, dass man das Produkt von Summen auch als Summe von Produkten schreiben kann. Für Elemente $x_j, y_k \in \mathbb{K}$ mit $m_0 \leq j \leq m$, $n_0 \leq k \leq n$ und $m_0, m, n_0, n \in \mathbb{Z}$ gilt*

$$\begin{aligned} \left(\sum_{j=m_0}^m x_j \right) \cdot \left(\sum_{k=n_0}^n y_k \right) &= x_{m_0} \cdot \left(\sum_{k=n_0}^n y_k \right) + \dots + x_m \cdot \left(\sum_{k=n_0}^n y_k \right) \\ &= \sum_{k=n_0}^n x_{m_0} \cdot y_k + \dots + \sum_{k=n_0}^n x_m \cdot y_k = \sum_{j=m_0}^m \sum_{k=n_0}^n x_j \cdot y_k. \end{aligned}$$

★ **Übung 2.14** (Potenzregeln). In einem Körper $\mathbb{K}$ können wir Potenzen von Elementen $x \in \mathbb{K}$ analog zu Definition 1.82 einführen, d.h. für $x \in \mathbb{K}$ und $n \in \mathbb{N}_0$ setzen wir $x^0 := 1$, $x^{n+1} := x^n \cdot x$ und, falls $x \neq 0$, $x^{-n} := (x^{-1})^n$. Zeigen Sie für Exponenten $\ell, m \in \mathbb{Z}$ und Elemente $x, y \in \mathbb{K}$ (mit $x, y \neq 0$, falls ein Exponent negativ ist) die folgenden Potenzregeln:

- (i) $x^\ell \cdot x^m = x^{\ell+m}$,
- (ii) $(x^\ell)^m = x^{\ell \cdot m}$,
- (iii) $x^m \cdot y^m = (x \cdot y)^m$.

2.2 Das Anordnungsaxiom

Wir führen nun den Begriff eines geordneten Körpers ein, auf dem wir Elemente der Größe nach vergleichen und mit Ungleichungen rechnen können. Dies basiert tatsächlich nur auf der Existenz einer ausgezeichneten Menge (von “positiven” Elemente), die im folgenden Sinn kompatibel mit den Verknüpfungen der Addition und der Multiplikation ist.

Definition 2.15 (geordneter Körper). *Ein Körper $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ erfüllt das Anordnungsaxiom und heißt dann geordneter Körper, falls es eine Menge $\mathbb{K}^+ \subset \mathbb{K}$ mit den folgenden Eigenschaften gibt:*

(O1) Trichotomie: für jedes Element $x \in \mathbb{K}$ gilt genau eine der Aussagen

$$x \in \mathbb{K}^+ \quad \text{oder} \quad x = 0 \quad \text{oder} \quad -x \in \mathbb{K}^+,$$

(O2) Abgeschlossenheit unter Addition: für $x, y \in \mathbb{K}^+$ gilt auch $x + y \in \mathbb{K}^+$,

(O3) Abgeschlossenheit unter Multiplikation: für $x, y \in \mathbb{K}^+$ gilt auch $x \cdot y \in \mathbb{K}^+$.

Gilt $x \in \mathbb{K}^+$ bzw. $x \in \mathbb{K}^+ \cup \{0\}$, so nennen wir x positiv bzw. nicht-negativ und schreiben auch $x > 0$ (“ x ist größer als 0”) bzw. $x \geq 0$ (“ x ist größer oder gleich 0”). Gilt $-x \in \mathbb{K}^+$ bzw. $-x \in \mathbb{K}^+ \cup \{0\}$, so nennen wir x negativ bzw. nicht-positiv und schreiben auch $x < 0$ (“ x ist kleiner als 0”) bzw. $x \leq 0$ (“ x ist kleiner oder gleich 0”). Allgemeiner setzen wir für $x, y \in \mathbb{K}$:

$$\begin{aligned} x > y & :\Leftrightarrow x - y > 0 & (\text{“}x \text{ ist größer als } y\text{”}), \\ x \geq y & :\Leftrightarrow x - y > 0 \vee x = y & (\text{“}x \text{ ist größer oder gleich } y\text{”}), \\ x < y & :\Leftrightarrow y > x & (\text{“}x \text{ ist kleiner als } y\text{”}), \\ x \leq y & :\Leftrightarrow y \geq x & (\text{“}x \text{ ist kleiner oder gleich } y\text{”}). \end{aligned}$$

Beispiele 2.16.

- Der Restzahlkörper $\mathbb{F}_2 := \{0, 1\}$ aus Beispiel 2.11 ist kein geordneter Körper (beachte $1 + 1 = 0$).
- $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ sind geordnete Körper (mit $\mathbb{Q}^+$ und $\mathbb{R}^+$ den positiven rationalen bzw. reellen Zahlen im bekannten Sinn).

Aus der Definition eines geordneten Körpers kann man nun insbesondere schon die folgenden allgemeinen Rechenregeln ableiten.

Lemma 2.17 (Rechenregeln in geordneten Körpern). *Es seien $\mathbb{K}$ ein geordneter Körper und $x, \tilde{x}, y, \tilde{y}, z \in \mathbb{K}$ beliebige Elemente. Dann gelten die folgenden Aussagen:*

(i) *Es gilt genau eine der Aussagen*

$$x > y \quad \text{oder} \quad x = y \quad \text{oder} \quad x < y.$$

(ii) *Es gelten die Implikationen*

$$\begin{aligned} x > y \wedge \tilde{x} \geq \tilde{y} & \Rightarrow x + \tilde{x} > y + \tilde{y}, \\ x \geq y \wedge \tilde{x} \geq \tilde{y} & \Rightarrow x + \tilde{x} \geq y + \tilde{y}. \end{aligned}$$

Insbesondere folgt daraus für die Größer-Beziehung die Transitivität, d.h. die Implikation

$$x > y \wedge y > z \Rightarrow x > z,$$

und die Translationsinvarianz, d.h. die Implikation

$$x > y \Rightarrow x + z > y + z.$$

Ebenso folgt auch für die Größer-gleich-Beziehung die Transitivität und die Translationsinvarianz.

(iii) Unter Spiegelung kehrt sich die Größer-Beziehung um, d.h. es gilt

$$x > y \Leftrightarrow -y > -x.$$

(iv) Es gelten die Implikationen

$$\begin{aligned} x > y \wedge z > 0 &\Rightarrow x \cdot z > y \cdot z, \\ x \geq y \wedge z > 0 &\Rightarrow x \cdot z \geq y \cdot z, \\ x > y \wedge z < 0 &\Rightarrow x \cdot z < y \cdot z, \\ x \geq y \wedge z < 0 &\Rightarrow x \cdot z \leq y \cdot z. \end{aligned}$$

(v) Es gelten

$$\begin{aligned} (x > 0 \wedge y > 0) \vee (x < 0 \wedge y < 0) &\Leftrightarrow x \cdot y > 0, \\ (x \geq 0 \wedge y \geq 0) \vee (x \leq 0 \wedge y \leq 0) &\Rightarrow x \cdot y \geq 0. \end{aligned}$$

(vi) Für alle $x \neq 0$ gilt $x^2 > 0$ (und damit insbesondere $1 > 0$).

(vii) Für $x \neq 0$ gilt die Äquivalenz

$$x > 0 \Leftrightarrow x^{-1} > 0.$$

(viii) Es gilt die Implikation

$$x > y \wedge y > 0 \Rightarrow y^{-1} > x^{-1}.$$

Beweis. Die einzelnen Aussagen lassen sich direkt anhand der Definition eines geordneten Körpers sowie mithilfe der Rechenregeln aus Lemma 2.9 beweisen.

(i) Dies folgt direkt aus der Trichotomie (O1), da für $x - y \in \mathbb{K}$ genau eine der Aussagen $x - y > 0$, $x - y = 0$ oder $x - y < 0$ gilt.

(ii) Wir überlegen uns zunächst

$$\begin{aligned} x > y \wedge \tilde{x} \geq \tilde{y} &\Rightarrow x - y > 0 \wedge (\tilde{x} - \tilde{y} > 0 \vee \tilde{x} - \tilde{y} = 0) \\ &\Rightarrow (x - y > 0 \wedge \tilde{x} - \tilde{y} > 0) \vee (x - y > 0 \wedge \tilde{x} - \tilde{y} = 0) \\ &\stackrel{(O2)}{\Rightarrow} x - y + \tilde{x} - \tilde{y} > 0 \\ &\Rightarrow x + \tilde{x} - (y + \tilde{y}) > 0 \Rightarrow x + \tilde{x} > y + \tilde{y} \end{aligned}$$

und demzufolge auch

$$\begin{aligned} x \geq y \wedge \tilde{x} \geq \tilde{y} &\Rightarrow (x - y > 0 \vee x - y = 0) \wedge (\tilde{x} - \tilde{y} > 0 \vee \tilde{x} - \tilde{y} = 0) \\ &\Rightarrow (x - y + \tilde{x} - \tilde{y} > 0) \vee (x - y = 0 \wedge \tilde{x} - \tilde{y} = 0) \\ &\Rightarrow (x - y + \tilde{x} - \tilde{y} > 0) \vee (x - y + \tilde{x} - \tilde{y} = 0) \\ &\Rightarrow x + \tilde{x} - (y + \tilde{y}) \geq 0 \Rightarrow x + \tilde{x} \geq y + \tilde{y}. \end{aligned}$$

Aus der ersten Implikation folgt für die Größer-Beziehung dann die Transitivität mit den Wahlen $\tilde{x} = y$ und $\tilde{y} = z$ über

$$\begin{aligned} x > y \wedge y > z &\Rightarrow x + y > y + z \\ &\Rightarrow x + y - (y + z) > 0 \\ &\Rightarrow x - z > 0 \Rightarrow x > z, \end{aligned}$$

und die Translationsinvarianz mit den Wahlen $\tilde{x} = z$ und $\tilde{y} = z$. Vollkommen analog erhält man die Transitivität und die Translationsinvarianz für die Größer-gleich-Beziehung.

(iii) Das Verhalten unter Spiegelung sehen wir wegen $-(-x) = x$ über

$$\begin{aligned} x > y &\Leftrightarrow x - y > 0 \Leftrightarrow -(-x) - y > 0 \\ &\Leftrightarrow -y - (-x) > 0 \Leftrightarrow -y > -x. \end{aligned}$$

(iv) Ähnlich wie für die Addition in (ii) sehen wir hier zunächst

$$\begin{aligned} x > y \wedge z > 0 &\Rightarrow x - y > 0 \wedge z > 0 \\ &\stackrel{(O3)}{\Rightarrow} (x - y) \cdot z > 0 \\ &\Rightarrow x \cdot z - y \cdot z > 0 \Rightarrow x \cdot z > y \cdot z \end{aligned}$$

und demzufolge unter Berücksichtigung des Falles $x = y$ auch die zweite Implikation. Nun folgt die dritte Implikation mithilfe von (iii) aus

$$\begin{aligned} x > y \wedge z < 0 &\Rightarrow x > y \wedge -z > 0 \\ &\Rightarrow x \cdot (-z) > y \cdot (-z) \\ &\Rightarrow -(x \cdot z) > -(y \cdot z) \Rightarrow x \cdot z < y \cdot z, \end{aligned}$$

und die letzte Implikation wieder unter Berücksichtigung des Falles $x = y$.

(v) Die Implikationen

$$\begin{aligned} (x > 0 \wedge y > 0) \vee (x < 0 \wedge y < 0) &\Rightarrow x \cdot y > 0, \\ (x \geq 0 \wedge y \geq 0) \vee (x \leq 0 \wedge y \leq 0) &\Rightarrow x \cdot y \geq 0. \end{aligned}$$

sieht man direkt aus der ersten und dritten bzw. der zweiten und vierten Implikation aus (iv). Die noch fehlende Implikation

$$x \cdot y > 0 \Rightarrow (x > 0 \wedge y > 0) \vee (x < 0 \wedge y < 0)$$

beweisen wir über Kontraposition über die äquivalente Aussage (unter Verwendung der Regeln von De Morgan aus Proposition 1.8)

$$(x \geq 0 \wedge y \leq 0) \vee (x \leq 0 \wedge y \geq 0) \Rightarrow x \cdot y \leq 0,$$

die sofort aus der zweiten Implikation aus (iv) folgt.

(vi) Dass $x^2 > 0$ gilt, folgt aus (v) mit der Wahl $y = x$. Damit erhalten wir dann wegen $1^2 = 1$ auch $1 > 0$.

(vii) Unter Verwendung von (v) und (vi) sowie mit $x \cdot x^{-1} = 1$ schließen wir die Äquivalenz aus den beiden Implikationen

$$x > 0 \Rightarrow x \cdot (x^{-1})^2 > 0 \Rightarrow x^{-1} > 0$$

und

$$x^{-1} > 0 \Rightarrow x^{-1} \cdot x^2 > 0 \Rightarrow x > 0.$$

(viii) Für $x > y$ und $y > 0$ schließen wir aus der Transitivität der Größerbeziehung aus (ii) über (v) zunächst auf $x \cdot y > 0$ und mit (vii) dann auf

$$(x \cdot y)^{-1} > 0 \Leftrightarrow y^{-1} \cdot x^{-1} > 0.$$

Wenden wir erneut (v) an, so folgt die Behauptung

$$x \cdot y^{-1} \cdot x^{-1} > y \cdot y^{-1} \cdot x^{-1} \Leftrightarrow y^{-1} > x^{-1}. \quad \square$$

Bemerkung 2.18. Wegen der Transitivität der Gleichheit und jeder Ungleichung sind auch Ungleichungen sinnvoll definiert, die mehrere Vergleichsoperationen der gleichen Ordnungsrichtung enthalten. So bedeutet etwa die Schreibweise $x < y \leq z$, dass die beiden Ungleichungen $x < y$ und $y \leq z$ gelten.

Übung 2.19 (Bernoulli-Ungleichung). Es sei K ein geordneter Körper. Zeigen Sie für jedes Element $x \in K$ mit $x \geq -1$ und jede Zahl $n \in \mathbb{N}_0$ die Bernoulli-Ungleichung

$$(1+x)^n \geq 1+nx.$$

Die Größer-gleich-Beziehung auf einem geordneten Körper kann man als eine Relation sehen, die je zwei Elemente des Körpers miteinander in Bezug setzt. Wie wir nun zeigen werden, stellt diese Größer-gleich-Beziehung sogar eine sogenannte Ordnung auf dem Körper im folgenden Sinn dar:

Definition 2.20 (Relation, Halbordnung, Ordnung, Äquivalenzrelation). Es seien M und N zwei Mengen.

- (i) Eine Relation zwischen den Mengen M und N ist eine Teilmenge $R \subset M \times N$. Für $(x, y) \in R$ sagen wir, dass x in Relation zu y steht, und schreiben auch xRy .
- (ii) Ist R eine Relation auf M , d.h. $R \subset M \times M$, so nennen wir sie
 - reflexiv, falls $(x, x) \in R$ für alle $x \in M$ gilt,
 - symmetrisch, falls für alle $x, y \in M$ mit $(x, y) \in R$ auch $(y, x) \in R$ gilt,
 - antisymmetrisch, falls für alle $x, y \in M$ mit $(x, y) \in R$ und $(y, x) \in R$ schon $x = y$ gilt,
 - transitiv, falls für alle $x, y, z \in M$ mit $(x, y) \in R$ und $(y, z) \in R$ auch $(x, z) \in R$ gilt,
 - irreflexiv, falls $(x, x) \notin R$ für alle $x \in M$ gilt,
 - konnex, falls für alle $x, y \in M$ mit $x \neq y$ $(x, y) \in R$ oder $(y, x) \in R$ gilt,
 - total, falls für alle $x, y \in M$ $(x, y) \in R$ oder $(y, x) \in R$ gilt.
- (iii) Eine Relation auf M heißt
 - eine Halbordnung, falls sie reflexiv, antisymmetrisch und transitiv ist,
 - eine Ordnung (oder totale Ordnung), falls sie eine Halbordnung und zusätzlich total ist,
 - eine Äquivalenzrelation, falls sie reflexiv, symmetrisch und transitiv ist.

Beispiele 2.21.

- (i) Es sei M die Menge aller Menschen und $\otimes$ die Heiratsrelation, d.h. für $x, y \in M$ gilt $x \otimes y$ genau dann, wenn x mit y verheiratet ist. Die Heiratsrelation ist symmetrisch und irreflexiv (niemand ist mit sich selbst verheiratet), aber nicht transitiv und nicht konnex (also auch nicht total).
- (ii) Es sei M wieder die Menge aller Menschen und wir betrachten nun die Relation “ist Geschwister von” (wobei wir darunter auch Halbgeschwister verstehen wollen). Diese Relation ist symmetrisch, aber nicht antisymmetrisch, nicht reflexiv, nicht transitiv und nicht konnex.
- (iii) Wir definieren die Teilbarkeitsrelation $|$ auf der Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen über

$$x | y \quad :\Leftrightarrow \quad x \text{ teilt } y$$

für $x, y \in \mathbb{N}$. Die Teilbarkeitsrelation ist eine Halbordnung, aber keine Ordnung (z.B. gilt weder $4 | 7$ noch $7 | 4$).

- (iv) Ist M eine beliebige Menge, so ist die Gleichheitsrelation $=$ eine Äquivalenzrelation.

Bemerkung 2.22. Eine Relation auf einer endlichen Menge M kann man durch einen gerichteten Graphen veranschaulichen, der als Knoten gerade alle Elemente aus M enthält und die (gerichteten)

Kanten über R gegeben sind. Ist die Relation symmetrisch, so können im Graph anstelle von Pfeilen auch nur die Verbindungslinien eingezeichnet werden.

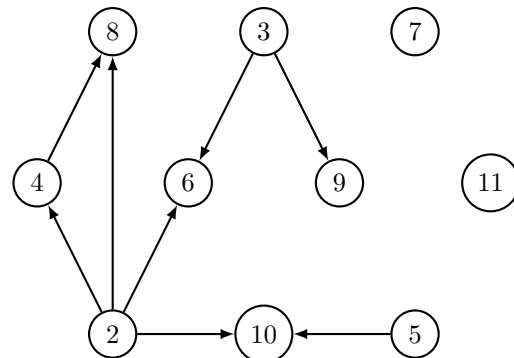
Betrachten wir beispielsweise die Relation der echten Teilbarkeit

$$xRy \quad :\Leftrightarrow \quad x < y \text{ und } x \text{ teilt } y$$

auf der Menge $M = \{2, 3, \dots, 11\}$, so ist gilt offensichtlich

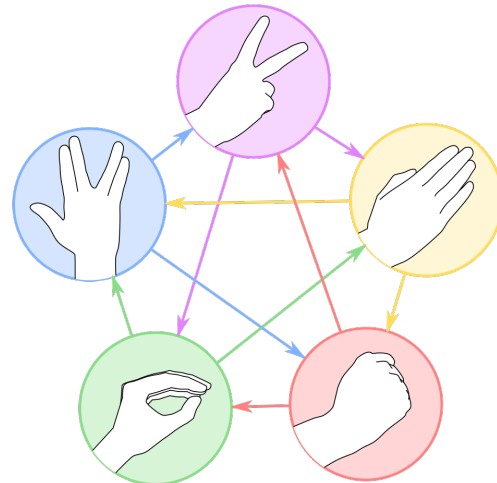
$$R = \{(2, 4), (2, 6), (2, 8), (2, 10), (3, 6), (3, 9), (4, 8), (5, 10)\},$$

und diese Relation lässt sich etwa durch den Graphen rechts veranschaulichen.



Übung 2.23 (Stein – Papier – Schere – Echse – Spock). Zwei Spieler zeigen mit der Hand gleichzeitig je eine Geste, der die Bedeutung Stein, Papier, Schere, Echse oder Spock zugeordnet wird und die nach den folgenden Regeln schlägt:

Stein schleift Schere,
 Stein zerquetscht Echse,
 Papier bedeckt Stein,
 Papier widerlegt Spock,
 Schere schneidet Papier,
 Schere köpft Echse,
 Echse vergiftet Spock,
 Echse frisst Papier,
 Spock zertrümmert Schere,
 Spock verdampft Stein.



Überlegen Sie sich, welche Eigenschaften die Schlagen-Relation hat.

Übung 2.24.

- (i) Finden Sie den Fehler im folgenden “Beweis” der (falschen) Aussage, dass jede symmetrische und transitive Relation R auf einer nicht-leeren Menge M auch reflexiv ist.

Es sei $x \in M$ beliebig. Wir wählen ein Element $y \in M$ mit $(x, y) \in R$. Aus der Symmetrie von R folgt dann $(y, x) \in R$. Wegen der Transitivität von R folgt aus $(x, y) \in R$ und $(y, x) \in R$ nun $(x, x) \in R$, was wegen der Beliebigkeit von $x \in M$ die Reflexivität von R beweist.

- (ii) Finden Sie eine nicht-leere Menge M und eine symmetrisch, transitive Relation auf M , die nicht reflexiv ist.

Satz 2.25. Ist $\mathbb{K}$ ein geordneter Körper, so ist die Relation $\geq$ (bzw. $\leq$) eine Ordnung auf $\mathbb{K}$.

Beweis. Wir weisen der Reihe nach die Eigenschaften einer Ordnung nach.

- *Reflexivität:* Nach Definition der $\geq$ -Beziehung gilt $x \geq x$ für alle $x \in \mathbb{K}$.
- *Antisymmetrie:* Falls für $x, y \in \mathbb{K}$ die beiden Ungleichungen $x \geq y$ und $y \geq x$ gelten, so haben wir nach Definition der $\geq$ -Beziehung

$$(x > y \vee x = y) \wedge (y > x \vee y = x).$$

Da wegen der Trichotomie in Lemma 2.17 (i) nur eine der Aussagen $x > y$, $x = y$ oder $y > x$ gelten kann, folgt $x = y$.

- *Transitivität:* Dies wurde bereits in Lemma 2.17 (ii) gezeigt.
- *Totalität:* Nach Lemma 2.17 (i) gilt für alle $x \neq y \in \mathbb{K}$ entweder $x > y$ oder $y > x$, also gilt $x \geq y$ oder $y \geq x$ für alle $x, y \in \mathbb{K}$. $\square$

Mithilfe der Ordnung kann man für einen geordneten Körper nun einige neue Konzepte einführen: für Mengen definieren wir im Folgenden die Begriffe eines Supremums, Infimums, Maximums und Minimums, für Elemente definieren wir dann das Vorzeichen und den Absolutbetrag, und schließlich betrachten wir Intervalle als spezielle Teilmengen. Außerdem zeigen wir, dass jeder geordnete Körper die Menge der natürlichen Zahlen (bzw. ein Modell dieser Menge im Sinne von Definition 1.71) als Teilmenge enthält.

Obere und untere Schranken von Mengen. Wir betrachten in diesem Abschnitt nun Teilmengen eines geordneten Körpers $\mathbb{K}$ und das Konzept von (kleinsten) oberen und (größten) unteren Schranken für die Teilmenge.

Definition 2.26 (Schranke, Supremum, Infimum, Maximum, Minimum). *Es seien $\mathbb{K}$ ein geordneter Körper und $M \subset \mathbb{K}$ eine nicht-leere Teilmenge.*

- (i) *Eine Element $a \in \mathbb{K}$ heißt obere bzw. untere Schranke von M , falls*

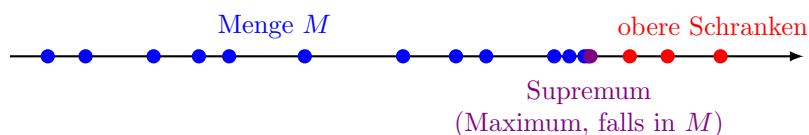
$$x \leq a \quad \text{bzw.} \quad x \geq a \quad \text{für alle } x \in M$$

gilt. In diesem Fall sagen wir, dass M nach oben bzw. nach unten beschränkt ist. Falls M sowohl nach oben als auch nach unten beschränkt ist, so nennen wir M eine beschränkte Menge.

- (ii) *Ein Element $a \in \mathbb{K}$ heißt kleinste obere Schranke oder Supremum von M , falls a eine obere Schranke ist und für jede andere obere Schranke $\tilde{a}$ von M die Ungleichung $a \leq \tilde{a}$ gilt. In diesem Fall schreiben wir $a = \sup M$.*

Entsprechend heißt $a \in \mathbb{K}$ größte untere Schranke oder Infimum von M , falls a eine untere Schranke ist und für jede andere untere Schranke $\tilde{a}$ von M die Ungleichung $a \geq \tilde{a}$ gilt. In diesem Fall schreiben wir $a = \inf M$.

- (iii) *Ein Element $a \in \mathbb{K}$ heißt Maximum bzw. Minimum von M , falls $a \in M$ gilt und a ein Supremum bzw. Infimum von M ist. In diesem Fall schreiben wir $a = \max M$ bzw. $a = \min M$.*



Bemerkungen 2.27.

- (1) *Nach Definition ist jedes Maximum (bzw. Minimum) einer Menge M auch ein Supremum (bzw. Infimum) von M . Die Umkehrung gilt im Allgemeinen nicht, da ein Maximum (bzw. Minimum) immer in M enthalten sein muss, das Supremum (bzw. Infimum) von M jedoch nicht.*
- (2) *Mit vollständiger Induktion kann man sich einfach überlegen, dass jede Menge mit nur endlich vielen Elementen ein Maximum und ein Minimum besitzt. Speziell für den Fall $M := \{x, y\}$ mit $x, y \in \mathbb{K}$ ergibt sich als Maximum und Minimum*

$$\max\{x, y\} = \begin{cases} x & \text{für } x \geq y, \\ y & \text{für } x < y, \end{cases} \quad \text{und} \quad \min\{x, y\} = \begin{cases} y & \text{für } x \geq y, \\ x & \text{für } x < y. \end{cases}$$

- (3) *Nicht jede beschränkte Menge in einem geordneten Körper besitzt ein Supremum (bzw. Infimum) oder gar Maximum (bzw. Minimum). Beispielsweise ist die Menge*

$$M := \{x \in \mathbb{Q} : x^2 \leq 2\}$$

im geordneten Körper $\mathbb{Q}$ nach oben und unten beschränkt, besitzt aber kein Supremum oder Infimum (denn nach Satz 1.19 gilt $\pm\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ und, wie wir später sehen werden, vgl. Bemerkung 2.58, gibt es zu jeder Zahl $a > \sqrt{2}$ eine rationale Zahl $q \in \mathbb{Q}$ mit $\sqrt{2} < q < a$).

Über ein Spiegelungsprinzip kann man Aussagen über obere Schranken und Suprema von Mengen in Aussagen über untere Schranken und Infima (und umgekehrt) überführen. Dies wird gerade dadurch erreicht, dass man von einer Teilmenge $M \subset \mathbb{K}$ auf die (gespiegelte) Teilmenge

$$-M := \{x \in \mathbb{K} : -x \in M\} \subset \mathbb{K}$$

übergeht, wie das folgende Lemma zeigt.

Lemma 2.28. *Es seien $\mathbb{K}$ ein geordneter Körper und $M \subset \mathbb{K}$ eine nicht-leere Teilmenge.*

- (i) *Ein Element $a \in \mathbb{K}$ ist genau dann eine obere Schranke von M , wenn $-a$ eine untere Schranke von $-M$ ist.*
- (ii) *Ein Element $a \in \mathbb{K}$ ist genau dann ein Supremum von M , wenn $-a$ ein Infimum von $-M$ ist.*
- (iii) *Ein Element $a \in \mathbb{K}$ ist genau dann ein Maximum von M , wenn $-a$ ein Minimum von $-M$ ist.*

Beweis.

- (i) Dies folgt aus der Definition einer oberen und unteren Schranke mithilfe von Lemma 2.17 (iii) über die Äquivalenzen

$$\begin{aligned} a \text{ ist obere Schranke von } M &\Leftrightarrow \forall x \in M : x \leq a \\ &\Leftrightarrow \forall x \in M : -x \geq -a \\ &\Leftrightarrow \forall y \in -M : y \geq -a \\ &\Leftrightarrow -a \text{ ist untere Schranke von } -M. \end{aligned}$$

- (ii) Mit der Definition eines Supremums und Infimums, der Aussage (i) und wiederum Lemma 2.17 (iii) sehen wir

$$\begin{aligned} a = \sup M &\Leftrightarrow a \text{ ist obere Schranke von } M \text{ mit } a \leq \tilde{a} \text{ für jede obere Schranke } \tilde{a} \text{ von } M \\ &\Leftrightarrow a \text{ ist obere Schranke von } M \text{ mit } -a \geq -\tilde{a} \text{ für jede obere Schranke } \tilde{a} \text{ von } M \\ &\Leftrightarrow -a \text{ ist untere Schranke von } -M \text{ mit } -a \geq \tilde{b} \text{ für jede untere Schranke } \tilde{b} \text{ von } -M \\ &\Leftrightarrow -a = \inf(-M). \end{aligned}$$

- (iii) Mit der Definition des Maximums und Minimums sowie der Aussage (ii) erhalten wir schließlich

$$\begin{aligned} a = \max M &\Leftrightarrow a = \sup M \wedge a \in M \\ &\Leftrightarrow -a = \inf(-M) \wedge -a \in -M \\ &\Leftrightarrow -a = \min(-M). \end{aligned}$$

□

Lemma 2.29 (Eindeutigkeit von Supremum und Infimum). *Es seien $\mathbb{K}$ ein geordneter Körper und $M \subset \mathbb{K}$ eine nicht-leere Teilmenge. Falls das Supremum (bzw. Infimum) von M existiert, so ist es eindeutig.*

Beweis. Aufgrund von Lemma 2.28 ist es ausreichend, die Aussage für das Supremum zu zeigen. Es seien a_1 und a_2 zwei Suprema von M . Da a_1 und a_2 nach Definition eines Supremums auch obere Schranken von M sind, erhalten wir aus den Supremumseigenschaften (mit der Wahl $\tilde{a} = a_2$ bzw. $\tilde{a} = a_1$) die Ungleichungen

$$a_1 \leq a_2 \quad \text{und} \quad a_2 \leq a_1.$$

Aus der Antisymmetrie der Kleiner-gleich-Beziehung folgt nun $a_1 = a_2$ und damit die Eindeutigkeit des Supremums von M (falls existent). $\square$

Übung 2.30. Es seien $\mathbb{K}$ ein geordneter Körper und $M, N \subset \mathbb{K}$ zwei nicht-leere Teilmengen mit $M \subset N$. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

- (i) Jede obere (bzw. untere) Schranke von N ist auch eine obere (bzw. untere) Schranke von M .
- (ii) Haben sowohl N als auch M ein Supremum (bzw. Infimum), so gilt die Ungleichung

$$\sup M \leq \sup N \quad (\text{bzw.} \quad \inf M \geq \inf N).$$

Übung 2.31. Überlegen Sie sich, was das Supremum bzw. Infimum der folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}$ ist (falls existent), und in welchen Fällen sogar ein Maximum bzw. Infimum vorliegt:

- (i) $\{\frac{n-1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$,
- (ii) $\{2^{-m} + n^{-1} : m, n \in \mathbb{N}\}$,
- (iii) $\{2^{(-2)^n} : n \in \mathbb{N}\}$,
- (iv) $\mathbb{Q} \cap [\sqrt{4}, \sqrt{5}]$,
- (v) $\{x + \frac{1}{x} : x \in (\frac{1}{2}, 2]\}$.

Vorzeichen und Betrag. Da jedes Element eines angeordneten Körpers gemäß der Trichotomie (O1) entweder positiv, das neutrale Element der Addition oder negativ ist, können wir nun auch ein Vorzeichen sowie den Absolutbetrags eines Elements definieren.

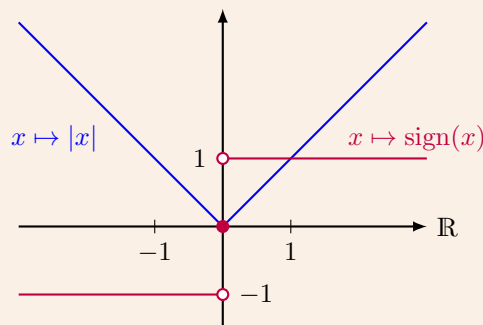
Definition 2.32 (Vorzeichen, Betrag). *Es seien $\mathbb{K}$ ein geordneter Körper und $x \in \mathbb{K}$ ein Element. Wir definieren das Vorzeichen $\text{sign}(x)$ von x als*

$$\text{sign}(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } x > 0, \\ 0 & \text{für } x = 0, \\ -1 & \text{für } x < 0, \end{cases}$$

und den (Absolut-)Betrag $|x|$ von x als

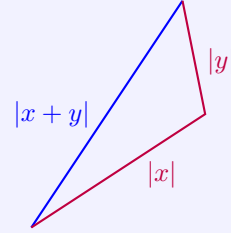
$$|x| := \begin{cases} x & \text{für } x \geq 0, \\ -x & \text{für } x < 0. \end{cases}$$

Die Zuordnungen $\text{sign}: \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$ mit $x \mapsto \text{sign}(x)$ und $|\cdot|: \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$ mit $x \mapsto |x|$ nennen wir die Signumsfunktion bzw. Betragsfunktion.



Lemma 2.33 (Rechenregeln für Vorzeichen und Betrag). *Es seien $\mathbb{K}$ ein geordneter Körper und $x, y \in \mathbb{K}$ beliebige Elemente. Dann gelten die folgenden Regeln:*

- (i) $\text{sign}(x \cdot y) = \text{sign}(x) \cdot \text{sign}(y)$,
- (ii) $\text{sign}(-x) = -\text{sign}(x)$ und $\text{sign}(x^{-1}) = \text{sign}(x)$ für $x \neq 0$,
- (iii) $|x| = x \cdot \text{sign}(x) = \max\{-x, x\}$ und $-|x| \leq x \leq |x|$,
- (iv) $|x| \geq 0$ mit $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (Definitheit),
- (v) $|-x| = |x|$ und $|x^{-1}| = |x|^{-1}$ für $x \neq 0$,
- (vi) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$ (Multiplikativität),
- (vii) $|x + y| \leq |x| + |y|$ (Dreiecksungleichung),
- (viii) $|x - y| \geq ||x| - |y||$ (umgekehrte Dreiecksungleichung).



Beweis.

- (i) Im Fall $x = 0$ oder $y = 0$ folgt die Aussage direkt aus Lemma 2.9 (vi) und für $x, y \neq 0$ aus Lemma 2.17 (v) (unter der Beachtung von $(-1) \cdot (-1) = 1$).
- (ii) Dies sind unmittelbare Konsequenzen aus der Definition des Vorzeichens und Lemma 2.17 (iii) bzw. (vii).
- (iii) Die Identitäten $|x| = x \cdot \text{sign}(x) = \max\{-x, x\}$ sind nach Definition des Vorzeichens, des Betrages und des Maximums (vgl. Bemerkung 2.27 (2)) klar. Die Ungleichung $-|x| \leq x \leq |x|$ ergibt sich mithilfe der Fallunterscheidung $x \geq 0$ (mit $x = |x|$) und $x < 0$ (mit $x = -|x|$) und der Transitivität der Kleiner-gleich-Beziehung.
- (iv) Die Aussage folgt direkt aus der Definition des Betrags in Verbindung mit 2.17 (iii).
- (v) Mithilfe von (iii), (ii) und Lemma 2.9 (xi) sehen wir zunächst

$$|-x| = (-x) \cdot \text{sign}(-x) = (-x) \cdot (-\text{sign}(x)) = x \cdot \text{sign}(x) = |x|.$$

Für $x \neq 0$ sehen wir analog unter Ausnutzung von $\text{sign}(x) = \text{sign}(x)^{-1}$ und Lemma 2.9 (v) auch

$$|x^{-1}| = x^{-1} \cdot \text{sign}(x^{-1}) = x^{-1} \cdot (\text{sign}(x))^{-1} = (x \cdot \text{sign}(x))^{-1} = |x|^{-1}.$$

- (vi) Aus (i) und (iii) folgern wir

$$|x \cdot y| = x \cdot y \cdot \text{sign}(x \cdot y) = x \cdot y \cdot \text{sign}(x) \cdot \text{sign}(y) = |x| \cdot |y|.$$

- (vii) Aus (iii) wissen wir $x \leq |x|$ und $y \leq |y|$ bzw. $-x \leq |x|$ und $-y \leq |y|$, so dass aus Lemma 2.17 (ii) die Ungleichungen

$$x + y \leq |x| + |y| \quad \text{und} \quad -x - y \leq |x| + |y|$$

folgen. Wegen $|x + y| = \max\{x + y, -x - y\}$ folgt daher

$$|x + y| \leq |x| + |y|.$$

- (viii) Wenden wir die Dreiecksungleichung aus (vii) auf $x - y$ und y bzw. auf $y - x$ und x anstelle von x und y an, so erhalten wir mithilfe von (v)

$$|x| = |x - y + y| \leq |x - y| + |y|,$$

$$|y| = |y - x + x| \leq |y - x| + |x| = |x - y| + |x|.$$

Durch Umstellung dieser Ungleichungen sehen wir

$$|x| - |y| \leq |x - y| \quad \text{und} \quad |y| - |x| \leq |x - y|$$

und folglich wegen $||x| - |y|| = \max\{|x| - |y|, |y| - |x|\}$

$$||x| - |y|| \leq |x - y|.$$

□

Bemerkung 2.34 (Abstandsfunktion und Metrik). Über die Betragsfunktion kann man eine Abstandsfunktion $d: \mathbb{K} \times \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}^+ \cup \{0\}$ mit $d(x, y) := |x - y|$ für alle $x, y \in \mathbb{K}$ einführen. Diese Abstandsfunktion hat nach Lemma 2.33 (iv), (v) und (vii) die Eigenschaften einer sogenannten Metrik, nämlich

- (M1) Positivität: $d(x, y) = 0$ genau dann, wenn $x = y$,
- (M2) Symmetrie: $d(x, y) = d(y, x)$ für alle $x, y \in \mathbb{K}$,
- (M3) Dreiecksungleichung: $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ für alle $x, y, z \in \mathbb{K}$.

Intervalle. Wir führen nun spezielle Teilmengen eines geordneten Körpers $\mathbb{K}$ ein, nämlich Intervalle, die von oben oder unten durch ein Element des Körpers beschränkt sind.

Definition 2.35 (Intervalle). Es seien $\mathbb{K}$ ein geordneter Körper und $a, b \in \mathbb{K}$ zwei Elemente. Wir definieren die endlichen Intervalle

$$\begin{aligned}(a, b) &:= \{x \in \mathbb{K} : a < x \wedge x < b\}, \\(a, b] &:= \{x \in \mathbb{K} : a < x \wedge x \leq b\}, \\[a, b) &:= \{x \in \mathbb{K} : a \leq x \wedge x < b\}, \\[a, b] &:= \{x \in \mathbb{K} : a \leq x \wedge x \leq b\},\end{aligned}$$

und die unendlichen Intervalle

$$\begin{aligned}(-\infty, b) &:= \{x \in \mathbb{K} : x < b\}, \\(-\infty, b] &:= \{x \in \mathbb{K} : x \leq b\}, \\(a, \infty) &:= \{x \in \mathbb{K} : a < x\}, \\[a, \infty) &:= \{x \in \mathbb{K} : a \leq x\}, \\(-\infty, \infty) &:= \mathbb{K}.\end{aligned}$$

Wir bezeichnen hierbei die Intervalle

- (a, b) , $(-\infty, b)$, (a, ∞) und $(-\infty, \infty)$ als offene Intervalle,
- $(a, b]$ und $[a, b)$ als halboffene Intervalle,
- $[a, b]$, $(-\infty, b]$, $[a, \infty)$ und $(-\infty, \infty)$ als abgeschlossene Intervalle,
- $[a, b]$ als kompaktes Intervall.

Ferner nennen wir a bzw. b den linken bzw. rechten Randpunkt eines nach unten durch a bzw. nach oben durch b beschränkten Intervalls, und bei den endlichen Intervallen I mit Randpunkten $a \leq b$ nennen wir $|I| := b - a$ die Länge des Intervalls.

Bemerkungen 2.36.

- (1) Aus der Definition folgt außerdem unmittelbar, dass $[a, b] = \emptyset$ für $a > b$ und $(a, b) = (a, b] = [a, b) = [a, b] = \emptyset$ für $a \geq b$ gilt. Im allgemeinen Fall sind die Intervalle (a, b) , $(a, b]$, $[a, b)$ und $[a, b]$ als Mengen beschränkt im Sinne von Definition 2.26.
- (2) Die Konzepte von offenen, abgeschlossenen und kompakten Mengen lassen sich in größerer Allgemeinheit erklären. An dieser Stelle sei aber bereits angemerkt, dass Offenheit und Abgeschlossenheit weder sich ausschließende noch zueinander komplementäre Eigenschaften sind (das Intervall $(-\infty, \infty)$ ist sowohl offen als auch abgeschlossen, und die Intervalle $(a, b]$ und $[a, b)$ sind weder offen noch abgeschlossen).

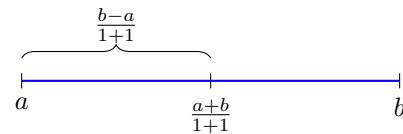
- (3) Manchmal werden endliche offene oder abgeschlossene Intervalle auch über einen Mittelpunkt $x_0 \in \mathbb{K}$ und einen Radius $r \in \mathbb{K}^+$ angegeben, mit

$$\begin{aligned}\{x \in \mathbb{K} : |x - x_0| < r\} &= (x_0 - r, x_0 + r), \\ \{x \in \mathbb{K} : |x - x_0| \leq r\} &= [x_0 - r, x_0 + r].\end{aligned}$$

Umgekehrt lassen sich das offene und abgeschlossene Intervall mit linkem Randpunkt $a \in \mathbb{K}$ und rechtem Randpunkt $b \in \mathbb{K}$ auch schreiben als

$$\begin{aligned}(a, b) &= \{x \in \mathbb{K} : |x - x_0| < r\}, \\ [a, b] &= \{x \in \mathbb{K} : |x - x_0| \leq r\},\end{aligned}$$

mit dem arithmetischen Mittel $x_0 := \frac{a+b}{1+1}$ von a und b als Mittelpunkt und $r := \frac{b-a}{1+1}$ als Radius.



Die in Definition 2.35 eingeführten Intervalle haben nun tatsächlich die obere und untere Grenze als Supremum und Infimum (bzw. sogar als Maximum und Minimum, falls die jeweilige Intervallgrenze im Intervall enthalten ist).

Lemma 2.37 (Supremum und Infimum für Intervalle). *Es seien $\mathbb{K}$ ein geordneter Körper und $a, b \in \mathbb{K}$ zwei Elemente mit $a < b$. Die Mengen der Intervalle (a, b) , $(a, b]$, $[a, b)$ und $[a, b]$ haben b als Supremum und a als Infimum, und im Falle $] bzw. [$ stellen diese auch das Maximum und Minimum dar.*

Beweis. Es reicht aus, die Aussage für das Supremum und Maximum zu zeigen, da die Aussagen für das Infimum und Minimum über das Spiegelungsprinzip in Lemma 2.28 folgen.

Für die Aussage über das Supremum stellen wir zunächst fest, dass es sich bei b für jedes der angegebenen Intervalle um eine obere Schranken handelt und dass für jede obere Schranke $\tilde{b}$ die Ungleichung $a \leq \tilde{b}$ gelten muss (da insbesondere das Element $\frac{a+\tilde{b}}{1+1} > a$ im Intervall enthalten ist). Wir nehmen nun an, dass es eine obere Schranke $\tilde{b}$ mit $\tilde{b} < b$ gibt. Betrachten wir nun das Element

$$x^* := \frac{b + \tilde{b}}{1 + 1} \in \mathbb{K},$$

so gelten wegen $a \leq \tilde{b} < b$ die Ungleichungen $a < x^* < b$, so dass x^* im angegebenen Intervall liegt, sowie $\tilde{b} < x^*$. Die letztere Ungleichung steht aber im Widerspruch dazu, dass $\tilde{b}$ eine obere Schranke des Intervalls ist.

Die Aussage über das Maximum ist klar, da die Intervalle $(a, b]$ und $[a, b]$ nach Definition das Element b enthalten und damit das Supremum b auch das Maximum ist. $\square$

Übung 2.38. Bestimmen Sie die Menge aller $x \in \mathbb{R}$, für die die folgenden Ungleichungen erfüllt sind, und schreiben Sie sie als Vereinigung von Intervallen:

(i) $|x + 2| - |x - 2| \geq 2$,

(ii) $|x^2 + x - 2| < x + 2$.

Die natürlichen Zahlen als Teilmenge jedes geordneten Körpers. Abschließend zeigen wir, dass ein Modell der natürlichen Zahlen im Sinne der Definition 1.71 in jedem geordneten Körper enthalten ist. Dazu führen wir den Begriff einer induktiven Teilmenge ein.

Definition 2.39 (induktive Menge). *Es sei $\mathbb{K}$ ein geordneter Körper. Eine Teilmenge $M \subset \mathbb{K}$ heißt induktiv, falls die folgenden Eigenschaften gelten:*

(i) $1 \in M$,

(ii) mit $x \in M$ gilt auch $x + 1 \in M$.

Beispiel 2.40. Offensichtlich sind der geordnete Körper $\mathbb{K}$ selbst, die Teilmengen $\mathbb{K}^+$ seiner positiven Elemente und das Intervall $[a, \infty)$ für jedes $a \leq 1$ induktive Mengen.

Es gibt in einem geordneten Körper also sehr viele induktive Mengen. Die Eigenschaft der Induktivität von Mengen ist stabil unter der Bildung des Durchschnitts, d.h. der Durchschnitt einer beliebigen Familie (siehe Definition 1.35) von induktiven Mengen ist wieder eine induktive Menge.

Lemma 2.41. *Es seien $\mathbb{K}$ ein geordneter Körper, I eine beliebige Indexmenge und $\{M_i\}_{i \in I}$ eine Mengenfamilie mit induktiven Mengen $M_i \subset \mathbb{K}$ für alle $i \in I$. Dann ist der Durchschnitt $\cap_{i \in I} M_i$ wieder eine induktive Menge.*

Beweis. Es reicht zu zeigen, dass die beiden definierenden Eigenschaften einer induktiven Menge für den Durchschnitt $\cap_{i \in I} M_i$ erfüllt sind:

- (i) Da jede Menge induktiv ist, gilt $1 \in M_i$ für alle $i \in I$, und damit folgt nach Definition des Durchschnitts auch $1 \in \cap_{i \in I} M_i$.
- (ii) Wir betrachten nun ein beliebiges Element $x \in \cap_{i \in I} M_i$. Nach Definition des Durchschnitts gilt dann $x \in M_i$ für alle $i \in I$, und da jede dieser Mengen induktiv ist, haben wir auch $x + 1 \in M_i$ für alle $i \in I$. Folglich gilt auch $x + 1 \in \cap_{i \in I} M_i$. $\square$

Wir können nun zeigen, dass die kleinstmögliche induktive Menge in einem geordneten Körper (die man als Durchschnitt über alle induktiven Mengen gewinnen kann) tatsächlich die Peano-Axiome erfüllt und damit ein Modell der natürlichen Zahlen darstellt.

Satz 2.42. *Es sei $\mathbb{K}$ ein geordneter Körper. Dann erfüllt die Menge*

$$N := \bigcap \{M \subset \mathbb{K} : M \text{ ist induktiv}\}$$

zusammen mit dem ausgezeichneten Element $1 \in \mathbb{K}$ und der Nachfolgerabbildung $s: N \rightarrow N$ mit $s(n) = n + 1$ für alle $n \in N$ die Peano-Axiome aus Definition 1.71.

Beweis. Wir bemerken zunächst, dass N nach Lemma 2.41 eine induktive Menge ist. Damit ist einerseits $1 \in N$ erfüllt, andererseits ist die angegebene Nachfolgerabbildung $s: N \rightarrow N$ wohldefiniert. Wir verifizieren nun die Peano-Axiome aus Definition 1.71:

- (P1) Wir beweisen dies mit einem Widerspruchsargument, d.h. wir nehmen 1 als den Nachfolger einer Zahl $n \in N$ an. Dies bedeutet $n + 1 = 1$, also $n = 0$. Da mit $\mathbb{K}^+$ aber (mindestens) eine induktive Menge in $\mathbb{K}$ existiert, die das Element 0 nicht enthält, haben wir $0 \notin N$ nach Definition von N als Durchschnitt aller induktiven Mengen, was im Widerspruch zu $0 \in N$ steht.
- (P2) Haben wir zwei Elemente $n, n' \in N$ mit $n + 1 = s(n) = s(n') = n' + 1$, so folgt offensichtlich $n = n'$.
- (P3) Ist $M \subset N$ eine beliebige Teilmenge, so dass $1 \in M$ und $s(n) \in M$ für alle $n \in M$ gelten, dann ist M eine induktive Teilmenge von $\mathbb{K}$. Demzufolge gilt nach Definition von N die Inklusion $N \subset M$ und somit wegen $M \subset N$ schon $N = M$. $\square$

Bemerkung 2.43. *In einem Körper bilden $(\mathbb{K}, +)$ und $(\mathbb{K} \setminus \{0\}, \cdot)$ kommutative Gruppen, also gilt für jedes $x \in \mathbb{K}$ auch $-x \in \mathbb{K}$ und für jedes $x \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ auch $x^{-1} \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$. Damit enthält jeder geordnete Körper nicht nur ein Modell N der natürlichen Zahlen, sondern auch ein Modell der ganzen Zahlen und der rationalen Zahlen.*

Über das Argument der Induktivität (oder alternativ mit einer ähnlichen Argumentation über das Prinzip der vollständigen Induktion) lassen sich eine Reihe von einfachen und wohlbekannten Eigenschaften über die Menge der natürlichen Zahlen zeigen. Im Folgenden schreiben wir $\mathbb{N}$ für das übliche Modell der natürlichen Zahlen (was gemäß Satz 1.73 bis auf Umbenennung das einzige ist).

Lemma 2.44. Für die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ gelten die folgenden Eigenschaften:

- (i) Abgeschlossenheit unter Addition: für $n, m \in \mathbb{N}$ gilt auch $n + m \in \mathbb{N}$,
- (ii) Positivität: für $n \in \mathbb{N}$ gilt $n \geq 1$ und damit insbesondere $n > 0$,
- (iii) Vorgängerabbildung: für $n \in \mathbb{N}$ gilt entweder $n = 1$ oder $n - 1 \in \mathbb{N}$,
- (iv) Minimaler Abstand natürlicher Zahlen: für $n \in \mathbb{N}$ existiert kein $m \in \mathbb{N}$ mit $n < m < n + 1$.

Beweis.

- (i) Für ein beliebiges, aber festes $n \in \mathbb{N}$ betrachten wir die Menge

$$M := \{m \in \mathbb{N} : n + m \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{N}.$$

Da $\mathbb{N}$ eine induktive Menge ist, wissen wir $n + 1 \in \mathbb{N}$ und damit $1 \in M$. Ist nun $m \in M$, so gilt nach Definition von M auch $n + m \in \mathbb{N}$ und damit, wiederum wegen der Induktivität von $\mathbb{N}$, auch $n + m + 1 \in \mathbb{N}$. Dies bedeutet gerade $m + 1 \in M$. Damit haben wir gezeigt, dass $M \subset \mathbb{N}$ eine induktive Menge ist. Dies impliziert $M = \mathbb{N}$ nach Definition von $\mathbb{N}$ als Durchschnitt über alle induktiven Mengen und damit die Abgeschlossenheit von $\mathbb{N}$ unter Addition.

- (ii) Wir betrachten nun die Menge

$$M := \{n \in \mathbb{N} : n \geq 1\} \subset \mathbb{N}.$$

Aus der Induktivität von $\mathbb{N}$ sowie mit $1 > 0$ nach Lemma 2.17 (vi) schließen wir auf die Induktivität von $M \subset \mathbb{N}$. Folglich haben wir $M = \mathbb{N}$ und damit insbesondere die Positivität von $\mathbb{N}$.

- (iii) Wir setzen

$$M := \{1\} \cup \{n \in \mathbb{N} : n - 1 \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{N}.$$

Nach Definition gilt $1 \in M$, und mit $n \in M \subset \mathbb{N}$ gilt wegen der Induktivität von $\mathbb{N}$ auch $n + 1 \in \mathbb{N}$, so dass $n + 1 \in M$ folgt. Wieder ist $M \subset \mathbb{N}$ eine induktive Menge, was zunächst $M = \mathbb{N}$ und dann wegen $0 \notin \mathbb{N}$ die Behauptung über die Vorgängerabbildung zeigt.

- (iv) Wir wählen

$$M := \{n \in \mathbb{N} : \text{es existiert kein } m \in \mathbb{N} \text{ mit } n < m < n + 1\} \subset \mathbb{N}.$$

Wir zeigen zunächst $1 \in M$. Dazu betrachten wir die Menge $M_1 := \{1\} \cup \{n \in \mathbb{N} : n \geq 1 + 1\}$, die offensichtlich eine induktive Teilmenge von $\mathbb{N}$ ist. Aus $M_1 = \mathbb{N}$ folgern wir dann, dass $n \geq 1 + 1$ für alle $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ und damit $1 \in M$ gilt. Für die Induktivität von M müssen wir noch zeigen, dass für alle $n \in M$ auch $n + 1 \in M$ gilt. Dies zeigen wir mit Widerspruch und nehmen an, dass es ein $n \in M$ gibt, so dass $n + 1 \notin M$, also $n + 1 < m < n + 2$ für ein $m \in \mathbb{N}$, gilt. Wegen (ii) haben wir dann $m > 1$ und damit $m - 1 \in \mathbb{N}$ nach (iii). Also erhalten wir dann die Ungleichungen $n < m - 1 < n + 1$, im Widerspruch zu $n \in M$. Folglich ist $M \subset \mathbb{N}$ eine induktive Menge und damit $M = \mathbb{N}$, woraus direkt die Behauptung folgt. $\square$

Übung 2.45. Beweisen Sie für die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ die *Abgeschlossenheit unter Multiplikation*, d.h. dass für $n, m \in \mathbb{N}$ auch $n \cdot m \in \mathbb{N}$ gilt.

Satz 2.46 (Wohlordnungsprinzip der natürlichen Zahlen). Für jede nicht-leere Menge $M \subset \mathbb{N}$ existiert das Minimum $\min M$, d.h. M besitzt ein kleinstes Element.

Beweis. Wir beweisen diese Aussage über Widerspruch und nehmen an, dass es eine nicht-leere Menge $M \subset \mathbb{N}$ gibt, so dass kein $m \in M$ mit $m \leq x$ für alle $x \in M$ existiert. Wir betrachten die Menge

$$L := \{a \in \mathbb{N} : a \leq x \text{ für alle } x \in M\}$$

der unteren Schranken von M . Offensichtlich gilt $1 \in L$ (siehe Lemma 2.44 (ii)). Ist außerdem $a \in L$, so gilt $a \leq x$ nach Definition von L für alle $x \in M$, aber zugleich auch $a \notin M$ nach Wahl von M . Da nach Lemma 2.44 (iv) keine natürliche Zahl zwischen a und $a + 1$ existiert, muss also auch $a + 1 \in L$ gelten. Damit ist $L \subset \mathbb{N}$ eine induktive Teilmenge, also $L = \mathbb{N}$. Dann gilt aber $n \leq x$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $x \in M$, wodurch sich der gewünschte Widerspruch ergibt: wegen $M \neq \emptyset$ existiert ein $x_0 \in M \subset \mathbb{N}$, und insbesondere für die Wahl $n := x_0 + 1$ ist die Aussage $x_0 + 1 \leq x$ für alle $x \in M$ falsch (etwa für $x = x_0$). Also war unsere anfängliche Annahme, dass es eine nicht-leere Teilmenge $M \subset \mathbb{N}$ gibt, so dass kein $m \in M$ mit $m \leq x$ für alle $x \in M$ existiert, falsch, und wir haben die Aussage des Satzes bewiesen. $\square$

Bemerkung 2.47 (Prinzip vom kleinsten Element oder kleinsten Verbrecher). *Auf Satz 2.46 basiert das Beweisprinzip des kleinsten Elements, Verbrechers oder Gegenbeispiels, über das man einige Eigenschaften über den natürlichen Zahlen zeigen kann. Dazu verwendet man einen Widerspruchsbeweis und nimmt an, dass die zu zeigende Aussage nicht wahr ist und es somit eine Teilmenge der natürlichen Zahlen gibt, die Verbrecher, für die die Aussage falsch ist. Nach Satz 2.46 gibt es dann auch einen kleinsten Verbrecher, für den man dann den Widerspruch herleitet (etwa, dass es sich um keinen oder nicht den kleinsten Verbrecher handelt).*

Alternativer Beweis von Lemma 1.98. Zu einer beliebig vorgegebenen Zahl $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ betrachten wir die Menge

$$M := \{m \in \mathbb{N} \setminus \{1\} : m \text{ teilt } n\}$$

ihrer Teiler, die größer oder gleich 2 sind. Wegen $n \in M$ handelt es sich dabei offensichtlich um eine nicht-leere Teilmenge von $\mathbb{N}$, die nach Satz 2.46 ein kleinstes Element p besitzt. Wenn nun p keine Primzahl wäre, gäbe es einen Teiler $q \geq 2$ von p , der auch ein Teiler von n wäre, was im Widerspruch dazu steht, dass p nach Annahme der kleinste Teiler von n ist, der größer oder gleich 2 ist. Folglich ist mit p die Existenz eines Primteilers von n gezeigt. $\square$

2.3 Das Vollständigkeitsaxiom

Wir haben bereits gesehen, dass die Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen zwar ein geordneter Körper ist, es aber “Lücken” gibt (und die Wurzel einer Primzahlen beispielsweise keine rationale Zahl ist). Das Vollständigkeitsaxiom behebt gerade diesen Defekt. Es gibt verschiedene Formulierungen des Vollständigkeitsaxioms, und eine Variante ist die Forderung, dass jede nicht-leere, nach oben beschränkte Teilmenge des geordneten Körpers ein Supremum besitzt.

Definition 2.48 (Vollständigkeitsaxiom über Supremumseigenschaft). *Ein geordneter Körper $\mathbb{K}$ erfüllt das Vollständigkeitsaxiom, falls jede nicht-leere, nach oben beschränkte Teilmenge von $\mathbb{K}$ ihr Supremum in $\mathbb{K}$ hat.*

Bemerkung 2.49. *Über das Spiegelungsprinzip aus Lemma 2.28 können wir das Vollständigkeitsaxiom äquivalent auch über die Infimumseigenschaft formulieren, dass jede nicht-leere, nach unten beschränkte Teilmenge von $\mathbb{K}$ ihr Infimum in $\mathbb{K}$ hat.*

Tatsächlich kann man (auf Basis des Zermelo–Fraenkel Axiomensystems der Mengenlehre) zeigen, dass ein solcher geordneter Körper, der das Vollständigkeitsaxiom erfüllt, existiert. Hierfür gibt es verschiedene Konstruktionsmöglichkeiten, die typischerweise auf einer Erweiterung der Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen beruhen. Zudem kann man auch zeigen, dass ein solcher vollständiger, geordneter Körper im Wesentlichen eindeutig ist (in einem ähnlichen Sinn wie das Modell der natürlichen Zahlen in Satz 1.73).

Satz 2.50 (Existenz und Eindeutigkeit der reellen Zahlen).

- (i) *Es gibt einen geordneten Körper $(\mathbb{R}, +, \cdot)$, der das Vollständigkeitsaxiom erfüllt.*
- (ii) *Sind $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ und $(\tilde{\mathbb{K}}, \tilde{+}, \tilde{\cdot})$ zwei geordnete Körper, die das Vollständigkeitsaxiom erfüllen, dann existiert eine bijektive Funktion $\varphi: \mathbb{K} \rightarrow \tilde{\mathbb{K}}$, die die Addition, Multiplikation und Anordnung erhält,*

d.h. so dass für alle $x, y \in \mathbb{K}$ die Eigenschaften $\varphi(x+y) = \varphi(x) \tilde{+} \varphi(y)$, $\varphi(x \cdot y) = \varphi(x) \tilde{\cdot} \varphi(y)$ und, falls $x \leq y$, auch $\varphi(x) \leq \varphi(y)$ gelten.

Im Folgenden werden wir immer mit der Menge $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ der uns bekannten reellen Zahlen arbeiten und noch einige nützliche Eigenschaften aus der Supremumseigenschaft ableiten.

Bemerkung 2.51 (Konventionen). Für die Behandlung von Mengen und das Rechnen mit Ungleichungen in $\mathbb{R}$ gibt es einige Konventionen.

- Ist $M \subset \mathbb{R}$ eine nicht-leere Menge, so setzen wir $\sup M = \infty$, falls sie nicht nach oben beschränkt ist, und $\inf M = -\infty$, falls sie nicht nach unten beschränkt ist. Für die leere Menge vereinbaren wir außerdem $\sup \emptyset = -\infty$ und $\inf \emptyset = \infty$. Das Supremum und Infimum von Teilmengen von $\mathbb{R}$ nimmt im Allgemeinen also einen Wert in $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ an.
- Auf diesem sogenannten erweiterten Zahlenbereich $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ kann man die Ordnungsrelation über $-\infty < x < \infty$ für jedes $x \in \mathbb{R}$ fortsetzen, die Arithmetik ist jedoch etwas subtiler (beispielsweise sind Ausdrücke wie $\infty - \infty$ oder ∞/∞ nicht definiert).
- Schreibt man lediglich $x > 0$, so ist hierbei implizit $x \in \mathbb{R}$ angenommen.

Falls das Supremum (bzw. Infimum) einer Teilmenge aus den reellen Zahlen endlich, aber kein Maximum (bzw. Minimum) ist, so kann man seinen Wert mit Elementen aus der Menge beliebig gut approximieren. Ist die Teilmenge dagegen nicht nach oben (bzw. unten) beschränkt, so findet man beliebig große (bzw. kleine) Elemente in der Menge. Diese Eigenschaften helfen, um mit dem Supremum (bzw. Infimum) Rechnungen durchzuführen.

Lemma 2.52. Es sei $M \subset \mathbb{R}$ eine nicht-leere Menge.

- (i) Ist $\sup M < \infty$ (bzw. $\inf M > -\infty$), so existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $x \in M$ mit

$$\sup M - \varepsilon < x \leq \sup M \quad (\text{bzw. } \inf M \leq x < \inf M + \varepsilon).$$

- (ii) Ist $\sup M = \infty$ (bzw. $\inf M = -\infty$), so existiert zu jedem $a > 0$ ein $x \in M$ mit

$$a < x \quad (\text{bzw. } x < -a).$$

Beweis. Wegen Lemma 2.28 reicht es, die beiden Aussagen über das Supremum von M zu zeigen.

- (i) Wir beweisen die Aussage mit Widerspruch und nehmen an, dass ein $\varepsilon > 0$ existiert, so dass $\sup M - \varepsilon \geq x$ für alle $x \in M$ gilt (man beachte, dass die andere Ungleichung $x \leq \sup M$ für alle $x \in M$ trivial nach Definition des Supremums gilt). Dann ist $\sup M - \varepsilon$ ebenfalls eine obere Schranke von M und echt kleiner als $\sup M$, was im Widerspruch zur Definition des Supremums als kleinster oberer Schranke steht.
- (ii) Ist $\sup M = \infty$, dann ist M nach oben unbeschränkt und es existiert kein $a > 0$ mit $x \leq a$ für alle $x \in M$. Dies ist äquivalent zur Aussage. $\square$

Korollar 2.53. Ist $M \subset \mathbb{Z}$ eine nicht-leere, nach oben (bzw. unten) beschränkte Teilmenge der ganzen Zahlen, so besitzt M ein Maximum (bzw. Minimum).

Beweis. Wegen Lemma 2.28 reicht es, die Aussage nur für nach oben beschränkte Mengen und das Maximum zu zeigen. Wir könnten diese Aussage auf das Wohlordnungsprinzip von $\mathbb{N}$ aus Satz 2.46 zurückführen, geben hier aber einen alternativen Beweis mithilfe von Lemma 2.52 an.

Aus der Supremumseigenschaft von $\mathbb{R}$ (siehe Definition 2.48) schließen wir zunächst darauf, dass $\sup M$ in $\mathbb{R}$ existiert. Wir wollen nun noch $\sup M \in M$ zeigen, um die Existenz von $\max M = \sup M$ zu erhalten. Mit Lemma 2.52 finden wir mit $\varepsilon = \frac{1}{2}$ zunächst ein $m \in M$ mit $\sup M - \frac{1}{2} < m \leq \sup M$.

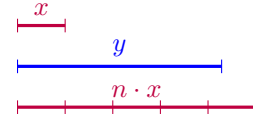
Falls $m < \sup M$ gelten würde, so bestimmen wir zu $\tilde{\varepsilon} = \sup M - m > 0$ ein $\tilde{m} \in M$ mit $\sup M - \tilde{\varepsilon} < \tilde{m} \leq \sup M$. Insgesamt haben wir also

$$\sup M - \frac{1}{2} < m = \sup M - \tilde{\varepsilon} < \tilde{m} \leq \sup M,$$

woraus wir $\tilde{m} - m < \sup M - (\sup M - \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$ erhalten. Wegen $\tilde{m} > m$ und $m, \tilde{m} \in \mathbb{Z}$ gilt zugleich aber $\tilde{m} - m \in \mathbb{N}$, was einen Widerspruch ergibt. Folglich muss $m = \sup M = \max M$ gelten. $\square$

Aus der Supremumseigenschaft von $\mathbb{R}$ folgern wir nun die Gültigkeit des archimedischen Axioms.

Satz 2.54 (archimedisches Axiom). *Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x > 0$ existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n \cdot x > y$.*



Beweis. Da die Aussage im Fall $x > y$ mit $n = 1$ trivial erfüllt ist, dürfen wir $x \leq y$ annehmen. In diesem Fall führen wir den Beweis über Widerspruch und nehmen an, dass $n \cdot x \leq y$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Dann ist die Menge $\mathbb{N}$ durch $\frac{y}{x}$ nach oben beschränkt und besitzt wegen der Supremumseigenschaft ein Supremum in $\mathbb{R}$. Mithilfe von Lemma 2.52 (i) können wir zu $\varepsilon < 1$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ bestimmen, so dass $\sup \mathbb{N} - \varepsilon < n_0$ gilt. Mit $n_0 + 1 \in \mathbb{N}$ und $n_0 + 1 > n_0 + \varepsilon > \sup \mathbb{N}$ folgt dann der Widerspruch. $\square$

Bemerkung 2.55. *Die Gültigkeit des archimedischen Axioms auf $\mathbb{R}$ ist eine Folgerung des Vollständigkeitsaxioms als Supremumseigenschaft aus Definition 2.48. Gilt die Aussage von Satz 2.54 für einen allgemeineren geordneten Körper (wie etwa $\mathbb{Q}$), so spricht man von einem archimedisch geordneten Körper (jedoch ist nicht jeder geordnete Körper auch archimedisch).*

Korollar 2.56. *Es sei $q > 1$.*

- (i) *Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $0 < \frac{1}{n} < \varepsilon$.*
- (ii) *Zu jedem $K > 0$ existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $q^n > K$.*
- (iii) *Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $0 < q^{-n} < \varepsilon$.*

Beweis.

- (i) Wenden wir Satz 2.54 mit der Wahl $x = \varepsilon$ und $y = 1$ an, so finden wir ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n \cdot \varepsilon > 1 > 0$. Nach den Rechenregeln aus Lemma 2.17 impliziert dies $0 < \frac{1}{n} < \varepsilon$.
- (ii) Aus Übung 2.19 wissen wir insbesondere, dass die Bernoulli-Ungleichung $(1 + x)^n \geq 1 + n \cdot x$ für alle $x \geq 0 > -1$ gilt. Schreiben wir nun $q = 1 + x$ für $x := q - 1 > 0$, so folgt

$$q^n = (1 + x)^n \geq 1 + n \cdot x \geq n \cdot x.$$

Die Behauptung ergibt sich nun aus Satz 2.54 mit der Wahl $y = K$.

- (iii) Wenden wir (ii) mit $K = \varepsilon^{-1}$ an, so finden wir $n \in \mathbb{N}$ mit $q^n > K$. Mit Lemma 2.17 folgt dann $0 < q^{-n} < K^{-1} = \varepsilon$. $\square$

Wir können nun zeigen, dass die Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen “dicht” in $\mathbb{R}$ liegt, d.h. dass sich eine gegebene reelle Zahl beliebig gut durch rationale Zahlen approximieren lässt (und diese Aussage ist gültig, obwohl wir noch sehen werden, dass es “viel mehr” reelle Zahlen als rationale Zahlen gibt).

Satz 2.57.

- (i) *Zu allen $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x < y$ gibt es ein $q \in \mathbb{Q}$ mit $x < q < y$.*
- (ii) *Zu jedem $\varepsilon > 0$ und $x \in \mathbb{R}$ gibt es ein $q \in \mathbb{Q}$ mit $|x - q| < \varepsilon$.*

Beweis.

- (i) Mit Korollar 2.56 (i) mit $\varepsilon := y - x$ wählen wir zunächst ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{n} < y - x$. Dann betrachten wir die Menge

$$M := \{z \in \mathbb{Z} : z > n \cdot x\},$$

die nach unten (durch $n \cdot x$) beschränkt und wegen des Archimedischen Axioms nicht-leer ist (beachte, dass die obere Grenze aus Satz 2.54 für $x \in \mathbb{N}$ eine ganze Zahl ist). Nach Korollar 2.53 besitzt M folglich ein Minimum. Mit $\min M > n \cdot x$ (nach Definition von M) und $\min M - 1 \leq n \cdot x$ (wegen der Minimalität von $\min M$ in M) folgt dann mit $q := \frac{\min M}{n} \in \mathbb{Q}$ die Behauptung über

$$x < \frac{\min M}{n} = q = \frac{\min M - 1}{n} + \frac{1}{n} < x + (y - x) = y.$$

- (ii) Dies folgt sofort aus (i) (mit $x - \varepsilon, x + \varepsilon$ anstelle von x, y), da $|x - q| < \varepsilon$ genau dann erfüllt ist, wenn $q \in (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ gilt (vgl. Bemerkung 2.36 (3)). $\square$

Bemerkung 2.58. Wir können nun die Aussage aus Bemerkung 2.27 (3) präzisieren, dass nicht jede beschränkte Menge im geordneten Körper $\mathbb{Q}$ ein Supremum oder Infimum besitzt. Um einzusehen, dass speziell die Menge $M := \{x \in \mathbb{Q} : x^2 \leq 2\}$ in $\mathbb{Q}$ kein Supremum besitzt, überlegen wir uns:

- Ist $a \in \mathbb{Q}$ mit $a < \sqrt{2}$, so kann a keine obere Schranke von M sein. Mit Satz 2.57 können wir nämlich ein $q \in \mathbb{Q}$ mit $a < q < \sqrt{2}$ bestimmen, und wegen $q^2 < 2$ gilt auch $q \in M$.
- Nach Satz 1.19 gilt $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ und damit ist $\sqrt{2}$ als Supremum von M in $\mathbb{Q}$ nicht zulässig.
- Jedes $a \in \mathbb{Q}$ mit $a > \sqrt{2}$ ist wegen $x^2 < 2 < a^2$ für alle $x \in M$ eine obere Schranke von M . Es gibt jedoch keine kleinste obere Schranke, da für jedes $a \in \mathbb{Q}$ mit $a > \sqrt{2}$ (also jede obere Schranke) nach Satz 2.57 ein $\tilde{a} \in \mathbb{Q}$ mit $\sqrt{2} < \tilde{a} < a$ existiert und $\tilde{a}$ damit eine kleinere obere Schranke ist.

Betrachtet man die Menge M als Teilmenge von $\mathbb{R}$ anstelle von $\mathbb{Q}$, so zeigt die Argumentation von oben, dass M das Supremum $\sup M = \sqrt{2}$ in $\mathbb{R}$ besitzt.

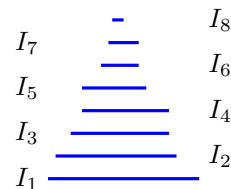
Übung 2.59 (ein nützliches ε -Argument). Zeigen Sie für $x, y \in \mathbb{R}$ die Implikation

$$x < y + \varepsilon \quad \text{für alle } \varepsilon > 0 \quad \Rightarrow \quad x \leq y.$$

Intervallschachtelungen. Die Tatsache, dass die Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen das Vollständigkeitsaxiom (im Sinne von Definition 2.48) erfüllt, hat einen engen Zusammenhang mit dem sogenannten Intervallschachtelungsprinzip, das besagt, dass eine Folge von nicht-leeren, ineinander geschachtelten und abgeschlossenen Intervallen, deren Länge beliebig klein wird, genau ein Element in ihrem Durchschnitt enthält.

Definition 2.60 (Intervallschachtelung). Eine Intervallschachtelung in $\mathbb{R}$ ist eine Folge $I_1, I_2, I_3, \dots$ von nicht-leeren, abgeschlossenen und endlichen Intervallen, d.h. der Form $I_n := [a_n, b_n]$ für $a_n, b_n \in \mathbb{R}$ mit $a_n < b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so dass die folgenden Eigenschaften gelten:

- (i) $I_{n+1} \subset I_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$,
- (ii) für jedes $\varepsilon > 0$ existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $|I_n| = b_n - a_n < \varepsilon$.



Satz 2.61 (Intervallschachtelungsprinzip). Zu jeder Intervallschachtelung in $\mathbb{R}$ gibt es genau eine reelle Zahl, die allen Intervallen angehört, d.h. die Menge $\cap_{n \in \mathbb{N}} I_n$ enthält genau eine reelle Zahl.

Beweis. Wir werden die Existenz eines Elements $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n$ über die Eigenschaft (i) aus der Definition einer Intervallschachtelung zeigen und anschließend seine Eindeutigkeit über die Eigenschaft (ii) folgern.

Existenz: Wir betrachten die beiden Mengen

$$A := \{a_n : n \in \mathbb{N}\} \quad \text{und} \quad B := \{b_n : n \in \mathbb{N}\}$$

der linken und rechten Randpunkte der Intervalle I_n für $n \in \mathbb{N}$. Wegen des Schachtelungsprinzips (i) aus der Definition 2.60 einer Intervallschachtelung gilt die Ungleichungskette

$$a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \dots \leq b_3 \leq b_2 \leq b_1,$$

so dass $a_n \leq a_k \leq b_k$ für alle $n \leq k$ sowie $a_n \leq b_n \leq b_k$ für alle $n \geq k$ folgt. Insgesamt haben wir also

$$a_n \leq b_k \quad \text{für alle } k, n \in \mathbb{N},$$

so dass die Menge A nach oben durch b_k für jedes $k \in \mathbb{N}$ und die Menge B nach unten durch a_n für jedes $n \in \mathbb{N}$ beschränkt ist. Nach der Supremumseigenschaft bzw. Infimumseigenschaft von $\mathbb{R}$ gemäß Definition 2.48 existieren

$$\sup A \quad \text{und} \quad \inf B$$

in $\mathbb{R}$ mit $a_n \leq \sup A \leq b_n$, also $\sup A \in I_n$, für alle $n \in \mathbb{N}$ (und entsprechend für $\inf B$). Die Zahl $x := \sup A$ (und entsprechend auch $x = \inf B$) erfüllt also die geforderte Eigenschaft, dass sie allen Intervallen I_n für $n \in \mathbb{N}$ angehört und damit im Durchschnitt $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n$ enthalten ist.

Eindeutigkeit: Wir zeigen dies über Widerspruch und nehmen an, dass es einen weiteren Punkt $\tilde{x} \neq x$ mit $\tilde{x} \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n$ gibt. Zu $\varepsilon := |\tilde{x} - x| > 0$ finden wir über die Eigenschaft (ii) aus der Definition 2.60 einer Intervallschachtelung ein $n \in \mathbb{N}$ mit $b_n - a_n < \varepsilon$. Da nach Annahme $x, \tilde{x} \in [a_n, b_n]$ gilt, ergibt sich

$$|\tilde{x} - x| = \max\{\tilde{x} - x, x - \tilde{x}\} \leq b_n - a_n < \varepsilon,$$

was im Widerspruch zur Wahl von $\varepsilon = |\tilde{x} - x|$ steht. □

Bemerkungen 2.62.

- (1) *Die Abgeschlossenheit der Intervalle I_n für $n \in \mathbb{N}$ ist für die Aussage des Intervallschachtelungsprinzips aus Satz 2.61 wesentlich: betrachten wir beispielsweise die halboffenen Intervalle*

$$I_n := (0, n^{-1}] \quad \text{für } n \in \mathbb{N},$$

so gilt $I_{n+1} \subset I_n$ und $|I_n| = n^{-1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wegen Korollar 2.56 (i) sind damit die Eigenschaften (i) und (ii) aus der Definition 2.60 einer Intervallschachtelung erfüllt (aber da die Intervalle nicht abgeschlossen sind, handelt es sich um keine Intervallschachtelung im Sinne von Definition 2.60). Tatsächlich gilt hier

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} (0, n^{-1}] = \emptyset$$

(und damit ist das Intervallschachtelungsprinzip nicht erfüllt). Gäbe es nämlich einen Punkt $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} (0, n^{-1}]$, so müsste $x > 0$ gelten. Nach Korollar 2.56 (i) existiert dann aber ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $0 < n_0^{-1} < x$ und damit $x \notin (0, n_0^{-1}]$, was im Widerspruch zu $x \in (0, n^{-1}]$ für alle $n \in \mathbb{N}$ steht.

- (2) *Wir haben die Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ über die Supremumseigenschaft für nach oben beschränkte Teilmengen eingeführt. Alternativ hätten wir auch das archimedische Axiom zusammen mit dem Intervallschachtelungsprinzip fordern können. Dies und eine weitere (klassische) Möglichkeit der axiomatischen Einführung der Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ werden wir später in Kapitel 4 aufgreifen.*

Über die Supremumseigenschaft bzw. das Intervallschachtelungsprinzip können wir nun garantieren, dass die quadratische Gleichung $x^2 = y$ oder allgemeiner die Gleichung $x^k = y$ für gegebenes $y \geq 0$ und $k \in \mathbb{N}$ eine eindeutige Lösung $x \geq 0$ besitzt. Als Vorüberlegung zeigen wir eine einfache Ungleichung für Potenzen:

Übung 2.63. Zeigen Sie, dass für alle Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ mit $0 \leq a < b$ und jedes $k \in \mathbb{N}$ die Ungleichung $a^k < b^k$ gilt.

Satz 2.64. Zu jedem $y \in \mathbb{R}_0^+$ und $k \in \mathbb{N}$ existiert genau ein $x \in \mathbb{R}_0^+$ mit der Eigenschaft

$$x^k = y.$$

Beweis. Wir werden die Existenz einer Zahl $x \geq 0$ mit $x^k = y$ über das Intervallschachtelungsprinzip beweisen und anschließend die Eindeutigkeit begründen.

Existenz über Intervallschachtelungsprinzip: Wir verwenden für den Beweis der Existenz einer Zahl $x \geq 0$ mit $x^k = y$ das *Bisektionsverfahren*, bei dem eine Folge von Intervallen $I_n = [a_n, b_n]$ für $n \in \mathbb{N}$ so konstruiert wird, dass I_{n+1} jeweils aus der “richtigen” Hälfte des vorherigen Intervalls I_n besteht, mit

$$I_{n+1} \subset I_n, \quad |I_{n+1}| = \frac{1}{2}|I_n| = 2^{-n}(1+y) \quad \text{und} \quad a_{n+1}^k \leq y \leq b_{n+1}^k \quad (2.1)$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Damit erhalten wir ein konstruktives Verfahren, das man beispielsweise auf einem Computer implementieren kann. Wir konstruieren die Intervalle I_n mit (2.1) für $n \in \mathbb{N}$ induktiv. Für $n = 1$ setzen wir $I_1 = [a_1, b_1]$ für $a_1 = 0$ und $b_1 = 1 + y$. Dann gilt $|I_1| = 1 + y$, und wegen der Annahme $y \geq 0$ und der Bernoulli-Ungleichung $(1+y)^k \geq ky \geq y$ aus Übung 2.19 ist auch die Ungleichung $a_1^k \leq y \leq b_1^k$ erfüllt. Dann nehmen wir an, dass die Intervalle $I_1, \dots, I_n$ für ein beliebiges, aber festes $n \in \mathbb{N}$ bereits konstruiert sind, mit

$$I_{\ell+1} \subset I_\ell, \quad |I_{\ell+1}| = \frac{1}{2}|I_\ell| = 2^{-\ell}(1+y) \quad \text{und} \quad a_{\ell+1}^k \leq y \leq b_{\ell+1}^k \quad \text{für } \ell \in \{1, \dots, n-1\}.$$

Das Intervall I_{n+1} definieren wir nun über

$$I_{n+1} = [a_{n+1}, b_{n+1}] := \begin{cases} \left[a_n, \frac{a_n + b_n}{2} \right] & \text{für } \left(\frac{a_n + b_n}{2} \right)^k \geq y, \\ \left[\frac{a_n + b_n}{2}, b_n \right] & \text{für } \left(\frac{a_n + b_n}{2} \right)^k < y. \end{cases}$$

Wegen $a_n \leq \frac{a_n + b_n}{2} \leq b_n$ gilt offensichtlich $I_{n+1} \subset I_n$, und mit

$$\frac{a_n + b_n}{2} - a_n = \frac{b_n - a_n}{2} = b_n - \frac{a_n + b_n}{2}$$

erhalten wir nach Konstruktionsvorschrift in jedem der beiden möglichen Fälle

$$|I_{n+1}| = \frac{b_n - a_n}{2} = \frac{1}{2}|I_n| = \frac{1}{2}2^{-(n-1)}(1+y) = 2^{-n}(1+y).$$

Des Weiteren haben wir im Fall $\left(\frac{a_n + b_n}{2} \right)^k \geq y$ nach Konstruktion

$$a_{n+1}^k = a_n^k \leq y \leq \left(\frac{a_n + b_n}{2} \right)^k = b_{n+1}^k,$$

während wir im Fall $\left(\frac{a_n + b_n}{2} \right)^k < y$

$$a_{n+1}^k = \left(\frac{a_n + b_n}{2} \right)^k < y \leq b_n^k = b_{n+1}^k$$

erhalten. In beiden Fällen bekommen wir somit $a_{n+1}^k \leq y \leq b_{n+1}^k$. Folglich haben wir nach dem Prinzip der vollständigen Induktion Intervalle $I_1, I_2, I_3, \dots$ konstruiert, so dass die Eigenschaft (2.1) für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt. Es handelt sich hierbei außerdem um eine Intervallschachtelung im Sinne von Definition 2.60, da wir mithilfe von Korollar 2.56 (iii) für jedes $\varepsilon > 0$ ein $n \in \mathbb{N}$ mit $2^{-n} < 2^{-1}(1+y)^{-1}\varepsilon$ finden, also

$$|I_n| = b_n - a_n = 2^{-n+1}(1+y) < \varepsilon.$$

Nach dem Intervallschachtelungsprinzip aus Satz 2.61 existiert eine eindeutige Zahl $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n$, die wegen $a_1 = 0$ auch $x \geq 0$ erfüllt. Wir müssen noch zeigen, dass tatsächlich auch $x^k = y$ gilt. Am einfachsten geht dies über eine weitere Intervallschachtelung, nämlich für die Potenzen, also

$$J_n := [a_n^k, b_n^k] \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Hierzu folgern wir mit Übung 2.63 aus $0 \leq a_n \leq a_{n+1} < b_{n+1} \leq b_n$ die Ungleichungen $a_n^k \leq a_{n+1}^k < b_{n+1}^k \leq b_n^k$ und damit die Inklusion $J_{n+1} \subset J_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Mit der geometrischen Summenformel aus Satz 1.83 und $0 \leq a_n \leq b_n \leq b_1 = 1 + y$ gilt für die Länge der Intervalle außerdem

$$\begin{aligned} |J_n| &= b_n^k - a_n^k = b_n^k \left[1 - \left(\frac{a_n}{b_n} \right)^k \right] = b_n^k \left[1 - \frac{a_n}{b_n} \right] \sum_{\ell=0}^{k-1} \left(\frac{a_n}{b_n} \right)^\ell \\ &= (b_n - a_n) \sum_{\ell=0}^{k-1} a_n^\ell b_n^{k-1-\ell} \leq |I_n| k(1+y)^{k-1}. \end{aligned}$$

Zu beliebigem $\varepsilon > 0$ finden wir ein $n \in \mathbb{N}$ mit $|I_n| < \varepsilon k^{-1}(1+y)^{1-k}$ und dann auch $|J_n| < \varepsilon$. Die Intervalle $J_1, J_2, J_3, \dots$ bilden also wie behauptet eine Intervallschachtelung. Nach Konstruktion gilt einerseits $0 \leq a_n \leq x \leq b_n$ und damit $a_n^k \leq x^k \leq b_n^k$ für alle $n \in \mathbb{N}$, und andererseits wissen wir aus (2.1) auch $a_n^k \leq y \leq b_n^k$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Aus der Eindeutigkeitsaussage des Intervallschachtelungsprinzips aus Satz 2.61 folgt damit die gewünschte Identität $x^k = y$.

Eindeutigkeit: Für zwei Zahlen $0 \leq x < \tilde{x}$ gilt nach Übung 2.63 immer $x^k < \tilde{x}^k$, folglich kann es nur eine einzige Zahl $x \geq 0$ mit $x^k = y$ geben. $\square$

★ **Übung 2.65** (Ungültigkeit des Intervallschachtelungsprinzips in $\mathbb{Q}$). Überlegen Sie sich anhand des Beweises von Satz 2.64, dass es sich bei $I_1 = [a_1, b_1]_{\mathbb{Q}} := [1, 3]_{\mathbb{Q}}$ und

$$I_{n+1} = [a_{n+1}, b_{n+1}]_{\mathbb{Q}} := \begin{cases} \left[a_n, \frac{a_n + b_n}{2} \right]_{\mathbb{Q}} & \text{für } \left(\frac{a_n + b_n}{2} \right)^2 \geq 2, \\ \left[\frac{a_n + b_n}{2}, b_n \right]_{\mathbb{Q}} & \text{für } \left(\frac{a_n + b_n}{2} \right)^2 < 2, \end{cases}$$

mit $n \in \mathbb{N}$, um eine Intervallschachtelung im geordneten Körper $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen handelt (wobei $[a, b]_{\mathbb{Q}} := \{x \in \mathbb{Q} : a \leq x \leq b\}$ das Intervall in $\mathbb{Q}$ im Sinne von Definition 2.35 bezeichne). Begründen Sie, warum es keine Zahl $q \in \mathbb{Q}$ gibt, die allen Intervallen angehört (und somit kein Intervallschachtelungsprinzip wie in Satz 2.61 in $\mathbb{Q}$ gilt).

Für Interessierte geben wir hier noch einen alternativen (und weniger schönen) “nicht-konstruktiven” Beweis für die Existenz einer Zahl $x \geq 0$ mit $x^k = y$ über die Supremumseigenschaft an, bei dem jedoch kein Verfahren angegeben wird, wie man die Zahl x konkret bestimmen kann.

★ *Beweis der Existenz über die Supremumseigenschaft.* Wir betrachten die Menge

$$M := \{a \in \mathbb{R} : a^k \leq y\} \subset \mathbb{R}.$$

Sie ist nicht-leer (denn es gilt insbesondere $0 \in M$) und nach oben beschränkt (wegen $(1+y)^k \geq 1+ky > y$ nach der Bernoulli-Ungleichung aus Übung 2.19 etwa durch die Zahl $1+y$). Folglich existiert nach der Supremumseigenschaft von $\mathbb{R}$ die Zahl $x := \sup M \in [0, \infty)$. Wir müssen noch begründen, dass $\sup M$ die gesuchte Zahl ist, also dass $(\sup M)^k = y$ gilt. Wir beweisen dies über Widerspruch und nehmen dafür $(\sup M)^k \neq y$ an.

- Fall $(\sup M)^k < y$: Wir wählen zunächst ein $\delta \in (0, 1]$ mit

$$\delta \cdot \sum_{\ell=0}^{k-1} \binom{k}{\ell} (\sup M)^\ell < y - (\sup M)^k$$

(beachte, dass die Existenz eines solchen δ aus Korollar 2.56 (i) mit einer geeigneten Wahl von ε

folgt). Dann sehen wir anhand des binomischen Lehrsatzes 1.94

$$\begin{aligned}
(\sup M + \delta)^k &= \sum_{\ell=0}^k \binom{k}{\ell} (\sup M)^\ell \delta^{k-\ell} \\
&\leq (\sup M)^k + \sum_{\ell=0}^{k-1} \binom{k}{\ell} (\sup M)^\ell \delta^{k-\ell} \\
&\leq (\sup M)^k + \delta \cdot \sum_{\ell=0}^{k-1} \binom{k}{\ell} (\sup M)^\ell < (\sup M)^k + y - (\sup M)^k = y.
\end{aligned}$$

Damit wäre $\sup M + \delta \in M$, was im Widerspruch dazu steht, dass $\sup M$ eine obere Schranke von M ist.

- Fall $(\sup M)^k > y$: Ähnlich zu oben wählen wir $\delta \in (0, 1]$

$$\delta \cdot \sum_{\ell=0}^{k-1} \binom{k}{\ell} (\sup M)^\ell < (\sup M)^k - y$$

sowie $\delta < \sup M$. Aus dem binomischen Lehrsatz 1.94 erhalten wir nun

$$\begin{aligned}
(\sup M - \delta)^k &= \sum_{\ell=0}^k \binom{k}{\ell} (\sup M)^\ell (-\delta)^{k-\ell} \\
&\geq (\sup M)^k - \sum_{\ell=0}^{k-1} \binom{k}{\ell} (\sup M)^\ell \delta^{k-\ell} \\
&\geq (\sup M)^k - \delta \cdot \sum_{\ell=0}^{k-1} \binom{k}{\ell} (\sup M)^\ell > (\sup M)^k + y - (\sup M)^k = y.
\end{aligned}$$

Damit haben wir wegen $\sup M - \delta > 0$ und Übung 2.63

$$a^k \leq y < (\sup M - \delta)^k \quad \Rightarrow \quad a < \sup M - \delta \quad \text{für alle } a \in M,$$

was im Widerspruch dazu steht, dass $\sup M$ die kleinste obere Schranke von M ist. $\square$

Definition 2.66 (*k-te Wurzel und Quadratwurzel*). Es seien $y \in \mathbb{R}_0^+$ und $k \in \mathbb{N}$. Wir bezeichnen die eindeutige Zahl $x \in \mathbb{R}_0^+$ mit $x^k = y$ als die *k-te Wurzel* von y und schreiben $x = \sqrt[k]{y} = y^{1/k}$. Im Fall $k = 2$ sprechen wir bei x auch von der *Quadratwurzel* von y und schreiben $x = \sqrt{y}$.

Bemerkungen 2.67.

- (1) Aus Übung 2.63 sieht man sofort

$$0 \leq a < b \quad \Rightarrow \quad \sqrt[k]{a} < \sqrt[k]{b} \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}.$$

- (2) Für $y \in \mathbb{R}^+$ und $k \in \mathbb{N}$ gerade ist auch $x = -\sqrt[k]{y} \in \mathbb{R}^-$ eine Lösung der Gleichung $x^k = y$. Lässt man sogar komplexe Zahlen zu (siehe Kapitel 3), so findet man allgemein zu jeder Zahl $y \neq 0$ genau k verschiedene (und möglicherweise komplexe) Zahlen x mit der Eigenschaft $x^k = y$.

Mithilfe von Intervallschachtelungen begründen wir noch, dass man sich reelle Zahlen wie gewohnt als Dezimalzahlen vorstellen darf.

Satz 2.68 (Dezimalbruchentwicklung). *Jede Zahl $x \in \mathbb{R}$ besitzt eine Dezimalbruchentwicklung*

$$x = z.x_1x_2x_3\ldots$$

mit $z \in \mathbb{Z}$ und $x_n \in \{0, 1, \dots, 9\}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ (wobei x_n auch als die n -te Nachkommastelle von x bezeichnet wird). Umgekehrt kann man jeder Dezimalbruchentwicklung eine eindeutige Zahl $x \in \mathbb{R}$ zuordnen. Die Dezimalbruchentwicklung ist dabei eine Kurznotation für die Intervallschachtelung $I_n = [a_n, b_n]$, $n \in \mathbb{N}$, mit Randpunkten

$$a_n := z + \sum_{k=1}^n x_k 10^{-k} \quad \text{und} \quad b_n := z + \sum_{k=1}^n x_k 10^{-k} + 10^{-n} \quad \text{für } z \geq 0$$

und

$$a_n := z - \sum_{k=1}^n x_k 10^{-k} - 10^{-n} \quad \text{und} \quad b_n := z - \sum_{k=1}^n x_k 10^{-k} \quad \text{für } z < 0.$$

Beweis. Dezimaldarstellung für eine gegebene Zahl $x \in \mathbb{R}$: Ist $x \geq 0$, so bestimmen wir $z \in \mathbb{N}_0$ über

$$z := \max\{m \in \mathbb{N}_0 : m \leq x\}$$

(womit $z \leq x < z + 1$ sichergestellt ist), und die Nachkommastellen induktiv über

$$x_1 := \max\{\ell \in \{0, 1, \dots, 9\} : z + \ell 10^{-1} \leq x\},$$

$$x_{n+1} := \max\{\ell \in \{0, 1, \dots, 9\} : a_n + \ell 10^{-(n+1)} \leq x\} \quad \text{für } n \in \mathbb{N}$$

(womit $a_{n+1} = a_n + x_{n+1} 10^{-(n+1)} \leq x < a_n + (x_{n+1} + 1) 10^{-(n+1)} = b_{n+1}$ sichergestellt ist). Betrachten wir dagegen eine reelle Zahl $x < 0$, so können wir die Dezimalentwicklung für $-x$ wie eben dargestellt bestimmen und dann die erhaltenen Intervalle spiegeln.

Zuordnung einer Zahl $x \in \mathbb{R}$ für eine gegebene Dezimaldarstellung: Nach Definition der Intervalle gilt die Inklusion $I_{n+1} \subset I_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Für die Länge haben wir außerdem die Abschätzung $|I_n| \leq 10^{-n}$, so dass die Intervalle nach Korollar 2.56 (iii) beliebig klein werden. Folglich bilden die Intervalle $I_1, I_2, I_3, \dots$ wie behauptet eine Intervallschachtelung und enthalten genau einen Punkt $x \in \mathbb{R}$ nach dem Intervallschachtelungsprinzip aus Satz 2.61. $\square$

Bemerkungen 2.69.

- (1) *Eine solche Dezimalbruchentwicklung ist eindeutig, wenn nicht alle bis auf endlich viele Nachkommastellen 9 sind (d.h. falls kein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert mit $x_n = 9$ für alle $n \geq n_0$). Ein Beispiel einer solchen Uneindeutigkeit mit Periode 9 sind die Zahlen $0.\bar{9} := 0,999\dots$ und 1. Unter Verwendung der geometrischen Summenformel aus Satz 1.83 sieht man, dass beide Zahlen in der Intervallschachtelung $I_n = [a_n, b_n]$, $n \in \mathbb{N}$, mit Randpunkten*

$$a_n = \sum_{k=1}^n 9 \cdot 10^{-k} = 1 - 10^{-n} \quad \text{und} \quad b_n = \sum_{k=1}^n 9 \cdot 10^{-k} + 10^{-n} = 1$$

liegen und daher nach dem Intervallschachtelungsprinzips übereinstimmen.

- (2) *Entsprechende Entwicklungen kann man für jede Basis $b \in \mathbb{N}$ mit $b \geq 2$ (anstelle von $b = 10$) angeben. Die Nachkommastellen haben dann jeweils einen Wert in $\{0, 1, \dots, b-1\}$ und die zugehörige Intervallschachtelung wird dann über (positive und negative) Potenzen der Basis b charakterisiert. Ein Beispiel ist die Binärdarstellung mit $b = 2$.*

Mächtigkeit von Mengen. Am Ende dieses Kapitels wollen wir noch Mengen (insbesondere $\mathbb{N}$, $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$) hinsichtlich der “Anzahl” ihrer Elemente vergleichen. Dazu führen wir das Konzept der Mächtigkeit einer Menge ein.

Definition 2.70 (Mächtigkeit von Mengen). *Es seien M_1, M_2 zwei beliebige Mengen. Wir sagen, dass*

- M_1 und M_2 gleichmächtig sind, falls es eine bijektive Abbildung $f: M_1 \rightarrow M_2$ gibt,
- M_1 höchstens gleichmächtig zu M_2 ist, falls M_1 und eine Teilmenge von M_2 gleichmächtig sind,
- M_1 weniger mächtig als M_2 ist, falls M_1 höchstens gleichmächtig zu M_2 ist, aber M_1 und M_2 nicht gleichmächtig sind.

Ferner bezeichnen wir eine Menge als

- endlich, falls sie leer oder gleichmächtig zur Menge $\{1, \dots, n\}$ für ein $n \in \mathbb{N}$ ist,
- abzählbar, falls sie gleichmächtig zur Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen ist,
- höchstens abzählbar, falls sie endlich oder abzählbar ist,
- überabzählbar, falls sie weder endlich noch abzählbar ist.

Bemerkungen 2.71.

- (1) *Die Anzahl der Elemente einer endlichen Menge ist wohldefiniert. Dazu zeigt man (mit vollständiger Induktion), dass eine Abbildung $f: \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, m\}$ nur für $n \leq m$ injektiv sein kann.*
- (2) *Mit Lemma 1.63 kann man sich überlegen, dass das Konzept der Gleichmächtigkeit eine Äquivalenzrelation für Mengen darstellt. Jede Äquivalenzklasse bezüglich der Gleichmächtigkeit (d.h. jede Klasse von Mengen der gleichen Mächtigkeit) kennzeichnet man über eine Kardinalzahl.*
- (3) *Man kann zeigen, dass zwei Mengen M_1 und M_2 gleichmächtig sind, falls M_1 höchstens gleichmächtig zu M_2 und M_2 höchstens gleichmächtig zu M_1 ist (Satz von Cantor–Bernstein–Schröder), und dass man je zwei beliebige Mengen in ihrer Mächtigkeit vergleichen kann (Vergleichbarkeitsatz). Damit stellt die Mächtigkeit eine Ordnung auf der Menge der Kardinalzahlen dar.*
- (4) *Um die Abzählbarkeit einer unendlichen Menge M zu zeigen, reicht es bereits, eine surjektive Abbildung $g: \mathbb{N} \rightarrow M$ anzugeben, da man daraus durch “Streichen von Wiederholungen” eine bijektive Funktion $f: \mathbb{N} \rightarrow M$ konstruieren kann, mittels der induktiven Definition*

$$\begin{aligned} f(1) &:= g(1) \\ f(n+1) &:= g(\min\{m \in \mathbb{N} : g(m) \neq f(k) \text{ für alle } k \leq n\}) \quad \text{für } n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Wir überlegen uns nun die wichtigsten Aussagen zu abzählbaren Mengen. Insbesondere zeigen wir, dass die Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahl abzählbar ist, obgleich sie eine viel “größere” Menge als die Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen zu sein scheint.

Satz 2.72 (abzählbare Mengen).

- (i) *Jede Teilmenge einer abzählbaren Menge ist höchstens abzählbar.*
- (ii) *Die Menge $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen ist abzählbar.*
- (iii) *Sind M_1, M_2 abzählbare Mengen, so ist $M_1 \times M_2$ ebenfalls abzählbar (und damit sind insbesondere die Mengen $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ sowie $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ abzählbar).*
- (iv) *Abzählbare Vereinigungen abzählbarer Mengen sind wieder abzählbar.*
- (v) *Die Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen ist abzählbar.*

Beweis.

- (i) Es seien M eine abzählbare Menge und $f: \mathbb{N} \rightarrow M$ eine bijektive Abbildung (deren Existenz nach Definition 2.70 der Abzählbarkeit klar ist). Wir betrachten nun eine beliebige Teilmenge $M' \subset M$. Ist M' eine endliche Menge, dann ist sie höchstens abzählbar und die Aussage gültig. Ist M' dagegen eine unendliche Menge, so definieren wir eine Funktion $f': \mathbb{N} \rightarrow M$ für ein beliebiges, fixiertes $m' \in M'$ über

$$f'(n) := \begin{cases} f(n) & \text{für } f(n) \in M', \\ m' & \text{für } f(n) \notin M'. \end{cases}$$

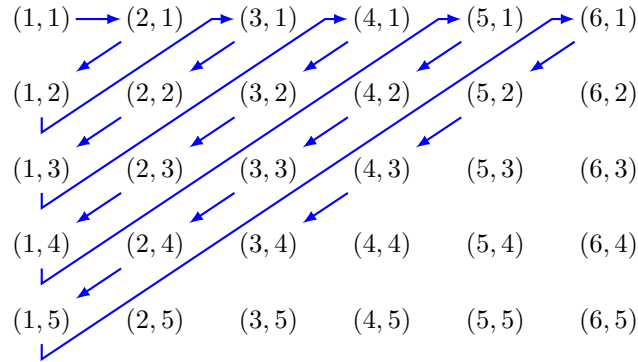
Da $f: \mathbb{N} \rightarrow M$ surjektiv war, ist auch $f': \mathbb{N} \rightarrow M'$ surjektiv. Nach Bemerkung 2.71 (2) ist M' also abzählbar.

- (ii) Hier reicht die Angabe einer bijektiven (oder auch nur surjektiven) Abbildung $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$, wie etwa

$$f(n) := \begin{cases} \frac{n-1}{2} & \text{für } n \text{ ungerade,} \\ -\frac{n}{2} & \text{für } n \text{ gerade.} \end{cases}$$

- (iii) Wir überlegen uns zunächst, dass wir ohne Einschränkung $M_1 = M_2 = \mathbb{N}$ annehmen können. Sind nämlich $f_1: \mathbb{N} \rightarrow M_1$, $f_2: \mathbb{N} \rightarrow M_2$ bijektive Abbildungen, so ist $f: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow M_1 \times M_2$ definiert mittels $f(m, n) = (f_1(m), f_2(n))$ für $m, n \in \mathbb{N}$ ebenfalls bijektiv. Folglich sind $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ und $M_1 \times M_2$ gleichmächtig.

Dass $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ abzählbar ist, beweisen wir anschließend über das *erste Cantorsche Diagonalargument*. Dazu zählen wir $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ folgendermaßen den Diagonalen nach ab:



Diese Abzählung wird gerade durch die *Cantorsche Paarungsfunktion* $f: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ realisiert, die definiert ist durch

$$f(m, n) = \frac{(m+n-1)(m+n-2)}{2} + n \quad \text{für } m, n \in \mathbb{N}$$

(beachte, dass $\frac{k(k-1)}{2}$ gerade die Anzahl der Elemente *vor* der k -ten Diagonale sind). Dass diese Funktion surjektiv ist, ist zwar durch die Konstruktion bereits klar, aber wir begründen dies noch kurz anhand der angegebenen Funktionenbeschreibung.

- Surjektivität: Ist $y \in \mathbb{N}$ vorgegeben, so bestimmen wir die Diagonale, auf der y kommt, über

$$k := \max\{\ell \in \mathbb{N}: \ell(\ell-1) < 2y\}.$$

Dann erhalten wir (m, n) mit $m+n = k+1$ und $f(m, n) = y$ über Umstellung der Funktionsgleichung als

$$m = \frac{k^2 + k + 2}{2} - y \quad \text{und} \quad n = y - \frac{k(k-1)}{2}$$

(wobei $m, n \in \mathbb{N}$ leicht über die Definition von k einzusehen ist).

- Injektivität: Sind $m, \tilde{m}, n, \tilde{n} \in \mathbb{N}$ mit $f(m, n) = f(\tilde{m}, \tilde{n})$, so verifizieren wir (beispielsweise durch Kontraposition) im ersten Schritt $m + n = \tilde{m} + \tilde{n}$, woraus zunächst $n = \tilde{n}$ und dann auch $m = \tilde{m}$ folgt.

- (iv) Sind $M_1, M_2, M_3, \dots$ abzählbare Mengen, so können wir für jede dieser Mengen eine Abzählung der Elemente

$$M_m := \{x_{m,1}, x_{m,2}, x_{m,3}, \dots\} \quad \text{für } m \in \mathbb{N}$$

finden. Damit haben wir die Darstellung

$$\bigcup_{m \in \mathbb{N}} M_m = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{x_{m,n}\} = \bigcup_{(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}} \{x_{m,n}\}.$$

Die Zuordnung $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \ni (m, n) \mapsto x_{m,n} \in \bigcup_{m \in \mathbb{N}} M_m$ ist surjektiv (eventuell aber nicht injektiv, da sich Elemente in verschiedenen Mengen wiederholen können). Da gemäß (iii) eine bijektive (und damit insbesondere auch surjektive) Funktion von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ existiert, stellt die Verkettung dieser beiden Funktionen dann nach Lemma 1.63 eine surjektive Funktion $f: \mathbb{N} \rightarrow \bigcup_{m \in \mathbb{N}} M_m$ dar. Die Abzählbarkeit der unendlichen Menge $\bigcup_{m \in \mathbb{N}} M_m$ folgt damit aus Bemerkung 2.71 (2).

- (v) Die Zuordnung $\mathbb{N} \times \mathbb{Z} \ni (n, z) \mapsto \frac{z}{n} \in \mathbb{Q}$ ist surjektiv (aber nicht injektiv, da beispielsweise $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$ gilt). Mithilfe von (iii) finden wir dann wie im Beweis von (iv) auch eine surjektive Funktion $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}$, und die Abzählbarkeit der unendlichen Menge $\mathbb{Q}$ folgt dann wieder aus Bemerkung 2.71 (2). $\square$

Bemerkung 2.73. Aus Satz 2.72 (i) folgt insbesondere, dass es keine unendliche Menge gibt, die weniger mächtig als $\mathbb{N}$ ist.

Wir zeigen nun, dass die Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen überabzählbar und damit mächtiger als $\mathbb{N}$ ist.

Satz 2.74. Die Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen ist überabzählbar.

Beweis. Wir beweisen diese Aussage über das *zweite Cantorsche Diagonalargument*. Es ist ausreichend zu zeigen, dass es keine surjektive Abbildung $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ gibt. Sei also $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ eine beliebige Abbildung. Wir konstruieren induktiv eine Intervallschachtelung, die einen Punkt $y \in [0, 1]$ mit $y \notin f(\mathbb{N})$ enthält. Dazu wählen wir

$$I_1 \subset [0, 1] \text{ ein abgeschlossenes Intervall der Länge } 3^{-1} \text{ mit } f(1) \notin I_1$$

(beispielsweise können wir eines der beiden disjunkten Intervalle $[0, \frac{1}{3}]$ und $[\frac{2}{3}, 1]$ nehmen, da nicht beide den Wert $f(1)$ enthalten können). Haben wir die Intervalle $I_1, \dots, I_n$ bereits konstruiert, so wählen wir

$$I_{n+1} \subset I_n \text{ ein abgeschlossenes Intervall der Länge } 3^{-(n+1)} \text{ mit } f(n+1) \notin I_{n+1}$$

(da nach Konstruktion $I_n = [a_n, a_n + 3^{-n}]$ für ein $a_n \in [0, 1]$ gilt, können wir analog zum ersten Schritt beispielsweise eines der beiden disjunkten Intervalle $[a_n, a_n + 3^{-(n+1)}]$ und $[a_n + 2 \cdot 3^{-(n+1)}, a_n + 3^{-n}]$ nehmen). Damit erhalten wir eine Folge $I_1, I_2, I_3, \dots$ von nicht-leeren, abgeschlossenen und endlichen Intervallen, die zum einen $I_{n+1} \subset I_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ erfüllen, und zum anderen wegen $|I_n| = 3^{-n}$ auch die zweite Eigenschaft einer Intervallschachtelung erfüllen, dass für jedes $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert, so dass die Länge des Intervalls I_{n_0} die Ungleichung $|I_{n_0}| < \varepsilon$ erfüllt. Nach dem Intervallschachtelungsprinzip aus Satz 2.61 existiert ein eindeutiges $y \in \mathbb{R}$ mit $y \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n \subset [0, 1]$. In der Konstruktion haben wir sichergestellt, dass $f(n) \notin I_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, und somit haben wir

$$f(k) \notin \bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}.$$

Damit haben wir $y \notin f(\mathbb{N})$ gezeigt, so dass die Funktion $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ nicht surjektiv ist. Folglich ist $\mathbb{R}$ wie behauptet überabzählbar. $\square$

Als direkte Folgerung erhalten wir die Überabzählbarkeit der Menge $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ der irrationalen Zahlen.

Korollar 2.75. Die Menge $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ der irrationalen Zahlen ist überabzählbar.

Beweis. Wir argumentieren mit Widerspruch. Wenn $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ abzählbar wäre, so müsste

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$$

als Vereinigung zweier abzählbarer Mengen nach Satz 2.72 abzählbar sein, was im Widerspruch zur Überabzählbarkeit von $\mathbb{R}$ aus Satz 2.74 steht. $\square$

Bemerkung 2.76 (Kontinuumshypothese). *Georg Cantor stellte 1878 eine Vermutung über die Mächtigkeit des Kontinuums, also der Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen, auf. Diese sogenannte Kontinuumshypothese besagt, dass es keine überabzählbare Menge gibt, die weniger mächtig als $\mathbb{R}$ ist, also dass es keine Menge gibt, deren Mächtigkeit echt zwischen der von $\mathbb{N}$ und $\mathbb{R}$ liegt. Basierend auf dem Zermelo–Fraenkel Axiomensystem der Mengenlehre lässt sich die Kontinuumshypothese weder widerlegen (Kurt Gödel, 1940) noch beweisen² (Paul Cohen, 1963).*

Es gibt auch eine verallgemeinerte Kontinuumshypothese (Philip Jourdain, 1905), die besagt, dass es keine Menge gibt, deren Mächtigkeit echt zwischen der einer unendlichen Menge M und ihrer Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ liegt. Wir überlegen uns zum Abschluss, dass diese beiden Mengen tatsächlich immer unterschiedliche Mächtigkeiten haben.

Satz 2.77. Für jede Menge M gilt, dass die Menge M weniger mächtig als ihre Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ ist.

★ *Beweis.* Wir beweisen die Aussage über das *dritte Cantorsche Diagonalargument*. Offensichtlich ist M höchstens gleichmächtig zu $\mathcal{P}(M)$ (da M gleichmächtig zu den einelementigen Teilmengen von M ist). Um zu zeigen, dass M tatsächlich weniger mächtig als $\mathcal{P}(M)$ ist, reicht es wie im Beweis von Satz 2.74 aus, wenn wir zeigen, dass es keine surjektive Abbildung $f: M \rightarrow \mathcal{P}(M)$ gibt. Sei also $f: M \rightarrow \mathcal{P}(M)$ eine beliebige Abbildung. Wir betrachten die Menge

$$N := \{x \in M : x \notin f(x)\} \in \mathcal{P}(M)$$

und überlegen uns, dass diese Menge nicht im Bild $f(M)$ enthalten sein kann (und damit f nicht surjektiv ist). Ist $x \in N$, so gilt $x \notin f(x)$ nach Definition von N und damit $f(x) \neq N$ (denn $f(x)$ enthält nicht das Element x aus N). Ist dagegen $x \in M \setminus N$, so gilt $x \in f(x)$ nach Definition von N und damit $f(x) \neq N$ (denn $f(x)$ enthält das Element x aus $M \setminus N$). Also haben wir mit $N \in \mathcal{P}(M)$ eine Menge identifiziert, die nicht im Bild von f enthalten ist. Daher ist keine Abbildung $f: M \rightarrow \mathcal{P}(M)$ surjektiv und damit auch nicht bijektiv. Folglich sind die Mengen M und $\mathcal{P}(M)$ nicht gleichmächtig, womit M dann tatsächlich weniger mächtig als $\mathcal{P}(M)$ ist. $\square$

Bemerkung 2.78. Aus Satz 2.77 schließen wir insbesondere, dass $\mathcal{P}(M)$ für jede unendliche Menge M schon überabzählbar ist.

★ **Übung 2.79.** Überlegen Sie sich, ob die folgenden Mengen abzählbar oder überabzählbar sind:

- (i) die Menge aller Funktionen $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$,
- (ii) die Menge aller Teilmengen von $\mathbb{N}$,
- (iii) die Menge aller endlichen Teilmengen von $\mathbb{N}$.

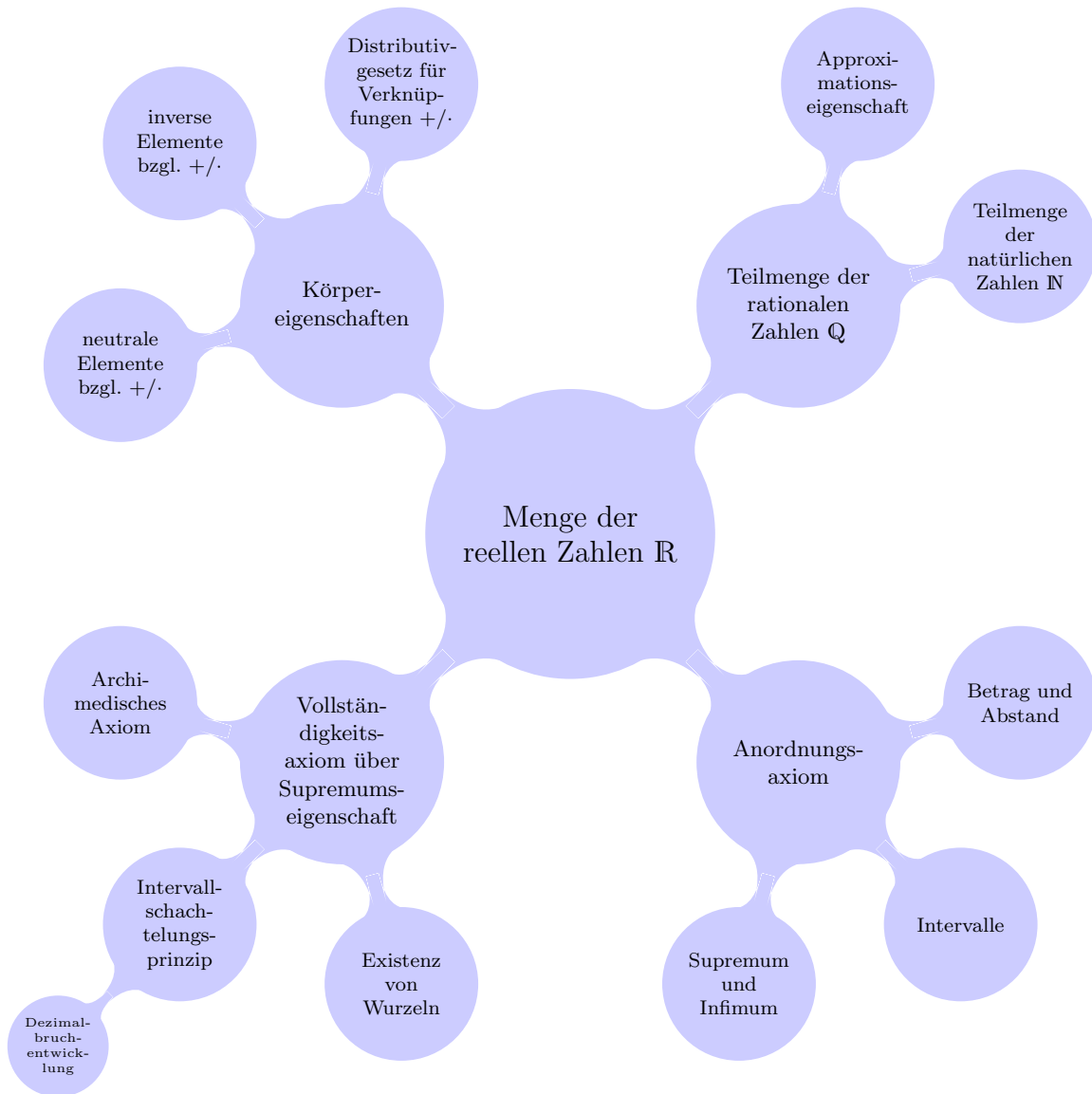
Bemerkung 2.80 (Hilberts Hotel). *Hilberts Hotel ist ein Gedankenexperiment aus der Mathematik, das zeigt, wie überraschend sich Unendlichkeit verhalten kann. Dieses Hotel hat dabei (abzählbar) unendlich viele Zimmer, die über die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ durchnummeriert sind. Im Gegensatz zu einem normalen Hotel mit nur endlich vielen Zimmer kann Hilberts Hotel noch weitere Gäste aufnehmen, auch wenn schon alle Zimmer belegt sind.*

²Für dieses Resultat wurde Paul Cohen 1966 mit der Fields-Medaille ausgezeichnet.

- *Kommt ein weiterer Gast, so schickt der Hotelier jeweils den Gast aus Zimmer $n \in \mathbb{N}$ in Zimmer $n + 1$. Das Zimmer 1 wird dadurch also für den neuen Gast frei.*
- *Kommt ein Reisebus mit $k \in \mathbb{N}$ weiteren Gästen an, so schickt der Hotelier jeweils den Gast aus Zimmer $n \in \mathbb{N}$ in Zimmer $n + k$. Die ersten k Zimmer werden dadurch für die neuen Gäste frei.*
- *Nun kommt ein vollbesetzter Hilbertscher Reisebus an, der (abzählbar) unendlich viele Sitzplätze hat, die ebenfalls über die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ durchnummeriert sind. Der Hotelier schickt in diesem Fall jeweils den Gast aus Zimmer $n \in \mathbb{N}$ in Zimmer $2n$. Damit sind alle Zimmer mit ungerader Zimmernummer frei, und der neue Gast mit dem Sitzplatz $m \in \mathbb{N}$ im Reisebus bekommt dann das Zimmer $2m - 1$.*

Übung 2.81. Überlegen Sie sich anhand von Satz 2.72 (iii), dass Hilberts Hotel auch kein Problem mit dem Hilbertschen Reiseunternehmen hat, das (abzählbar) unendlich viele Reisebusse mit jeweils (abzählbar) unendlich vielen Sitzplätzen vollbesetzt vorfahren lässt.

Mindmap. Überlegen Sie sich anhand der Mindmap, wie die wichtigsten Begriffe und Konzepte aus diesem Kapitel zusammenhängen und ob Sie diese verstanden haben!



Kapitel 3

Komplexe Zahlen

Im Körper $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen können wir zwei Zahlen addieren und multiplizieren, zu einem Element das additive Inverse und (falls in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$) das multiplikative Inverse bestimmen, je zwei Zahlen durch die Größer-gleich-Relation miteinander vergleichen und auch Wurzeln nicht-negativer Zahlen ziehen. In vielen Situationen erweist es sich als nützlich, auch Wurzeln aus negativen Zahlen bestimmen und insbesondere die Gleichung

$$x^2 = -1$$

lösen zu können, was in der Menge der reellen Zahlen wegen $x^2 \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ jedoch unmöglich ist. Wir wollen den Körper $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen nun so erweitern, dass diese Gleichung lösbar ist, und werden dabei den Körper $\mathbb{C}$ der *komplexen Zahlen* erhalten.

3.1 Der Körper der komplexen Zahlen

Zur Motivation der komplexen Zahlen nehmen wir an, dass ein Körper $\mathbb{C}$ existiert, für den $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ gilt und der ein ausgezeichnetes Element $i \in \mathbb{C}$ (die *imaginäre Einheit*) enthält, das die Gleichung $i^2 = -1$ erfüllt. Da $\mathbb{C}$ eine Erweiterung von $\mathbb{R}$ darstellen soll, wollen wir nun herleiten, wie die Verknüpfungen der Addition und Multiplikation in $\mathbb{C}$ definiert sein müssen, so dass $\mathbb{C}$ zu einem Körper wird.

- Sind $x, y \in \mathbb{R}$, so muss wegen der Abgeschlossenheit der Addition und Multiplikation in $\mathbb{R}$ auch $x + y \cdot i =: x + y i \in \mathbb{C}$ gelten.
- Die neutralen Elemente der Addition und der Multiplikation müssen $0 = 0 + 0i$ und $1 = 1 + 0i$ aus den reellen Zahlen bleiben.
- Wegen des Distributivgesetzes und der Kommutativität muss für die Verknüpfung der Addition in $\mathbb{C}$ die Formel

$$(x_1 + y_1 i) + (x_2 + y_2 i) = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) i$$

für alle $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ gelten. Als additives Inverses zu $x_1 + y_1 i \in \mathbb{C}$ erhalten wir damit $-x_1 + (-y_1) i =: -x_1 - y_1 i$, und insbesondere gilt $-(i) = -i$.

- Ähnlich bekommen wir unter weiterer Berücksichtigung der Assoziativität sowie der definierenden Identität $i^2 = -1$ für die imaginäre Einheit die Verknüpfung der Multiplikation in $\mathbb{C}$ als

$$(x_1 + y_1 i) \cdot (x_2 + y_2 i) = x_1 x_2 + (y_1 y_2) i^2 + (x_1 y_2 + x_2 y_1) i = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + (x_1 y_2 + x_2 y_1) i$$

für alle $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$. Daher folgt auch $(-i)^2 = (-i) \cdot (-i) = -1$, so dass die Gleichung $x^2 = -1$ als zweite Lösung noch $-i$ hat. Als multiplikatives Inverses zu $x_1 + y_1 i \in \mathbb{C}$ mit $x_1 + y_1 i \neq 0$ erhalten wir $(x_1 + y_1 i)^{-1} = (x_1 - y_1 i)/(x_1^2 + y_1^2)$, und insbesondere gilt damit $i^{-1} = -i$.

Auf Grundlage dieser Vorüberlegungen definieren wir die Menge der komplexen Zahlen mit den Verknüpfungen der Addition und der Multiplikation nun wie folgt:

Definition 3.1 (komplexe Zahlen als Paare in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, Addition und Multiplikation). Eine komplexe Zahl definieren wir als ein Element $z := (x, y)$ der Menge $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, auf der die Verknüpfungen der Addition und Multiplikation über

$$\begin{aligned}(x_1, y_1) + (x_2, y_2) &:= (x_1 + x_2, y_1 + y_2), \\ (x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) &:= (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1),\end{aligned}$$

für alle $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ definiert sind.

Bemerkung 3.2. Die Addition zweier komplexer Zahlen ist nichts anderes als die Addition der entsprechenden Vektoren in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Im nächsten Abschnitt 3.2 geben wir auch eine graphische Interpretation der Multiplikation zweier komplexer Zahlen.

Satz 3.3 ($\mathbb{C}$ als Körper). Die Menge der komplexen Zahlen, die wir mit $\mathbb{C}$ bezeichnen, ist mit den in Definition 3.1 angegebenen Verknüpfungen der Addition und Multiplikation ein Körper. Dabei sind

- $0 = (0, 0)$ und $1 = (1, 0)$ das neutrale Element der Addition bzw. Multiplikation,
- $(-x, -y)$ das additive Inverse zu $(x, y) \in \mathbb{C}$,
- $(x, -y)/(x^2 + y^2)$ das multiplikative Inverse zu $(x, y) \in \mathbb{C} \setminus \{(0, 0)\}$,
- $(0, 1) = i$ die imaginäre Einheit mit $i^2 = (-1, 0)$.

Beweis. Wir müssen die Eigenschaften eines Körpers nach Definition 2.7 verifizieren (und damit im Wesentlichen die Rechnungen aus der Motivation in der Vektorenschreibweise nachvollziehen). Für die Elemente $0 = (0, 0)$ und $1 = (1, 0)$ berechnen wir nach Definition der Addition und Multiplikation

$$(x, y) + (0, 0) = (x + 0, y + 0) = (x, y)$$

und

$$(x, y) \cdot (1, 0) = (x \cdot 1 - y \cdot 0, x \cdot 0 + 1 \cdot y) = (x, y)$$

für alle $(x, y) \in \mathbb{C}$. Damit haben wir nachgewiesen, dass es sich bei $(0, 0)$ und $(1, 0)$ tatsächlich um die neutralen Elemente der Addition bzw. Multiplikation handelt. Als nächstes berechnen wir für $(x, y) \in \mathbb{C}$

$$(x, y) + (-x, -y) = (x - x, y - y) = (0, 0) = 0$$

und für $(x, y) \in \mathbb{C} \setminus \{(0, 0)\}$

$$(x, y) \cdot \frac{(x, -y)}{x^2 + y^2} = \frac{(x^2 + y^2, xy - xy)}{x^2 + y^2} = (1, 0) = 1,$$

so dass die im Satz angegebenen Elemente tatsächlich das additive bzw. multiplikative Inverse zu (x, y) ist. Außerdem ist

$$i^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1) = (-1, 0),$$

wie behauptet. Abschließend rechnet man (mit den entsprechenden Aussagen auf dem Körper $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen) noch die Gültigkeit der Kommutativität und Assoziativität in $(\mathbb{C}, +)$ bzw. $(\mathbb{C}, \cdot)$ nach, ebenso wie das Distributivgesetz. Damit sind dann alle Eigenschaften eines Körpers für $\mathbb{C}$ und damit der Satz gezeigt. $\square$

Bemerkung 3.4 ($\mathbb{R}$ als Unterkörper von $\mathbb{C}$). Ist $\mathbb{K}$ ein Körper, so nennt man eine Teilmenge $\mathbb{K}' \subset \mathbb{K}$ einen Unterkörper von $\mathbb{K}$, falls $\mathbb{K}'$ die neutralen Elemente der Addition und Multiplikation enthält und falls $\mathbb{K}'$ mit den auf $\mathbb{K}'$ eingeschränkten Verknüpfungen der Addition und Multiplikation ein Körper ist (oder äquivalent dazu abgeschlossen unter Addition, Multiplikation und den entsprechenden Inversenbildungen ist). Man sieht leicht, dass die Menge $\mathbb{R} \times \{0\} = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$ einen Unterkörper des

Körpers $\mathbb{C}$ bildet, wobei die Addition und Multiplikation sich vereinfachen zu

$$\begin{aligned}(x_1, 0) + (x_2, 0) &:= (x_1 + x_2, 0), \\ (x_1, 0) \cdot (x_2, 0) &:= (x_1 x_2, 0),\end{aligned}$$

für alle $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$. Die Menge $\mathbb{R} \times \{0\}$ entspricht mit den Verknüpfungen der Addition und Multiplikation strukturell dem Körper $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen und wird daher mit diesem identifiziert (vgl. Satz 2.50). Aus diesem Grund verwendet man in der Regel die Notation $\mathbb{R} \ni x := (x, 0) \in \mathbb{R} \times \{0\}$, und die Identität $(x, y) = (x, 0) + (y, 0) \cdot (0, 1)$ für $x, y \in \mathbb{R}$ begründet dann die anfangs verwendete Darstellung $x + yi$.

Definition 3.5 (Real- und Imaginärteil, komplexe Konjugation, Betrag). *Es sei $z = x + yi$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ eine komplexe Zahl.*

- (i) Wir bezeichnen mit $\operatorname{Re}(z) = x$ den Realteil und mit $\operatorname{Im}(z) = y$ den Imaginärteil von z .
- (ii) Gilt $\operatorname{Im}(z) = 0$, so bezeichnen wir z als reell, und gilt $\operatorname{Re}(z) = 0$, so bezeichnen wir z als rein imaginär.
- (iii) Die komplexe Zahl $\bar{z} := x - yi$ heißt die komplex konjugierte Zahl zu z (die komplexe Zahl $\bar{z}$ erfüllt also $\operatorname{Re}(\bar{z}) = \operatorname{Re}(z)$ und $\operatorname{Im}(\bar{z}) = -\operatorname{Im}(z)$). Den Übergang $z \mapsto \bar{z}$ nennen wir die komplexe Konjugation.
- (iv) Den (Absolut-)Betrag von z definieren wir als

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{\operatorname{Re}(z)^2 + \operatorname{Im}(z)^2}.$$

Bemerkungen 3.6.

- (1) Eine komplexe Zahl ist eindeutig durch ihren Real- und Imaginärteil charakterisiert. Damit sind zwei komplexe Zahlen genau dann gleich, wenn sowohl ihre Realteile als auch ihre Imaginärteile übereinstimmen.
- (2) Für $z = x + 0 \cdot i$, stimmt der Betrag $|z| = \sqrt{x^2}$ der komplexen Zahl z gerade mit dem Betrag $|x|$ der reellen Zahl x aus Definition 2.32 überein.

Wir halten nun die wichtigsten Rechenregeln für die komplexe Konjugation und den Betrag fest.

Lemma 3.7 (Rechenregeln für komplexe Konjugation). *Für $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ gelten die folgenden Regeln:*

- (i) $\bar{\bar{z}} = z$,
- (ii) $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$,
- (iii) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$,
- (iv) $\operatorname{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$ und $\operatorname{Im}(z) = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$,
- (v) $z = \bar{z}$ gilt genau dann, wenn z reell ist, und $z = -\bar{z}$ gilt genau dann, wenn z rein imaginär ist,
- (vi) $z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$ für $z \neq 0$.

Beweis. Wir rechnen die einzelnen Rechenregeln einfach nach. Für die komplexen Zahlen $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ verwenden wir im Folgenden die Zerlegung in Real- und Imaginärteil

$$z = x + yi, \quad z_1 = x_1 + y_1 i \quad \text{und} \quad z_2 = x_2 + y_2 i,$$

mit reellen Zahlen $x, x_1, x_2, y, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$.

- (i) Unter komplexer Konjugation bleibt der Realteil gleich und der Imaginärteil wechselt sein Vorzeichen. Damit ergibt sich

$$\bar{z} = \overline{x + yi} = x - yi = x + (-y)i = x - (-y)i = x + yi = z.$$

(ii) Mit der Additionsregel für komplexe Zahlen haben wir

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{x_1 + x_2 + (y_1 + y_2)i} = x_1 + x_2 - (y_1 + y_2)i = x_1 - y_1 i + x_2 - y_2 i = \bar{z}_1 + \bar{z}_2.$$

(iii) Mit der Multiplikationsregel für komplexe Zahlen haben wir

$$\begin{aligned}\overline{z_1 \cdot z_2} &= \overline{x_1 x_2 - y_1 y_2 + (x_1 y_2 + x_2 y_1)i} \\ &= x_1 x_2 - y_1 y_2 - (x_1 y_2 + x_2 y_1)i = (x_1 - y_1 i) \cdot (x_2 - y_2 i) = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2.\end{aligned}$$

(iv) Einfaches Nachrechnen zeigt

$$\begin{aligned}z + \bar{z} &= x + y i + x - y i = 2x = 2 \operatorname{Re}(z), \\ z - \bar{z} &= x + y i - x + y i = 2y i = 2 \operatorname{Im}(z) i.\end{aligned}$$

(v) Es gelten die Äquivalenzen

$$\begin{aligned}z = \bar{z} &\Leftrightarrow \operatorname{Re}(z) = \operatorname{Re}(\bar{z}) \wedge \operatorname{Im}(z) = \operatorname{Im}(\bar{z}) \\ &\Leftrightarrow x = x \wedge y = -y \\ &\Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \text{ ist beliebig und } y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{Im}(z) = 0, \text{ d.h. } z \text{ ist reell}\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}z = -\bar{z} &\Leftrightarrow \operatorname{Re}(z) = -\operatorname{Re}(\bar{z}) \wedge \operatorname{Im}(z) = -\operatorname{Im}(\bar{z}) \\ &\Leftrightarrow x = -x \wedge y = y \\ &\Leftrightarrow x = 0 \text{ und } y \in \mathbb{R} \text{ ist beliebig} \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{Re}(z) = 0, \text{ d.h. } z \text{ ist rein imaginär.}\end{aligned}$$

(vi) Mit der Formel für das multiplikative Inverse aus Satz 3.3 und der Definition des Betrags haben wir schließlich auch

$$z^{-1} = \frac{x - y i}{x^2 + y^2} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}. \quad \square$$

Übung 3.8. Schreiben Sie die folgenden komplexen Zahlen in der Form $x + y i$:

- (i) $(3 - 5 i) \cdot (1 + 2 i) - (3 + 5 i) \cdot (1 - 2 i)$,
- (ii) $(1 + i)^4 + (2 + i) \cdot (1 - 3 i)$,
- (iii) $(-1 + \sqrt{3} i)^3$,
- (iv) $\frac{1+2i}{3-4i} + \frac{6-7i}{5i}$.

Lemma 3.9 (Rechenregeln für den Absolutbetrag). Für $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ gelten die folgenden Regeln:

- (i) $|z| \geq 0$ mit $|z| = 0$ genau dann, wenn $z = 0$ gilt,
- (ii) $|z| = |\bar{z}|$ und $z \cdot \bar{z} = |z|^2$,
- (iii) $|\operatorname{Re}(z)| \leq |z|$ und $|\operatorname{Im}(z)| \leq |z|$,
- (iv) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$,
- (v) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ (Dreiecksungleichung),
- (vi) $|z_1 - z_2| \geq ||z_1| - |z_2||$ (umgekehrte Dreiecksungleichung).

Beweis. Im Folgenden verwenden wir die Schreibweise $z = x + y i$, mit reellen Zahlen $x, y \in \mathbb{R}$.

- (i) Für die Wurzel einer nicht-negativen, reellen Zahl $a \geq 0$ gilt $\sqrt{a} \geq 0$ mit $\sqrt{a} = 0$ genau dann, wenn $a = 0$. Wegen $x^2 \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x^2 = 0$ nur für $x = 0$ und $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ erhalten wir dann sofort $|z| \geq 0$, mit $|z| = 0$ genau dann, wenn $x = y = 0$, also wenn $z = 0$ gilt.

- (ii) Wir verifizieren die erste Identität über

$$|z| = |x + yi| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + (-y)^2} = |x - yi| = |\bar{z}|,$$

und die zweite Identität erhalten wir anhand von

$$z \cdot \bar{z} = (x + yi) \cdot (x - yi) = x^2 - y^2 i^2 = x^2 + y^2 = |z|^2.$$

- (iii) Mit $\sqrt{a} < \sqrt{b}$ für $0 \leq a < b$ aus Bemerkung 2.67 (1) erhalten wir

$$|\operatorname{Re}(z)| = \sqrt{x^2} \leq \sqrt{x^2 + y^2} = |z|,$$

$$|\operatorname{Im}(z)| = \sqrt{y^2} \leq \sqrt{x^2 + y^2} = |z|.$$

- (iv) Mithilfe von (ii) und Lemma 3.7 (iii) sehen wir

$$|z_1 \cdot z_2|^2 = (z_1 \cdot z_2) \cdot (\overline{z_1 \cdot z_2}) = (z_1 \cdot \bar{z}_1) \cdot (z_2 \cdot \bar{z}_2) = |z_1|^2 \cdot |z_2|^2,$$

und die Identität $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$ ergibt sich dann aus der Nicht-Negativität des Betrags und Wurzelziehen.

- (v) Wir berechnen zunächst mit (ii) und mit Lemma 3.7 (i)–(iii)

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2|^2 &= (z_1 + z_2) \cdot (\overline{z_1 + z_2}) \\ &= (z_1 + z_2) \cdot (\bar{z}_1 + \bar{z}_2) \\ &= z_1 \cdot \bar{z}_1 + z_2 \cdot \bar{z}_1 + z_1 \cdot \bar{z}_2 + z_2 \cdot \bar{z}_2 = |z_1|^2 + \bar{z}_1 \cdot z_2 + \overline{z_1 \cdot z_2} + |z_2|^2. \end{aligned}$$

Wegen $\bar{z}_1 \cdot z_2 + \overline{z_1 \cdot z_2} = 2 \operatorname{Re}(\bar{z}_1 \cdot z_2)$ nach Lemma 3.7 (iv) erhalten wir dann aus (iii) und (iv)

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2|^2 &= |z_1|^2 + 2 \operatorname{Re}(\bar{z}_1 \cdot z_2) + |z_2|^2 \\ &\leq |z_1|^2 + 2|z_1 \cdot z_2| + |z_2|^2 = |z_1|^2 + 2|z_1| \cdot |z_2| + |z_2|^2 = (|z_1| + |z_2|)^2. \end{aligned}$$

Nach Wurzelziehen ergibt sich daraus die Behauptung.

- (vi) Die umgekehrte Dreiecksungleichung folgt genau wie im reellen Fall in Lemma 2.33 aus der Dreiecksungleichung. $\square$

Bemerkung 3.10 (Unmöglichkeit einer Anordnung in $\mathbb{C}$). *Man kann sich nun die Frage stellen, ob man auf dem Körper $\mathbb{C}$ eine Ordnung im Sinne von Definition 2.15 finden kann, die also mit Addition und Multiplikation verträglich ist. In Lemma 2.17 hatten wir für einen allgemeinen, geordneten Körper $\mathbb{K}$ bewiesen, dass $x^2 > 0$ für alle $x \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ und damit insbesondere $1 > 0$ gelten muss. Mit der Forderung der Lösbarkeit der Gleichung $x^2 = -1$ durch die imaginäre Einheit gilt in $\mathbb{C}$ jedoch $i^2 = -1 < 0$. Folglich gibt es für $\mathbb{C}$ – im Gegensatz zu $\mathbb{R}$ – keine mit der Körperstruktur verträgliche Ordnungsrelation.*

Im Körper $\mathbb{C}$ können wir wegen der fehlenden Ordnungsrelation zwar keine oberen und unteren Schranken für Mengen definieren, jedoch über den Betrag deren Beschränktheit diskutieren.

Definition 3.11 (beschränkte Menge). *Wir bezeichnen eine Menge $M \subset \mathbb{C}$ als beschränkt, falls die Menge $\{|z| : z \in M\} \subset \mathbb{R}_0^+$ eine beschränkte Teilmenge in $\mathbb{R}$ ist, d.h. falls ein $a \in \mathbb{R}$ existiert mit*

$$|z| \leq a \quad \text{für alle } z \in M.$$

Bemerkung 3.12. *Für Teilmengen $M \subset \mathbb{R}$ ist die hier definierte Beschränktheit über den Betrag gleichbedeutend mit der Beschränktheit über untere und obere Schranken aus Definition 2.26 (i):*

- *Ist M beschränkt im Sinne von Definition 2.26, so existieren Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$, so dass $a \leq x \leq b$ und damit auch $|x| = \max\{-x, x\} \leq \max\{-a, b\}$ für alle $x \in M$ gilt.*
- *Ist M beschränkt im Sinne von Definition 3.11, so existiert eine Zahl $a \in \mathbb{R}$, so dass $|x| \leq a$ und damit auch $-a \leq x \leq a$ gilt.*

Lösen quadratischer Gleichungen. Unsere Motivation der Erweiterung der Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen zu der Menge $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen war die Lösbarkeit der quadratischen Gleichung $z^2 = -1$. Dass die komplexen Zahlen $z = \pm i$ die einzigen Lösungen dieser Gleichung sind, überlegen wir uns mit der Schreibweise $z = x + yi$ für $x, y \in \mathbb{R}$ wie folgt

$$\begin{aligned} z^2 = -1 &\Leftrightarrow x^2 - y^2 + 2xyi = -1 = -1 + 0 \cdot i \\ &\Leftrightarrow x^2 - y^2 = -1 \wedge xy = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \wedge y = \pm 1 \quad \Leftrightarrow \quad z = \pm i. \end{aligned}$$

Analog erhalten wir:

Lemma 3.13. *Es sei $w \in \mathbb{C}$. Die quadratische Gleichung $z^2 = w$ hat für $w = 0$ nur die Lösung $z = 0$ und für $w \neq 0$ genau die zwei Lösungen $z_{\pm} \in \mathbb{C}$ mit*

$$z_{\pm} = \begin{cases} \pm \left(\sqrt{\frac{1}{2}(|w| + \operatorname{Re}(w))} + \sqrt{\frac{1}{2}(|w| - \operatorname{Re}(w))} i \right) & \text{falls } \operatorname{Im}(w) \geq 0, \\ \pm \left(\sqrt{\frac{1}{2}(|w| + \operatorname{Re}(w))} - \sqrt{\frac{1}{2}(|w| - \operatorname{Re}(w))} i \right) & \text{falls } \operatorname{Im}(w) < 0. \end{cases}$$

Beweis. Der Einfachheit halber verwenden wir die Notation $w = u + vi$ und $z = x + yi$ mit $u, v, x, y \in \mathbb{R}$. Wir starten mit der Äquivalenz

$$\begin{aligned} z^2 = w &\Leftrightarrow x^2 - y^2 + 2xyi = w = u + vi \\ &\Leftrightarrow x^2 - y^2 = u \wedge 2xy = v. \end{aligned}$$

Da im Fall $z^2 = w$ nach Lemma 3.9 (iv) auch

$$x^2 + y^2 = |z|^2 = |z^2| = |w|$$

gilt, erhalten wir

$$z^2 = w \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = \frac{1}{2}(|w| + u) \wedge y^2 = \frac{1}{2}(|w| - u) \wedge 2xy = v.$$

Die ersten beiden Bedingungen auf der rechten Seite bestimmen den Wert von x und y bis auf Vorzeichen bereits eindeutig, und die letzte Bedingung stellt wegen

$$(|w| + u)(|w| - u) = |w|^2 - u^2 = v^2$$

nur noch eine Bedingung an die Vorzeichen dar (bzw. ist für $v = 0$ trivialerweise erfüllt). Die reellen Zahlen x und y müssen also im Fall $v > 0$ das selbe Vorzeichen und im Fall $v < 0$ verschiedene Vorzeichen haben. Mit dieser Vorzeichenbedingung folgern wir die Behauptung des Lemmas dann aus

$$\begin{aligned} x^2 = \frac{1}{2}(|w| + u) &\Leftrightarrow x = \pm \sqrt{\frac{1}{2}(|w| + \operatorname{Re}(w))}, \\ y^2 = \frac{1}{2}(|w| - u) &\Leftrightarrow y = \pm \sqrt{\frac{1}{2}(|w| - \operatorname{Re}(w))}, \end{aligned}$$

wobei die Wurzeln auf den rechten Seiten jeweils wohldefiniert sind, da die Ungleichung $|u| \leq |w|$ aus Lemma 3.9 (iii) bekannt ist. Da (nur) im Fall $w = 0$ sowohl $x = 0$ also auch $y = 0$ gilt, haben wir nur in diesem Fall mit $z = 0$ eine eindeutige Lösung, und andernfalls, für $w \neq 0$, genau die zwei Lösungen, die in der Aussage des Lemmas angegeben sind. $\square$

Bemerkung 3.14. *Für $w \in \mathbb{R}$ haben wir $|w| - \operatorname{Re}(w) = |w| - w = 0$ sowie $|w| + \operatorname{Re}(w) = |w| + w = 2w$ im Fall $w \geq 0$ und $|w| + \operatorname{Re}(w) = |w| + w = 0$ sowie $|w| - \operatorname{Re}(w) = |w| - w = 2|w|$ im Fall $w \leq 0$. Somit erhalten wir als Lösungen im Fall $w > 0$ die beiden reellen Zahlen $z_{\pm} = \pm\sqrt{w}$ (wie schon über $\mathbb{R}$) und im Fall $w < 0$ die beiden rein imaginären Zahlen $z_{\pm} = \pm\sqrt{|w|}i$.*

Allgemeiner finden wir zu jeder quadratischen Gleichung mit komplexwertigen Koeffizienten immer eine Lösung, d.h. es braucht für deren Lösbarkeit keine nochmalige Erweiterung des Zahlenraums.

Satz 3.15. Es seien $b, c \in \mathbb{C}$. Die quadratische Gleichung $z^2 + bz + c = 0$ besitzt mindestens eine Lösung $z \in \mathbb{C}$.

Beweis. Mit quadratischer Ergänzung schreiben wir die Gleichung zunächst um zu

$$0 = z^2 + bz + c = \left(z + \frac{b}{2}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4} \Leftrightarrow \left(z + \frac{b}{2}\right)^2 = \frac{b^2}{4} - c.$$

Nach dem letzten Lemma 3.13 wissen wir, dass für $\tilde{w} := \frac{b^2}{4} - c \in \mathbb{C}$ mindestens eine Zahl $\tilde{z} \in \mathbb{C}$ mit $\tilde{z}^2 = \tilde{w}$ existiert. Daher ist $z := -\frac{b}{2} + \tilde{z} \in \mathbb{C}$ eine Lösung zu $z^2 + bz + c = 0$. $\square$

Bemerkungen 3.16.

- (1) Sind $b, c \in \mathbb{R}$ mit $b^2 - 4c \geq 0$, so existiert mindestens eine reelle Lösung $z \in \mathbb{R}$, die nach der Mitternachtsformel gegeben ist als

$$z_{\pm} = -\frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4} - c},$$

also der Summe aus $-\frac{b}{2}$ und einer Lösung von $\tilde{z}^2 = \frac{b^2}{4} - c$. Insofern ist die im Beweis bestimmte Lösung im allgemeinen Fall mit $b, c \in \mathbb{C}$ ebenfalls von dieser Struktur.

- (2) Allgemeiner besagt der Fundamentalsatz der Algebra, dass jedes nicht-konstante komplexe Polynom der Form

$$z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1z + a_0 = 0$$

für $n \geq 1$ und komplexe Koeffizienten $a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$ mindestens eine Lösung $z \in \mathbb{C}$ besitzt.

Übung 3.17. Bestimmen Sie alle Lösungen der quadratischen Gleichungen

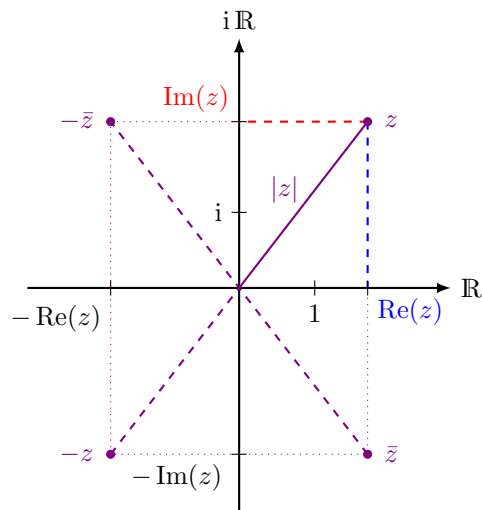
- (i) $z^2 = 2 + 2i$,
(ii) $z^2 + 4z + 8 = 0$.

3.2 Darstellung in der komplexen Zahlenebene

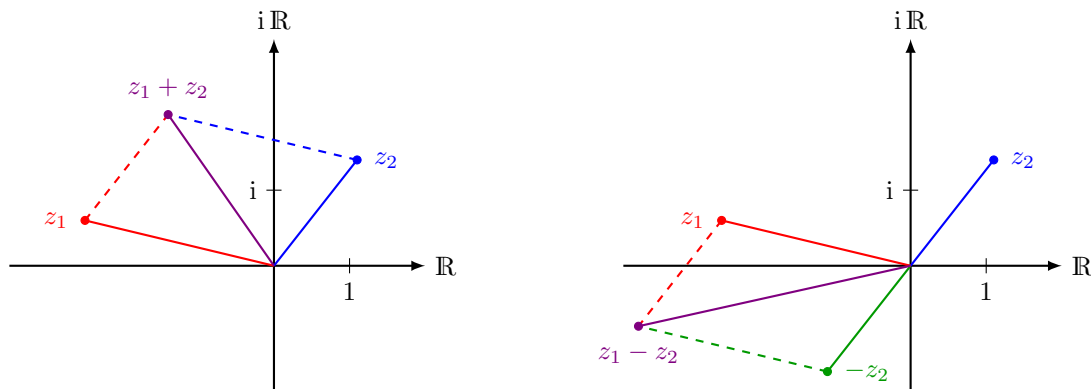
Wir überlegen uns noch kurz, wie man komplexe Zahlen und einfache Operationen mit komplexen Zahlen, wie die komplexe Konjugation, Addition (bzw. Subtraktion) und Multiplikation (bzw. Division), in der komplexen Zahlenebene graphisch darstellen kann.

Verwenden wir wieder die Darstellung $z = x + yi$ mit $x, y \in \mathbb{R}$, so können wir uns z als den Punkt (x, y) in der Ebene $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ vorstellen. Dabei entspricht x gerade dem Realteil und y dem Imaginärteil von z , und der Betrag $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ stellt den Abstand von (x, y) zum Ursprung dar.

Komplexe Konjugation und additive Inverse. Bei komplexer Konjugation von z ändert sich das Vorzeichen des Imaginärteils, also erhält man $\bar{z}$ in der komplexen Ebene durch Spiegelung von z an der reellen Achse. Beim additiven Inversen $-z$ ändert sich dagegen das Vorzeichen von Real- und Imaginärteil, also erhält man $-z$ durch Punktspiegelung von z am Ursprung. Damit liegen die Punkte $z, \bar{z}, -z$ und $-\bar{z}$ auf den Ecken eines Rechtecks (mit Seitenlängen $2|\operatorname{Re}(z)|$ und $2|\operatorname{Im}(z)|$), das achsensymmetrisch zu reeller und imaginärer Achse ist.



Addition und Subtraktion. Haben wir zwei komplexe Zahlen $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, so erhalten wir die Summe $z_1 + z_2 \in \mathbb{C}$, indem wir jeweils die Real- und Imaginärteile von z_1 und z_2 addieren. Dies entspricht in der komplexen Zahlenebene gerade der Addition (oder dem Aneinanderhängen) der zweidimensionalen Vektoren von z_1 und z_2 . Der Ursprung bildet mit den Punkten z_1 (bzw. z_2) und $z_1 + z_2$ dann ein Dreieck mit Seitenlängen $|z_1|$, $|z_2|$ und $|z_1 + z_2|$. Die Seitenlänge $|z_1 + z_2|$ ist dabei höchstens so lang wie die Summe $|z_1| + |z_2|$ der beiden anderen Seitenlängen (das ist gerade die Dreiecksungleichung). Ersetzen wir z_2 durch Spiegelung am Ursprung durch $-z_2$, so ergibt sich analog die Differenz $z_1 - z_2 \in \mathbb{C}$.



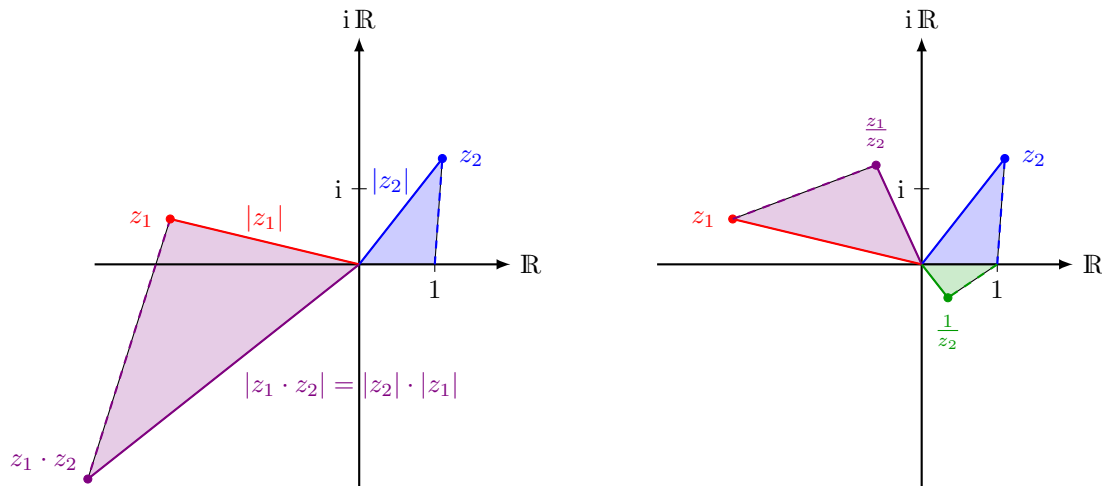
★ **Multiplikation und Division.** Bilden wir das Produkt $z_1 \cdot z_2 \in \mathbb{C}$ zweier komplexer Zahlen $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, so stellen wir fest, dass die beiden Dreiecke mit Eckpunkten $\{0, 1, z_2\}$ und $\{0, z_1, z_1 \cdot z_2\}$ ähnlich sind. Die Seitenlängen des ersten Dreiecks sind nämlich gerade

$$1, \quad |z_2|, \quad |z_2 - 1|,$$

und die Seitenlängen des zweiten Dreiecks sind nach Lemma 3.9 (iv)

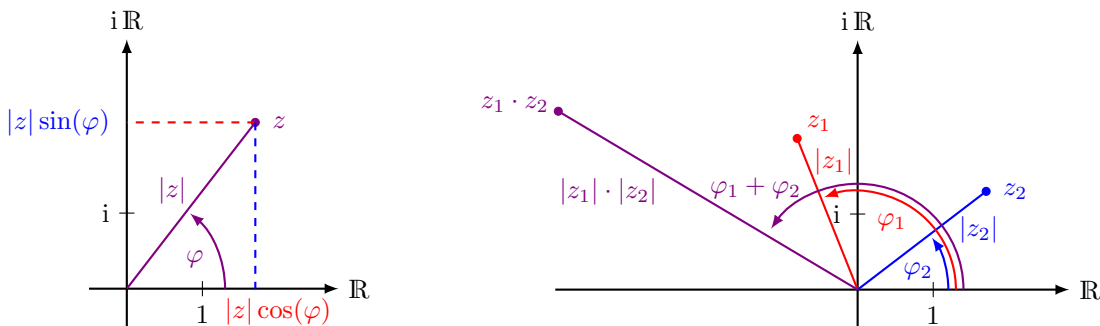
$$|z_1|, \quad |z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|, \quad |z_1 \cdot z_2 - z_1| = |z_1| \cdot |z_2 - 1|,$$

also jeweils das $|z_1|$ -fache des ersten Dreiecks. Insbesondere ist damit der Winkel, der von den Punkten $1, 0, z_2$ eingeschlossen wird, der gleiche wie der, der von den Punkten $z_1, 0, z_1 \cdot z_2$ eingeschlossen wird. Graphisch kann man daher den Punkt $z_1 \cdot z_2$ bestimmen, indem man zunächst den Winkel $1, 0, z_2$ (unter Beachtung der Orientierung, siehe Graphik) beim Ursprung an die Gerade, die durch 0 und z_1 läuft, aufträgt und dann beim entstandenen Winkel eine Strecke der Länge $|z_1| \cdot |z_2|$ abträgt. Umgekehrt kann man diesen Zusammenhang auch für die Bildung des multiplikativen Inversen einer komplexen Zahl $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ nutzen (denn hier soll das Produkt gerade 1 ergeben).



Bemerkung 3.18 (Polardarstellung komplexer Zahlen). Jede komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$ ist eindeutig über ihre Länge $|z|$ sowie den (orientierten) Winkel $\varphi \in [0, 2\pi)$ zur reellen Achse charakterisiert. Im Vorgriff auf die trigonometrischen Funktionen bemerken wir an dieser Stelle schon, dass wir z dann in Polardarstellung schreiben können als

$$z = |z| \cos(\varphi) + |z| \sin(\varphi) i.$$



Mit den Additionstheoremen für Cosinus und Sinus

$$\cos(\varphi_1 + \varphi_2) = \cos(\varphi_1) \cos(\varphi_2) - \sin(\varphi_1) \sin(\varphi_2)$$

$$\sin(\varphi_1 + \varphi_2) = \sin(\varphi_1) \cos(\varphi_2) + \cos(\varphi_1) \sin(\varphi_2)$$

erhalten wir für das Produkt zweier komplexer Zahlen z_1, z_2 (mit entsprechenden Winkeln φ_1, φ_2) dann die Darstellung

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (|z_1| \cos(\varphi_1) + |z_1| \sin(\varphi_1) i) \cdot (|z_2| \cos(\varphi_2) + |z_2| \sin(\varphi_2) i) \\ &= |z_1| \cdot |z_2| (\cos(\varphi_1) \cos(\varphi_2) - \sin(\varphi_1) \sin(\varphi_2) + \sin(\varphi_1) \cos(\varphi_2) i + \cos(\varphi_1) \sin(\varphi_2) i) \\ &= |z_1| \cdot |z_2| \cos(\varphi_1 + \varphi_2) + |z_1| \cdot |z_2| \sin(\varphi_1 + \varphi_2) i. \end{aligned}$$

Folglich haben wir als Länge von $z_1 \cdot z_2$ gerade das Produkt $|z_1| \cdot |z_2|$ und als Winkel von $z_1 \cdot z_2$ die Summe $\varphi_1 + \varphi_2$ der Winkel von z_1 und z_2 , wie wir es uns gerade graphisch überlegt hatten.

Übung 3.19. Zeichnen Sie die folgenden Mengen in die komplexe Zahlenebene ein:

- (i) $M_1 := \{z \in \mathbb{C} : |z - i| = |z + 1|\}$,
- (ii) $M_2 := \{z \in \mathbb{C} : 1 \leq |z + i| \leq 2\}$,
- (iii) $M_3 := \{z \in \mathbb{C} : |z| \geq 1, \operatorname{Re}(z) \leq \frac{1}{2} \wedge \operatorname{Im}(z) > 0\}$,
- (iv) $M_4 := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(\frac{z-1}{z-1}) \geq 1\}$.

Kapitel 4

Folgen

In diesem Kapitel beginnen wir, anhand des Begriffs der Folge ein zentrales Konzept der Analysis, nämlich *Grenzprozesse*, zu diskutieren. Insbesondere die später betrachteten Eigenschaften von Stetigkeit und Differenzierbarkeit von Funktionen basieren im Wesentlichen auf ähnlichen Grenzprozessen, die jedoch für Folgen etwas leichter und vor allem anschaulicher nachvollzogen werden können.

Definition 4.1 (Folge). *Es sei M eine nicht-leere Menge. Unter einer Folge in M verstehen wir eine Abbildung $a: \mathbb{N} \rightarrow M$. Wir nennen die zu $n \in \mathbb{N}$ gehörigen Funktionswerte $a(n) \in M$ die Folgenglieder. Meist schreiben wir für die Folgenglieder kurz a_n anstelle von $a(n)$ und dementsprechend für die Abbildung auch $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ anstelle von a .*

Ist $M = \mathbb{R}$ oder $M = \mathbb{C}$, so sprechen wir von einer reellen bzw. komplexen Folge anstelle von einer Folge in $\mathbb{R}$ bzw. in $\mathbb{C}$.

Bemerkungen 4.2.

- (1) *Wir interessieren uns vor allem für das asymptotische Verhalten von Folgen (d.h. für “sehr große” Folgenindizes n). Da hierbei endlich viele Werte der Folge keine Rolle spielen werden, beschränken wir uns bei Folgen auf die Betrachtung der Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen als Indexmenge (anstelle aller ganzen Zahlen ab einem kleinsten Index n_0 , die man stets durch Indexverschiebung auf die in der Definition angegebene Indexmenge $\mathbb{N}$ zurückführen kann).*
- (2) *Prinzipiell kann man auch allgemeinere und sogar abzählbare Indexmengen I zulassen und Abbildungen $a: I \rightarrow M$ betrachten. Ist dabei I überabzählbar (wie etwa $I = \mathbb{R}$), so spricht man von einer Familie in M .*
- (3) *Der Wertebereich M einer Folge (wie auch der einer Familie) kann sehr allgemein sein. Insbesondere diskutieren wir später auch Folgen von Funktionen, bei denen M also eine Funktionenmenge darstellt.*

Beispiele 4.3. Die Folgenglieder werden typischerweise explizit oder rekursiv angegeben.

- (i) *Konstante Folge:* M eine beliebige nicht-leere Menge, $m \in M$ und $a_n := m$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
- (ii) *Folge der natürlichen Zahlen:* $M = \mathbb{N}$ und $a_n := n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
- (iii) *Folge der ungeraden natürlichen Zahlen:* $M = \mathbb{N}$ und $a_n := 2n - 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
- (iv) *Folge der Primzahlen:* $M = \mathbb{N}$ und a_n die n -te Primzahl für alle $n \in \mathbb{N}$.
- (v) *Fibonacci-Folge:* $M = \mathbb{N}$, $a_1 = a_2 = 1$ und $a_{n+2} := a_{n+1} + a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ (vgl. Übung 1.92).
- (vi) *Harmonische Folge:* $M = \mathbb{Q}$ und $a_n := \frac{1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
- (vii) *Alternierende harmonische Folge:* $M = \mathbb{Q}$ und $a_n := (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

- (viii) *Folge der Zinsfaktoren:* $M = \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$ (der jährliche Zinssatz) und $a_n := (1 + \frac{x}{n})^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ (damit entspricht a_n dem Zinsfaktor nach einem Jahr bei $\frac{1}{n}$ -jährlicher Verzinsung).
- (ix) *Folge der Dezimalbruchentwicklung:* $M = \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$ und $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ die Folge der unteren Intervallgrenzen der Dezimalbruchentwicklung aus Satz 2.68.
- (x) *Geometrische Folge:* $M = \mathbb{C}$, $z \in \mathbb{C}$ und $a_n := z^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

In diesem Kapitel werden wir fast ausschließlich Folgen in $\mathbb{R}$ und in $\mathbb{C}$ betrachten. Bei der Untersuchung des Grenzwertverhaltens können sich die folgenden Eigenschaften (von reellwertigen Funktionen und damit speziell auch) von reellen Folgen als nützlich erweisen.

Definition 4.4 (Monotonie und Beschränktheit von Funktionen). *Es sei $X \subset \mathbb{R}$ nicht-leer. Wir nennen eine Abbildung $f: X \rightarrow \mathbb{R}$*

- monoton wachsend, falls $f(x) \leq f(y)$ für alle $x, y \in X$ mit $x \leq y$ gilt,
- monoton fallend, falls $f(x) \geq f(y)$ für alle $x, y \in X$ mit $x \leq y$ gilt,
- monoton, falls f entweder monoton wachsend oder monoton fallend ist,
- streng monoton wachsend, falls $f(x) < f(y)$ für alle $x, y \in X$ mit $x < y$ gilt,
- streng monoton fallend, falls $f(x) > f(y)$ für alle $x, y \in X$ mit $x < y$ gilt,
- streng monoton, falls f entweder streng monoton wachsend oder streng monoton fallend ist,
- nach oben beschränkt, falls die Menge $f(X)$ nach oben beschränkt ist,
- nach unten beschränkt, falls die Menge $f(X)$ nach unten beschränkt ist.

Des Weiteren nennen wir eine Abbildung $f: X \rightarrow \mathbb{C}$ beschränkt, falls die Menge $f(X)$ beschränkt ist.

Bemerkung 4.5. Wie man sich leicht überlegt, ist eine reelle Folge $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ also

- monoton wachsend (bzw. fallend), falls $a_n \leq a_{n+1}$ (bzw. $a_n \geq a_{n+1}$) für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt,
- streng monoton wachsend (bzw. fallend), falls $a_n < a_{n+1}$ (bzw. $a_n > a_{n+1}$) für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt,
- nach oben (bzw. unten) beschränkt, falls $a_n \leq K$ (bzw. $a_n \geq K$) für alle $n \in \mathbb{N}$ und ein $K \in \mathbb{R}$ gilt.

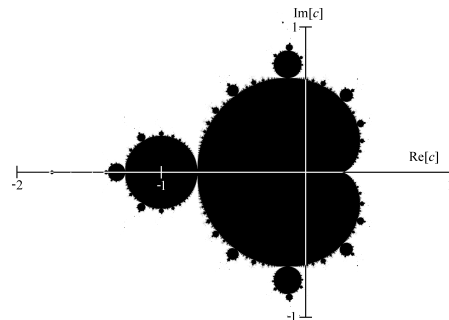
Beispiel 4.6. Für die in Beispiel 4.3 angegebenen Folgen sieht man leicht, dass die Folgen (ii)–(v) und (ix) monoton wachsend sind und die Folge in (vi) monoton fallend ist. Die Folgen (ii)–(iv) und (vi) sind dabei sogar streng monoton. Des Weiteren sind die Folgen (vi)–(ix) beschränkt.

Übung 4.7 (Mandelbrot-Menge). Die Mandelbrot-Menge M ist die Menge aller komplexen Zahlen $c \in \mathbb{C}$, so dass die Folge $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ definiert über

$$z_{n+1} := z_n^2 + c \quad \text{für } n \in \mathbb{N}$$

mit Anfangswert $z_0 = 0$ beschränkt bleibt.

- (i) Überlegen Sie sich, dass $\{-2, -1, \pm i\} \subset M$ gilt.
- (ii) Zeigen Sie, dass die Folge $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ für jedes $c \in \mathbb{C}$ mit $|c| \leq \frac{1}{4}$ betragsmäßig durch $\frac{1}{2}$ beschränkt ist und dass daher $\{c \in \mathbb{C}: |c| \leq \frac{1}{4}\} \subset M$ gilt.
- (iii) Zeigen Sie, dass die Folge $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ für jedes $c \in \mathbb{C}$ mit $|c| > 2$ unbeschränkt ist mit $|z_n| \geq (|c| - 1)^n |c|$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und dass daher $\{c \in \mathbb{C}: |c| > 2\} \subset \mathbb{C} \setminus M$ gilt.



4.1 Konvergenz

Wir geben durch die Begriffe der Konvergenz und des Grenzwertes nun eine mathematische Präzisierung dafür, dass eine reelle oder komplexe Zahl durch eine Folge von reellen oder komplexen Zahlen “beliebig gut approximiert” werden kann.

Definition 4.8 (Konvergenz und Grenzwert). *Es sei $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine komplexe Folge. Wir sagen, dass die Folge $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert, falls es eine Zahl $a \in \mathbb{C}$ gibt mit der Eigenschaft, dass zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert mit*

$$|a_n - a| < \varepsilon \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N} \text{ mit } n \geq n_0. \quad (4.1)$$

In diesem Fall heißt a der Grenzwert oder Limes der Folge und wir schreiben

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \quad \text{oder} \quad a_n \rightarrow a \text{ bei } n \rightarrow \infty. \quad (4.2)$$

Im Fall $a = 0$ sprechen wir auch von einer Nullfolge.

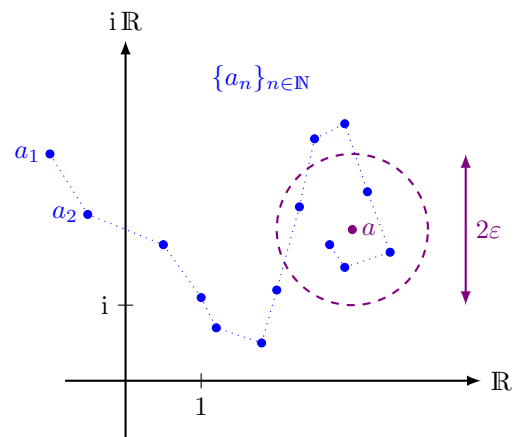
Falls die Folge $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ nicht konvergiert, so sagen wir, dass $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ divergiert.

Bemerkungen 4.9.

- (1) Ist $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben, so gibt es für eine konvergente, komplexe Folge $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ mit Grenzwert $a \in \mathbb{C}$ einen (in der Regel von ε abhängigen) Folgenindex $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass die Bedingung $|a_n - a| < \varepsilon$ lediglich für $n < n_0$ verletzt sein darf. Daraus folgern wir, dass eine Folge $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ genau dann gegen $a \in \mathbb{C}$ konvergiert, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ gilt, dass die Ausnahmemenge

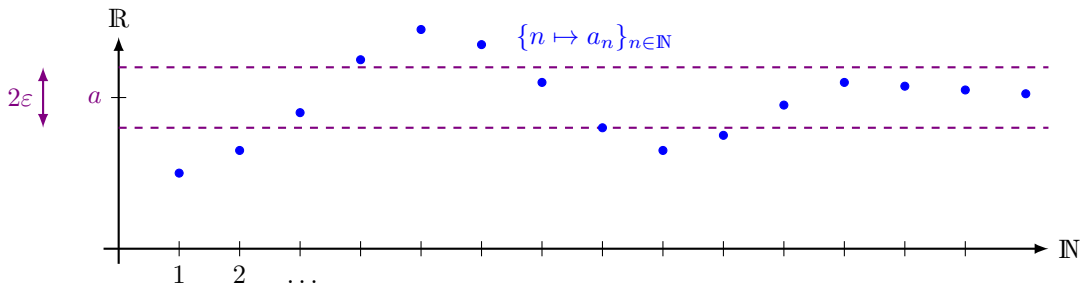
$$\{n \in \mathbb{N} : |a_n - a| \geq \varepsilon\} \quad \text{endlich ist.}$$

Insbesondere reicht es nicht, wenn die Menge $\{n \in \mathbb{N} : |a_n - a| < \varepsilon\}$ unendlich ist (vgl. Beispiel 4.10 (iii) mit $a = \pm 1$). Dafür werden wir in Kapitel 4.3 das Konzept eines Häufungswertes kennenlernen.



- (2) Anhand der letzten Bemerkung ist es offensichtlich, dass die Abänderung der Werte von endlich vielen Folgengliedern oder eine endliche Indexverschiebung nichts daran ändert, ob eine Folge konvergiert oder divergiert. Falls die Folge konvergiert, so bleibt insbesondere auch der Grenzwert der gleiche (auch wenn sich der Wert von $n_0 \in \mathbb{N}$ bei gegebenem $\varepsilon > 0$ ändern kann).
- (3) Möchte man eine gegebene Folge auf Konvergenz überprüfen, so muss man im Falle der Konvergenz zunächst einen Kandidaten für den Grenzwert “raten” und dann das ε -Kriterium (4.1) für jedes beliebige $\varepsilon > 0$ verifizieren bzw. im Falle der Divergenz für jeden Grenzwertkandidaten die Ungültigkeit des ε -Kriteriums (4.1) für ein $\varepsilon > 0$ (und dann automatisch auch für jedes kleinere ε) nachweisen. Im Unterkapitel 4.4 lernen wir später das Cauchy-Kriterium kennen, bei dem die Folge ohne das Raten eines Grenzwertkandidaten auf Konvergenz bzw. Divergenz untersucht werden kann.
- (4) Streng genommen benötigen wir für die Schreibweisen in (4.2) die Eindeutigkeit des Grenzwertes, die wir uns im Anschluss überlegen werden (siehe Lemma 4.13).
- (5) Fassen wir $\mathbb{R}$ als eine Teilmenge von $\mathbb{C}$ auf, so sind auch reelle Folgen in Definition 4.8 erfasst. In diesem Fall ist die graphische Veranschaulichung von Konvergenz etwas einfacher als für komplexe Folgen: Konvergenz einer reellen Folge $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ gegen $a \in \mathbb{R}$ bedeutet, dass die Folgenglieder, die

man als Funktion in $\mathbb{N} \times \mathbb{R}$ einzeichnen kann, für jedes $\varepsilon > 0$ ab einem gewissen Index $n_0 \in \mathbb{N}$ im ε -Schlauch um a liegen müssen.



Beispiele 4.10. Für manche explizit gegebenen Folgen kann man Konvergenz bzw. Divergenz direkt mithilfe der Definition nachweisen.

- (i) Jede konstante komplexe Folge $\{a_n = a\}_{n \in \mathbb{N}}$ für ein $a \in \mathbb{C}$ konvergiert gegen a .
- (ii) Die (alternierende) harmonische Folge $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ mit $a_n = \frac{1}{n}$ (bzw. $a_n = (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$) für alle $n \in \mathbb{N}$ ist eine Nullfolge. Ist nämlich $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben, so finden wir nach Korollar 2.56 (i) ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$. Daraus folgern wir

$$|a_n - 0| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq n_0$$

und haben somit die Konvergenz der (alternierenden) harmonischen Folge gegen 0 gezeigt.

- (iii) Die geometrische Folge $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ mit $a_n = (-1)^n$, also die Folge

$$-1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, \dots,$$

divergiert. Ist nämlich $a \in \mathbb{C}$ beliebig, so folgern wir aus der Dreiecksungleichung

$$2 = |a_{2n} - a_{2n-1}| \leq |a_{2n} - a| + |a_{2n-1} - a| \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

und haben damit

$$|a_{2n} - a| \geq 1 \quad \text{oder} \quad |a_{2n-1} - a| \geq 1 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Dies zeigt, dass für jedes $\varepsilon \in (0, 1]$ kein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert mit $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$.

- (iv) Die Folge $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ der natürlichen Zahlen mit $a_n = n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ divergent, wie man mit einem ähnlichen Argument wie in (iii) sieht.

Bemerkung 4.11 (Nachweis der Konvergenz einer Folge nach Definition). Wir erläutern kurz das allgemeine Vorgehen, um für eine gegebene komplexe Folge $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ die Konvergenz direkt über die Definition nachzuweisen:

- (1) Bestimme den Grenzwertkandidaten $a \in \mathbb{C}$ (falls nicht gegeben).
- (2) Schreibe die geforderte Ungleichung $|a_n - a| < \varepsilon$ aus und schätze gegebenenfalls $|a_n - a|$ nach oben durch eine (Null-)Folge $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ab, mit der leichter zu rechnen ist.
- (3) Löse schließlich die Ungleichung $b_n < \varepsilon$ nach n auf, um einen Ausdruck $n(\varepsilon)$ zu erhalten. Das gesuchte $n_0 \in \mathbb{N}$ ist dann die nächstgrößere natürliche Zahl.

Übung 4.12. Beweisen Sie die Konvergenz der Folgen $\{\frac{1}{\sqrt{n}}\}_{n \in \mathbb{N}}$ und $\{\frac{n^2-1}{3n^2+1}\}_{n \in \mathbb{N}}$ gegen 0 und $\frac{1}{3}$.

Wir halten zunächst fest, dass der Grenzwert einer Folge immer eindeutig ist, falls er existiert.

Lemma 4.13 (Eindeutigkeit des Grenzwertes). *Der Grenzwert einer konvergenten, komplexen Folge ist eindeutig.*

Beweis. Wir beweisen diese Aussage über Widerspruch und nehmen daher an, dass es eine komplexe Folge $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ gibt mit $a_n \rightarrow a$ und $a_n \rightarrow \tilde{a}$ bei $n \rightarrow \infty$, für zwei verschiedene Grenzwerte $a, \tilde{a} \in \mathbb{C}$. Nach Definition der Konvergenz finden wir zu $\varepsilon := \frac{|a - \tilde{a}|}{2} > 0$ zwei Indizes $n_0, \tilde{n}_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$|a_n - a| < \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq n_0 \quad \text{und} \quad |a_n - \tilde{a}| < \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq \tilde{n}_0.$$

Ist $n \geq \max\{n_0, \tilde{n}_0\}$, so folgt aus der Dreiecksungleichung dann der Widerspruch

$$|a - \tilde{a}| = |a - a_n + a_n - \tilde{a}| \leq |a_n - a| + |a_n - \tilde{a}| < 2\varepsilon = |a - \tilde{a}|. \quad \square$$

Wie wir in Beispiel 4.10 (iii) gesehen haben, ist zwar nicht jede beschränkte Folge konvergent, aber es gilt die Umkehrung, also dass jede konvergente Folge beschränkt ist.

Lemma 4.14 (Beschränktheit konvergenter Folgen). *Jede konvergente, komplexe Folge ist beschränkt.*

Beweis. Es sei $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine konvergente, komplexe Folge mit Grenzwert $a \in \mathbb{C}$. Für die spezielle Wahl $\varepsilon = 1$ finden wir dann ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$|a_n - a| < 1 \quad \text{für alle } n \geq n_0.$$

Aus der Dreiecksungleichung folgern wir

$$|a_n| = |a_n - a + a| \leq |a_n - a| + |a| < 1 + |a| \quad \text{für alle } n \geq n_0.$$

Damit erhalten wir die Behauptung aus

$$|a_n| \leq \max\{|a_1|, \dots, |a_{n_0-1}|, 1 + |a|\} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}. \quad \square$$

Wir sind eigentlich an möglichst einfach zu verifizierenden Kriterien interessiert, anhand derer wir entscheiden können, ob eine gegebene Folge konvergiert oder divergiert. Wir überlegen uns zunächst, wie wir mit Grenzwerten von Folgen rechnen können, selbst wenn wir die genauen Werte nicht kennen.

Lemma 4.15 (Rechenregeln für Grenzwerte). *Es seien $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}, \{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ zwei konvergente, komplexe Folgen mit Grenzwerten $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \in \mathbb{C}$ und $b = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \in \mathbb{C}$. Dann gelten die folgenden Aussagen:*

- (i) *Die Folge $\{a_n + b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ist konvergent mit Grenzwert $a + b$.*
- (ii) *Die Folge $\{a_n \cdot b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ist konvergent mit Grenzwert $a \cdot b$.*
- (iii) *Falls $b_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $b \neq 0$ gelten, so ist die Folge $\{\frac{a_n}{b_n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ konvergent mit Grenzwert $\frac{a}{b}$.*
- (iv) *Die Folge $\{|a_n|\}_{n \in \mathbb{N}}$ ist eine konvergente, reelle Folge mit Grenzwert $|a|$.*

Beweis. Wir überlegen uns zunächst, dass es für den Nachweis der Konvergenz einer komplexen Folge $\{d_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ gegen ein $d \in \mathbb{C}$ ausreicht, wenn wir zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ finden, so dass

$$|d_n - d| < c\varepsilon \quad \text{für alle } n \geq n_0$$

gilt, wobei $c > 0$ eine (von n unabhängige) Konstante ist. Ist nämlich $\tilde{\varepsilon} > 0$ beliebig, so gilt für die Wahl $\varepsilon := \frac{\tilde{\varepsilon}}{c} > 0$ und dem zugehörigen $n_0 \in \mathbb{N}$

$$|d_n - d| < c\varepsilon = \tilde{\varepsilon} \quad \text{für alle } n \geq n_0.$$

Im Folgenden sei $\varepsilon > 0$ beliebig (das wir gegebenenfalls beim Beweis einzelner Teilaussagen noch verkleinern dürfen) und dazu ein $n_0 \in \mathbb{N}$ so gewählt, dass

$$|a_n - a| < \varepsilon \quad \text{und} \quad |b_n - b| < \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq n_0$$

gelten. Mithilfe der Vorüberlegung beweisen wir die einzelnen Aussagen über geeignete ε -Abschätzungen.

(i) Aus der Dreiecksungleichung folgern wir für alle $n \geq n_0$

$$|(a_n + b_n) - (a + b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < 2\varepsilon.$$

(ii) Aus Lemma 4.14 wissen wir, dass $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ und $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ beschränkte Folgen sind, also ein $c \geq 0$ existiert mit $|a_n|, |b_n| \leq c$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Daraus folgern wir für alle $n \geq n_0$

$$\begin{aligned} |(a_n \cdot b_n) - (a \cdot b)| &= |(a_n - a) \cdot b_n + a \cdot (b_n - b)| \\ &\leq |a_n - a| \cdot |b_n| + |a| \cdot |b_n - b| \leq c\varepsilon + |a|\varepsilon = (c + |a|)\varepsilon. \end{aligned}$$

(iii) Aufgrund von Aussage (ii) reicht es zu zeigen, dass die Folge $\{b_n^{-1}\}_{n \in \mathbb{N}}$ gegen den Grenzwert b^{-1} konvergiert. Nach Verkleinerung von ε dürfen wir $\varepsilon < \frac{|b|}{2}$ annehmen. Dann sehen wir aus der umgekehrten Dreiecksungleichung zunächst

$$|b_n| \geq |b| - |b_n - b| \geq |b| - \varepsilon > |b| - \frac{|b|}{2} = \frac{|b|}{2}$$

für alle $n \geq n_0$ und folgern weiter aus der äquivalenten Ungleichung $\frac{1}{|b_n|} \leq \frac{2}{|b|}$

$$\left| \frac{1}{b_n} - \frac{1}{b} \right| = \frac{|b - b_n|}{|b_n| \cdot |b|} \leq \frac{2}{|b|^2} \varepsilon.$$

(iv) Mithilfe der umgekehrten Dreiecksungleichung erhalten wir für alle $n \geq n_0$

$$||a_n| - |a|| \leq |a_n - a| < \varepsilon.$$

□

Bemerkung 4.16. Durch die Rechenregeln für Grenzwerte aus Lemma 4.15 können sukzessive immer weitere konvergente Folgen und deren Grenzwerte identifiziert werden. Dazu schreibt man typischerweise eine Folge mit noch unbekanntem Grenzwert geeignet um, so dass einerseits nur Folgen mit bekanntem Grenzwert vorkommen und man andererseits die Rechenregeln für Grenzwerte anwenden kann.

Übung 4.17 (Konvergenz einer komplexen Folge als Konvergenz von Real- und Imaginärteil). Es sei $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine komplexe Folge und $a \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ genau dann gegen a konvergiert, wenn die beiden reellen Folgen $\{\operatorname{Re}(a_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ und $\{\operatorname{Im}(a_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ der Real- und Imaginärteile konvergieren, mit den Grenzwerten

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{Re}(a_n) = \operatorname{Re}(a) \quad \text{und} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{Im}(a_n) = \operatorname{Im}(a).$$

Übung 4.18 (Stabilität der Kleiner-gleich-Beziehung unter Grenzwertbildung). Es seien $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ zwei konvergente, reelle Folgen.

(i) Überlegen Sie sich, dass die Grenzwerte $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ und $b = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ reell sind.

(ii) Zeigen Sie, dass aus $a_n \leq b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ die Ungleichung $a \leq b$ für die Grenzwerte folgt.

(iii) Geben Sie ein Beispiel zweier konvergenter reeller Folgen $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ mit $a_n < b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so dass für die Grenzwerte die Gleichheit $a = b$ gilt.

Wir können nun bereits für einige wichtige Folgen die Grenzwerte berechnen.

Lemma 4.19. Es gelten die folgenden Aussagen:

(i) $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-k} = 0$ für jedes $k \in \mathbb{N}$,

(ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} z^n = 0$ für jedes $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$,

(iii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x} = 1$ für alle $x \in \mathbb{R}^+$,

(iv) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

Beweis.

- (i) Wir zeigen die Aussage über vollständige Induktion über $k \in \mathbb{N}$. Den Induktionsanfang $k = 1$ haben wir uns bereits in Beispiel 4.10 (ii) überlegt. Für den Induktionsschritt nehmen wir an, dass $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-k} = 0$ für ein beliebiges, aber festes $k \in \mathbb{N}$ gilt. Mit der Rechenregel für das Produkt von Grenzwerten aus Lemma 4.15 (ii) erhalten wir dann

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-k-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{-k} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} = 0 \cdot 0 = 0.$$

Damit haben wir die Behauptung in (i) gezeigt.

- (ii) Für $z = 0$ ist die Aussage trivial und wir dürfen daher $z \neq 0$ annehmen. Aus Korollar 2.56 (iii) folgern wir für die Wahl $q = |z|^{-1} > 1$, dass zu einem beliebig vorgegebenen $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert mit

$$q^{-n_0} = |z|^{n_0} < \varepsilon.$$

Damit folgt aus Lemma 3.9 (iv)

$$|z^n - 0| = |z|^n = |z|^{n_0} \cdot |z|^{n-n_0} \leq |z|^{n_0} < \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq n_0.$$

- (iii) Da die Aussage für $x = 1$ trivial ist, untersuchen wir nur die Fälle $x > 1$ und $x \in (0, 1)$.

- Im Fall $x > 1$ gilt auch $\sqrt[n]{x} > 1$ (siehe Bemerkung 2.67 (1)) und damit $\sqrt[n]{x} - 1 > 0$. Aus der Bernoulli-Ungleichung aus Übung 2.19 erhalten wir

$$x = (1 + \sqrt[n]{x} - 1)^n \geq 1 + n(\sqrt[n]{x} - 1) \quad \Rightarrow \quad |\sqrt[n]{x} - 1| = \sqrt[n]{x} - 1 \leq \frac{1}{n}(x - 1).$$

Für ein beliebiges $\varepsilon > 0$ wählen wir nach Korollar 2.56 (i) ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{n_0} < \frac{\varepsilon}{x-1}$. Damit folgt

$$|\sqrt[n]{x} - 1| \leq \frac{1}{n}(x - 1) \leq \frac{1}{n_0}(x - 1) < \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq n_0$$

und die Konvergenz $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x} = 1$ ist gezeigt.

- Im Fall $x \in (0, 1)$ haben wir mit $x^{-1} > 1$. Mit

$$((\sqrt[n]{x})^{-1})^n = ((\sqrt[n]{x})^n)^{-1} = x^{-1} \quad \Leftrightarrow \quad (\sqrt[n]{x})^{-1} = \sqrt[n]{x^{-1}}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ sehen wir dann aus dem obigen Fall sowie mit den Rechenregeln für Grenzwerte

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(\sqrt[n]{x})^{-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{x^{-1}}} = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x^{-1}} \right)^{-1} = 1^{-1} = 1.$$

- (iv) Anstelle der Bernoulli-Gleichung wie im Beweis von (iii) verwenden wir nun den binomischen Lehrsatz 1.94, um auf die Ungleichung

$$n = (1 + \sqrt[n]{n} - 1)^n \geq 1 + \binom{n}{2} (\sqrt[n]{n} - 1)^2 = 1 + \frac{n(n-1)}{2} (\sqrt[n]{n} - 1)^2$$

und damit auf

$$(\sqrt[n]{n} - 1)^2 \leq \frac{2}{n} \quad \Leftrightarrow \quad |\sqrt[n]{n} - 1| = \sqrt[n]{n} - 1 \leq \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ zu kommen. Für ein beliebiges $\varepsilon > 0$ wählen wir nach dem archimedischen Axiom aus Satz 2.54 ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $n_0 > \frac{2}{\varepsilon^2}$. Dann haben wir

$$|\sqrt[n]{n} - 1| \leq \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}} \leq \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n_0}} < \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq n_0,$$

und die Konvergenz $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$ ist bewiesen. $\square$

Bemerkung 4.20. Die Wahlen der natürlichen Zahlen n_0 im Beweis von Lemma 4.19 (iii) und (iv) scheinen auf ersten Blick ohne Begründung oder Motivation getroffen zu sein. Das typische Vorgehen in solchen Beweisen ist es aber, sich zu überlegen, welche Größen man prinzipiell frei wählen kann (hier eben genau das n_0) und wie man diese Größen dann wählen sollte (nach dem Motto: was nicht passt, wird passend gemacht), so dass man am Ende die gewünschte Abschätzung erhält.

Übung 4.21. Es sei $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ die rekursiv definierte reelle Folge mit $a_1 = 1$ und $a_{n+1} := \frac{a_n}{2} + 1$.

- (i) Überlegen Sie sich anhand der Rechenregeln für Grenzwerte aus Lemma 4.15, dass einzig $a = 2$ als Grenzwert in Frage kommt.
- (ii) Zeigen Sie, dass $|a_n - 2| = 2^{1-n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, und folgern Sie dann, dass die Folge $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tatsächlich gegen $a = 2$ konvergiert.

Beispiel 4.22. Mithilfe der Rechenregeln für Grenzwerte aus Lemma 4.15 und mit der Aussage aus Lemma 4.19 (i) erhalten wir

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 3}{2n^3 - n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{-1} + 3n^{-3}}{2 - n^{-2}} \\ &= \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} + 3 \lim_{n \rightarrow \infty} n^{-3}}{2 - \lim_{n \rightarrow \infty} n^{-2}} = \frac{0 + 3 \cdot 0}{2 - 0} = 0 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)^3 - n^3}{n^2} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 + 6n^2 + 12n + 8 - n^3}{n^2} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6 + 24n^{-1} + 8n^{-2}}{1} \\ &= 6 + 24 \lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} + 8 \lim_{n \rightarrow \infty} n^{-2} = 6 + 24 \cdot 0 + 8 \cdot 0 = 6. \end{aligned}$$

Bisher haben wir uns ausschließlich mit dem Thema Konvergenz von Folgen beschäftigt. Zumindest unter den divergenten, reellen Folgen kann man wegen der Anordnung von $\mathbb{R}$ diejenigen auszeichnen, denen man $+\infty$ oder $-\infty$ als “uneigentliche Grenzwerte” zuweisen kann.

Definition 4.23 (uneigentliche Konvergenz und uneigentlicher Grenzwert). Es sei $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine reelle Folge. Wir sagen, dass die Folge $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ uneigentlich konvergiert oder bestimmt divergiert mit uneigentlichem Grenzwert $+\infty$ (bzw. $-\infty$), falls zu jedem $K > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert mit

$$a_n > K \quad (\text{bzw. } a_n < -K) \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N} \text{ mit } n \geq n_0.$$

In diesem Fall schreiben wir

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty \quad \text{oder} \quad a_n \rightarrow \infty \text{ bei } n \rightarrow \infty \\ (\text{bzw. } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty \quad \text{oder} \quad a_n \rightarrow -\infty \text{ bei } n \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

und sprechen bei einer Folge mit unendlichem Grenzwert $+\infty$ auch von einer Unendlichfolge. Falls die Folge $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ divergiert, aber nicht bestimmt divergiert, so sagen wir, dass $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ unbestimmt divergiert.

Beispiele 4.24.

- (i) Die Folge $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ der natürlichen Zahlen mit $a_n = n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ konvergiert uneigentlich gegen ∞ . Ist nämlich $K > 0$, so gilt für $n_0 := \lfloor K \rfloor + 1$

$$a_n = n \geq n_0 > K \quad \text{für alle } n \geq n_0.$$

- (ii) Die (divergente) Folge $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ der alternierenden Quadratzahlen mit $a_n = (-1)^{n+1}n^2$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist unbestimmt divergent. Für jedes $K > 0$ gilt nämlich sogar

$$a_{2n} = -(2n)^2 \leq 0 < K \quad \text{und} \quad a_{2n-1} = (2n-1)^2 > 0 > -K \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Damit konvergiert die Folge $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ wegen der ersten Ungleichung nicht uneigentlich gegen ∞ und wegen der zweiten Ungleichung auch nicht uneigentlich gegen $-\infty$.

Bemerkungen 4.25.

- (1) Da keine Ordnung auf dem Körper der komplexen Zahlen existiert, gibt es das Konzept der uneigentlichen Konvergenz in dieser Form nur für reelle, aber nicht für komplexe Folgen.
- (2) Wie bei der Konvergenz von Folgen kann man sich leicht überlegen, dass eine Folge $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ genau dann eine Unendlichfolge mit uneigentlichem Grenzwert $+\infty$ (bzw. $-\infty$) ist, wenn für jedes $K > 0$ die Ausnahmemenge

$$\{n \in \mathbb{N} : a_n \leq K \text{ (bzw. } \geq -K)\} \quad \text{endlich ist.}$$

Insbesondere sind solche Folgen daher von unten (bzw. von oben) beschränkt.

- (3) Die Abänderung der Werte von endlich vielen Folgengliedern oder eine endliche Indexverschiebung ändert nichts am grundsätzlichen Konvergenzverhalten. Falls eine reelle Folge also uneigentlich konvergiert, so konvergiert auch die so modifizierte Folge uneigentlich, und zwar gegen denselben uneigentlichen Grenzwert.
- (4) Es gelten auch einige Rechenregeln für uneigentliche Grenzwerte. Wir werden diese später als Vergleichsprinzipien in Satz 4.28 kennenlernen, jedoch kann man sich anhand der Definition leicht überlegen, dass für eine Unendlichfolge $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$
 - die Folge $\{-a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ uneigentlich gegen $-\infty$ konvergiert,
 - die Folge $\{a_n + b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine Unendlichfolge ist, wenn $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine nach unten beschränkte Folge ist,
 - die Folge $\{a_n \cdot b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine Unendlichfolge ist, wenn $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine durch eine positive Zahl $b > 0$ von unten beschränkte Folge ist.

Diese Regeln kann man symbolisch als $\infty + b = \infty$ für alle $b \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ und als $\infty \cdot b$ für alle $b > 0$ ausdrücken. Jedoch gibt es auch die unbestimmten Ausdrücke

$$\infty - \infty, \quad \frac{\infty}{\infty} \quad \text{und} \quad \infty \cdot 0,$$

d.h. über die Differenz oder den Quotienten zweier Unendlichfolgen und über das Produkt einer Unendlichfolge und einer Nullfolge kann man keine allgemeingültige Aussage treffen.

Übung 4.26 (unbestimmte Ausdrücke bei Unendlichfolgen). Geben Sie Beispiele von Unendlichfolgen $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ und $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ an, so dass $\{a_n - b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ einen vorgegebenen Wert in $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ als (ggf. uneigentlichen) Grenzwert hat.

Übung 4.27 (Zusammenhang zwischen Null- und Unendlichfolgen). Es sei $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}^+$. Beweisen Sie die Äquivalenz

$$\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ ist eine Nullfolge} \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\frac{1}{a_n}\right\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ ist eine Unendlichfolge (gegen } +\infty).$$

4.2 Konvergenzkriterien für reelle Folgen

In diesem Abschnitt diskutieren wir Situationen, in denen die Ordnung auf dem Körper $\mathbb{R}$ dabei hilft, das Konvergenzverhalten einer gegebenen reellen Folge zu bestimmen. In dieser Hinsicht lernen wir zunächst sogenannte *Vergleichsprinzipien* kennen, bei denen aus dem bekannten Konvergenzverhalten geeigneter Folgen durch Vergleichsbeziehungen auf das Konvergenzverhalten einer anderen Folgen geschlossen werden kann.

Satz 4.28 (Vergleichsprinzipien).

- (i) Majorantenkriterium für Nullfolgen: Ist $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine reelle (oder eine komplexe) Folge mit der Eigenschaft, dass

$$|a_n| \leq cb_n \quad \text{für (fast) alle } n \in \mathbb{N},$$

eine Konstante $c \geq 0$ und eine Nullfolge $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ gilt, so ist auch $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine Nullfolge.

- (ii) Minorantenkriterium für Unendlichfolgen: Ist $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine reelle Folge mit der Eigenschaft, dass

$$a_n \geq cb_n \quad \text{für (fast) alle } n \in \mathbb{N},$$

eine Konstante $c > 0$ und eine Unendlichfolge $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ gilt, so ist auch $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine Unendlichfolge.

- (iii) Einschachtelungsprinzip: Sind $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ und $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ reelle Folgen mit der Eigenschaft

$$a_n \leq x_n \leq b_n \quad \text{für (fast) alle } n \in \mathbb{N}$$

und konvergieren die Folgen $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ und $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ gegen denselben Grenzwert $b \in \mathbb{R}$, d.h.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = b = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n,$$

so konvergiert auch die Folge $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, mit $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = b$.

Beweis. Da die Abänderung der Werte von endlich vielen Folgengliedern nichts am grundsätzlichen Konvergenzverhalten ändert, können wir in den einzelnen Aussagen jeweils annehmen, dass die Annahmen nicht nur für fast alle, sondern sogar für alle Folgenindizes $n \in \mathbb{N}$ erfüllt sind.

- (i) Zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ wählen wir $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $b_n = |b_n| < \frac{\varepsilon}{c}$ für alle $n \geq n_0$. Dann erhalten wir

$$|a_n - 0| = |a_n| \leq cb_n < \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq n_0,$$

und $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ist wie behauptet eine Nullfolge.

- (ii) Zu vorgegebenen $K > 0$ wählen wir $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $b_n > \frac{K}{c}$ für alle $n \geq n_0$. Dann folgt

$$a_n \geq cb_n > K \quad \text{für alle } n \geq n_0,$$

und $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ist wie behauptet eine Unendlichfolge.

- (iii) Zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ wählen wir $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - b| < \varepsilon$ und $|b_n - b| < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$. Damit folgt aus der Einschachtelungsannahme $a_n \leq x_n \leq b_n$

$$|x_n - b| = \max\{x_n - b, b - x_n\} \leq \max\{b_n - b, b - a_n\} < \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq n_0,$$

also die Konvergenz der Folge $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ gegen den Grenzwert b . $\square$

Bemerkung 4.29. Aus dem Minorantenkriterium in Satz 4.28 (ii) können wir durch Vergleich mit der Unendlichfolge $\{n\}_{n \in \mathbb{N}}$ der natürlichen Zahlen sofort schließen, dass die Folgen $\{n^k\}_{n \in \mathbb{N}}$ (für festes $k \in \mathbb{N}$), $\{n^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ und $\{n!\}_{n \in \mathbb{N}}$ ebenfalls Unendlichfolgen sind.

Beispiel 4.30. Für die Folge $\{\sqrt[n]{2^n + 3^n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ gilt offensichtlich

$$3 = \sqrt[n]{3^n} \leq \sqrt[n]{2^n + 3^n} \leq \sqrt[n]{2 \cdot 3^n} = \sqrt[n]{2} \cdot 3 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Da die rechte Seite nach Lemma 4.19 (iii) gegen 3 konvergiert, folgern wir nach dem Einschachtelungsprinzip aus Satz 4.28 (iii), dass die Folge $\{\sqrt[n]{2^n + 3^n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ ebenfalls gegen 3 konvergiert.

Gerade für Null- und Unendlichfolgen ist es interessant zu wissen, “wie schnell” diese Folgen konvergieren und diese Geschwindigkeit mit der von anderen Folgen zu vergleichen.

Definition 4.31 (asymptotische Gleichheit). Es seien $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ und $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ zwei reelle Folgen mit $a_n \neq 0$ für (fast) alle $n \in \mathbb{N}$.

- (i) Wir nennen $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ und $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ asymptotisch gleich, falls $\{b_n/a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ gegen 1 konvergiert.
- (ii) Sind $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ und $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ zwei Nullfolgen, so sagen wir, dass $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ schneller gegen 0 geht als $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, falls $\{b_n/a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist.
- (iii) Sind $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ und $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ zwei Unendlichenfolgen, so sagen wir, dass $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ schneller gegen ∞ geht als $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, falls $\{b_n/a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine Unendlichenfolge ist.

Bemerkung 4.32. Mit den Rechenregeln für Grenzwerte ist klar, dass zwei asymptotisch gleiche Folgen entweder beide konvergieren oder beide (bestimmt oder unbestimmt) divergieren.

Beispiele 4.33.

- (i) Wir betrachten die beiden Nullfolgen $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ und $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ mit

$$a_n = \frac{1}{n^2} \quad \text{und} \quad b_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Es gilt nach den Rechenregeln für Grenzwerte aus Lemma 4.15

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n(n+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 1,$$

also sind die beiden Nullfolgen $\{\frac{1}{n^2}\}_{n \in \mathbb{N}}$ und $\{\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\}_{n \in \mathbb{N}}$ asymptotisch gleich.

- (ii) Zu beliebigem $x > 1$ und $k \in \mathbb{N}$ betrachten wir die beiden Folgen $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ und $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ mit

$$a_n = n^k \quad \text{und} \quad b_n = x^n \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N},$$

die nach Lemma 4.19 (i) und (ii) in Kombination mit Übung 4.27 offensichtlich Unendlichenfolgen sind. Wir wenden zunächst den binomischen Lehrsatzes 1.94 auf x^n für $n \geq 2k$ (und damit $n-k \geq \frac{n}{2}$) an und behalten nur den Term mit der $(k+1)$ -ten Potenz von $(x-1)$. Dadurch erhalten wir die Abschätzung

$$\begin{aligned} b_n = x^n &= (1 + x - 1)^n > \binom{n}{k+1} (x-1)^{k+1} \\ &= \frac{n(n-1) \dots (n-k)}{(k+1)!} (x-1)^{k+1} > \frac{n^{k+1}}{2^{k+1}(k+1)!} (x-1)^{k+1}. \end{aligned}$$

Es folgt

$$\frac{b_n}{a_n} > \frac{(x-1)^{k+1}}{2^{k+1}(k+1)!} n = cn \quad \text{für alle } n \geq 2k \text{ mit } c := \frac{(x-1)^{k+1}}{2^{k+1}(k+1)!} > 0.$$

Da die Folge $\{n\}_{n \in \mathbb{N}}$ der natürlichen Zahlen eine Unendlichenfolge ist, schließen wir aus dem Minorantenkriterium für Unendlichenfolgen aus Satz 4.28 (ii), dass auch $\{b_n/a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine Unendlichenfolge ist. Damit erhalten wir, dass die Folge $\{x^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ schneller uneigentlich gegen ∞ konvergiert als die Folge $\{n^k\}_{n \in \mathbb{N}}$ (und das gilt insbesondere auch für den Fall, dass $x > 1$ sehr nahe an 1 und $k \in \mathbb{N}$ sehr groß ist!).

Bemerkung 4.34. Der Vergleich der Geschwindigkeit der Konvergenz unterschiedlicher Unendlichenfolgen (oder analog Nullfolgen) erlaubt es nun auch, die Konvergenz von Brüchen von Unendlichenfolgen, also der Folge $\{a_n/b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ für zwei Unendlichenfolgen $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ und $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ zu untersuchen. Das Vorgehen hierbei ist es, den am schnellsten wachsenden Summanden in Zähler und Nenner auszuklammern und zu kürzen, so dass dann die Rechenregeln für Grenzwerte aus Lemma 4.15 anwendbar sind.

Beispiel 4.35. Aus Beispiel 4.33 (ii) wissen wir, dass die Folge $\{3^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ schneller gegen uneigentlich gegen ∞ konvergiert als die Folge $\{n^2\}_{n \in \mathbb{N}}$. Damit erhalten wir

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{n+2} + 4}{3^n + n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{9 + 4 \cdot 3^{-n}}{1 + n^2 3^{-n}} = \frac{9 + 4 \lim_{n \rightarrow \infty} 3^{-n}}{1 + \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 3^{-n}} = \frac{9 + 0}{1 + 0} = 9.$$

Wir haben anhand der Folge $\{(-1)^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ bereits gesehen (siehe Beispiel 4.10 (iii)), dass nicht jede beschränkte reelle Folge konvergiert (wenn auch alle konvergenten Folgen beschränkt sind, vgl. Lemma 4.14). Ist die Folge jedoch als *monoton* vorausgesetzt, so stellt sich heraus, dass wir hier aus der Beschränktheit der Folge tatsächlich schon die Konvergenz folgern können (und aus der Unbeschränktheit die uneigentliche Konvergenz). Daher zählt Monotonie zu einem der entscheidenden Kriterien für (ggf. uneigentliche) Konvergenz bei reellen Folgen.

Satz 4.36 (Monotoniekriterium). *Es sei $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine monotone reelle Folge. Ist die Folge $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ außerdem beschränkt, so konvergiert sie in $\mathbb{R}$, und zwar*

- gegen $\sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$, falls die Folge monoton wachsend ist,
- gegen $\inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$, falls die Folge monoton fallend ist.

Ist die Folge $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dagegen unbeschränkt, so konvergiert sie uneigentlich, und zwar

- gegen $+\infty$, falls die Folge monoton wachsend ist,
- gegen $-\infty$, falls die Folge monoton fallend ist.

Beweis. Da eine reelle Folge $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ genau dann monoton fallend ist, wenn $\{-a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ monoton wachsend ist, können wir uns wegen des Spiegelungsprinzips aus Lemma 2.28 auf monoton wachsende Folgen beschränken.

Wir betrachten zuerst eine monoton wachsende, *beschränkte* Folge $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Wegen der Supremumseigenschaft von nicht-leeren, nach oben beschränkten Mengen in $\mathbb{R}$ existiert $a := \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\} \in \mathbb{R}$ und wir müssen noch die Konvergenz der Folge gegen a zeigen. Dazu sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Nach Lemma 2.52 (i) über das Supremum nicht-leerer Mengen existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $a - \varepsilon < a_{n_0} \leq a$. Wegen der Monotonie der Folge und der Definition von a als Supremum über alle Folgenglieder schließen wir damit auf

$$a - \varepsilon < a_{n_0} \leq a_n \leq a \quad \Rightarrow \quad |a_n - a| = a - a_n < \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq n_0,$$

so dass die Konvergenz $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ bewiesen ist.

Als nächstes betrachten wir eine monoton wachsende, *unbeschränkte* Folge $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Wir wollen nun zeigen, dass $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine Unendlichsfolge ist. Dazu sei $K > 0$ beliebig. Mithilfe von Lemma 2.52 (ii) finden wir ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $a_{n_0} > K$. Wegen der Monotonie der Folge erhalten wir damit

$$a_n \geq a_{n_0} > K \quad \text{für alle } n \geq n_0,$$

also die uneigentliche Konvergenz $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$. □

Übung 4.37. Überlegen Sie sich, dass es keine monotone Abzählung von $\mathbb{Q} \cap (0, 1)$ (also keine surjektive Funktion $a: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q} \cap (0, 1)$) geben kann.

Zum Abschluss dieses Unterkapitels diskutieren wir einige Anwendungen des Monotoniekriteriums. Als erstes lernen wir ein iteratives Verfahren zur Bestimmung der Quadratwurzel einer positiven Zahl kennen (deren Existenz wir bereits über eine durch ein Bisektionsverfahren erhaltene Intervallschachtelung bewiesen hatten, vgl. Satz 2.64).

Satz 4.38. *Zu $y \in \mathbb{R}^+$ und $x_0 \in \mathbb{R}^+$ sei $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ die rekursiv über*

$$x_{n+1} := \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{y}{x_n} \right) \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_0$$

definierte reelle Folge. Dann konvergiert $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ gegen die Zahl $\sqrt{y}$.

Beweis. Wir zeigen die Aussage in zwei Schritten.

Die Folge $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ist monoton fallend, nach unten beschränkt und damit konvergent. Mithilfe von vollständiger Induktion sieht man zunächst, dass die Folge $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ wohldefiniert ist mit $x_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wegen

$$x_n^2 - y = \frac{1}{4} \left(x_{n-1} + \frac{y}{x_{n-1}} \right)^2 - y = \frac{1}{4} \left(x_{n-1} - \frac{y}{x_{n-1}} \right)^2 \geq 0$$

erhalten wir dann sogar die verbesserte untere Schranke $x_n \geq \sqrt{y}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Schließlich folgern wir aus $x_n^2 \geq y$ noch

$$x_n - x_{n+1} = x_n - \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{y}{x_n} \right) = \frac{1}{2} \left(x_n - \frac{y}{x_n} \right) = \frac{1}{2x_n} (x_n^2 - y) \geq 0$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Damit ist $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ wie behauptet monoton fallend. Als Konsequenz der Tatsache, dass $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine monoton fallende und nach unten beschränkte Folge ist, schließen wir mit Satz 4.36 nun auf die Konvergenz von $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ gegen ein $x \in \mathbb{R}$, mit $x \geq \sqrt{y}$ nach Übung 4.18.

Identifikation des Grenzwertes $x = \sqrt{y}$. Da wir nun wissen, dass der Grenzwert der Folge $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ existiert, dürfen wir in der rekursiven Definition $x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{y}{x_n} \right)$ der Folgenglieder die Grenzwerte auf beiden Seiten bilden. Damit erhalten wir

$$x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{y}{x_n} \right) = \frac{1}{2} \left(x + \frac{y}{x} \right) \Rightarrow x^2 = y.$$

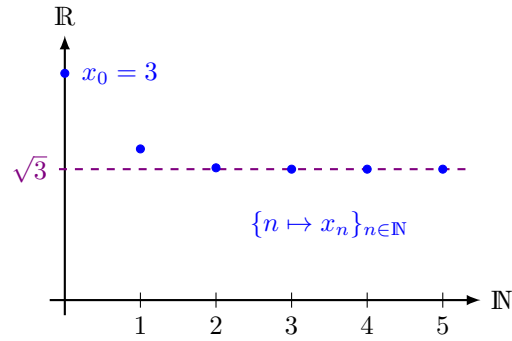
Wegen $x > 0$ und der Eindeutigkeit der Wurzel nach Satz 2.64 folgt die Behauptung $x = \sqrt{y}$. □

Bemerkungen 4.39.

- (1) Die Iterationsvorschrift ist von der Form $x_{n+1} = f(x_n)$ mit einer Abbildung f , und in Satz 4.38 haben wir mithilfe der Monotonie der Iterationen einen Fixpunkt von f bestimmt, also einen Punkt x mit $x = f(x)$.
- (2) Das in Satz 4.38 beschriebene Verfahren zur iterativen Bestimmung der Wurzel einer positiven Zahl wurde bereits von Heron von Alexandria um 60 n. Chr. publiziert und ist daher auch als das Heron-Verfahren bekannt (auch wenn das Verfahren wohl schon viel früher verwendet wurde).
- (3) Um die geometrische Idee hinter dem Heron-Verfahren zu verstehen, fasst man das Problem, die Quadratwurzel aus einer positiven Zahl $y \in \mathbb{R}^+$ zu ziehen, als das äquivalente Problem auf, die Seitenlänge eines Quadrats mit Flächeninhalt y zu bestimmen. Im Verfahren verwendet man nun eine Approximation des Quadrats über Rechtecke mit Flächeninhalt y , wobei im n -ten Iterationsschritt das Rechteck mit Seitenlängen x_n und $\frac{y}{x_n}$ betrachtet wird und das nächste Rechteck dann so bestimmt wird, dass die eine Seitenlänge x_{n+1} gerade der Mittelwert dieser vorherigen Seitenlängen ist.
- (4) Da in dem Verfahren nur die Grundrechenarten verwendet werden, ist es auch einfach auf dem Computer zu implementieren. Aus der Definition der Folge $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ gewinnt man für den Approximationsfehler $e_n := x_n - \sqrt{y}$ im n -ten Schritt mithilfe von $x_n \geq \sqrt{y}$ die Abschätzung

$$e_{n+1} = x_{n+1} - \sqrt{y} = \frac{1}{2x_n} (x_n^2 + y - 2x_n\sqrt{y}) = \frac{1}{2x_n} (x_n - \sqrt{y})^2 \leq \frac{1}{\sqrt{y}} e_n^2.$$

Dies bezeichnet man in der Numerik als quadratische Konvergenz. In der Praxis hat man damit sehr schnell gute Näherungen, wenn man mit einem nicht zu schlechten Anfangswert x_0 startet. Im Beispiel rechts sind die ersten Iterationen zur Bestimmung von $\sqrt{3}$ mit Startwert $x_0 = 3$ eingetragen. Bereits nach der dritten bzw. vierten Iteration haben wir $\sqrt{3}$ auf 3 bzw. auf 7 Nachkommastellen genau berechnet. Zudem ist dieses Verfahren auch sehr stabil, so dass man selbst mit Rundungsfehlern noch gute Näherungen erhält.



Übung 4.40. Es sei $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ die rekursiv definierte Folge mit $x_1 = 0$ und $x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}$ für $n \in \mathbb{N}$, also die Folge

$$0, \quad \sqrt{2}, \quad \sqrt{2 + \sqrt{2}}, \quad \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}, \quad \dots$$

- (i) Überlegen Sie sich mit Induktion, dass $0 \leq x_n \leq 2$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.
- (ii) Zeigen Sie, dass die Folge monoton wachsend ist.
- (iii) Bestimmen Sie aus der Rekursionsbeziehung den Grenzwert von $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.

★ **Übung 4.41.** Zu $y \in \mathbb{R}^+$ und $x_0 \in \mathbb{R}^+$ mit $yx_0 < 2$ sei $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ die rekursiv über

$$x_{n+1} := 2x_n - yx_n^2 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_0$$

definierte reelle Folge. Zeigen Sie, dass $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine monoton wachsende, nach oben beschränkte Folge ist und bestimmen Sie deren Grenzwert.

Als nächstes betrachten wir die wichtige Folge $\{(1 + \frac{1}{n})^n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Mithilfe des Monotoniekriteriums weisen wir zunächst die Konvergenz dieser Folge nach (wobei wir den Grenzwert später mit der Eulerschen Zahl e identifizieren werden).

Satz 4.42. Die reellen Folgen $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ definiert über

$$a_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} =: b_n \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

sind monoton und konvergieren gegen denselben Grenzwert.

Beweis. Wir zeigen die Aussage des Satzes wieder in mehreren Schritten.

Die Folge $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ist monoton wachsend und die Folge $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ist monoton fallend. Diese Behauptungen erhalten wir mithilfe der Bernoulli-Ungleichung aus Übung 2.19: für alle $n \geq 2$ sehen wir mit dieser Ungleichung (angewandt für die Wahlen $x := -\frac{1}{n^2}$ bzw. $x := \frac{1}{(n+1)(n-1)}$) nämlich die beiden Ungleichungen

$$\begin{aligned} \frac{a_n}{a_{n-1}} &= \left(\frac{1 + \frac{1}{n}}{1 + \frac{1}{n-1}}\right)^n \cdot \left(1 + \frac{1}{n-1}\right) = \left(\frac{n(n-1) + n-1}{n(n-1) + n}\right)^n \cdot \frac{n}{n-1} \\ &= \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n \cdot \frac{n}{n-1} \geq \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \frac{n}{n-1} = 1, \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} \frac{b_{n-1}}{b_n} &= \left(\frac{1 + \frac{1}{n-1}}{1 + \frac{1}{n}}\right)^{n+1} \cdot \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{-1} = \left(\frac{n(n-1) + n}{n(n-1) + n-1}\right)^{n+1} \cdot \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{-1} \\ &= \left(1 + \frac{1}{(n+1)(n-1)}\right)^{n+1} \cdot \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{-1} \\ &\geq \left(1 + \frac{1}{n-1}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{-1} = 1. \end{aligned}$$

Die Folge $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ist nach oben beschränkt und die Folge $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ist nach unten beschränkt. Wegen der im ersten Schritt gezeigten Monotonien sowie wegen der trivialen Ungleichung $a_n < a_n(1 + \frac{1}{n}) = b_n$ haben wir

$$2 = \left(1 + \frac{1}{1}\right)^1 = a_1 \leq a_n < b_n \leq b_1 = \left(1 + \frac{1}{1}\right)^2 = 4 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Konvergenz gegen den gleichen Grenzwert. Mit dem Monotoniekriterium aus Satz 4.36 folgen wir, dass beide Folgen $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ konvergieren, und dabei gilt

$$2 \leq a := \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\} \leq \inf\{b_n : n \in \mathbb{N}\} = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n =: b \leq 4.$$

Mit den Rechenregeln für Grenzwerte aus Lemma 4.15 haben wir außerdem

$$1 \leq \frac{b}{a} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1,$$

wodurch wir letztendlich die Grenzwerte a und b miteinander identifizieren können. $\square$

Bemerkungen 4.43.

- (1) Mit den gleichen Argumenten wie im Beweis von Satz 4.42 kann man sich überlegen, dass auch die Folge $\{(1 + \frac{x}{n})^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ für beliebiges $x \in \mathbb{R}$ konvergiert. Hierbei ist lediglich für den Fall $x < 0$ zu berücksichtigen, dass die Monotonie der Folgen im Allgemeinen erst ab dem Folgenindex $n \geq -x$ erfüllt ist (was für die Existenz des Grenzwertes jedoch keine Rolle spielt).
- (2) Die Konvergenz der Folgen $\{(1 + \frac{x}{n})^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ für $x \in \mathbb{R}$ ist im Allgemeinen sehr langsam, d.h. man muss $n \in \mathbb{N}$ sehr groß wählen, damit die Approximation des Grenzwerts durch das n -te Folgenglied gut wird. Später werden wir die alternative Darstellung

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k!}$$

als Grenzwert einer Folge kennenlernen, mit der man bessere Approximationen erhält.

Da man auch für die Asymptotik von Unendlichfolgen oder Nullfolgen (im Sinne von Definition 4.31) am Ende Grenzwerte berechnen muss, kann man eine solche Asymptotik in einigen Fällen ebenfalls über das Monotoniekriterium aus Satz 4.36 erfassen. Zusätzlich muss man sich hierbei allerdings im Vorfeld überlegen, welche Unendlichfolgen oder Nullfolgen man für den Vergleich heranziehen kann.

Übung 4.44. Es sei $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ die Folgen von Produkten

$$p_n := \prod_{k=1}^n \frac{2k}{2k-1} = \frac{2}{1} \cdot \frac{4}{3} \cdot \dots \cdot \frac{2n}{2n-1} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

- (i) Zeigen Sie, dass die Folge $\{\frac{p_n}{\sqrt{n}}\}_{n \in \mathbb{N}}$ monoton fällt und dass die Folge $\{\frac{p_n}{\sqrt{n+1}}\}_{n \in \mathbb{N}}$ monoton wächst.
- (ii) Folgern Sie, dass die Folgen $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ und $\{p\sqrt{n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ für ein $p \in [\sqrt{2}, 2]$ asymptotisch gleich sind.

Bemerkungen 4.45.

- (1) Mit dem asymptotischen Verhalten der Produkte aus Übung 4.44 lassen sich nun insbesondere asymptotische Darstellungen gewisser Binomialkoeffizienten gewinnen. Beispielsweise entdecken wir diese Produkte in

$$\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n!n!} = 2^{2n} \frac{(2n)!}{(2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2n)^2} = 2^{2n} \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2n} = 2^{2n} \frac{1}{p_n}$$

wieder und folgern daher, dass die Folgen $\{\binom{2n}{n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ und $\{\frac{2^{2n}}{p\sqrt{n}}\}_{n \in \mathbb{N}}$ asymptotisch gleich sind.

- (2) Mithilfe von Integralrechnung kann man zeigen, dass für die Wallissche Produktfolge $\{w_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ definiert über

$$w_n := \frac{p_n^2}{2n+1} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

die Konvergenz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} w_n = \frac{\pi}{2}$$

mit der Kreiszahl π gilt, die wir später in Definition 7.29 einführen werden. Da wir nach Übung 4.44 bereits $\lim_{n \rightarrow \infty} w_n = \frac{p^2}{2}$ kennen, lässt sich nun der asymptotische Grenzwert der dort eingeführten Folge $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ über $p = \sqrt{\pi}$ identifizieren.

4.3 Häufungswerte und der Satz von Bolzano–Weierstraß

Wir versuchen nun Konvergenz und Divergenz von reellen und komplexen Folgen genauer zu verstehen. Ein wesentliches Hilfsmittel hierfür wird der Begriff einer Teilfolge sein.

Definition 4.46. Es sei X eine beliebige nicht-leere Menge und $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in X . Ist $\{n_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ eine streng monoton wachsende Folge in $\mathbb{N}$ (d.h. es gilt $n_k \in \mathbb{N}$ und $n_k < n_{k+1}$ für alle $k \in \mathbb{N}$), so nennen wir $\{a_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ eine Teilfolge von $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.

Bemerkungen 4.47.

- (1) Eine Teilfolge einer Folge $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ist also nichts anderes als die Verkettung der Abbildungsvorschrift $a: \mathbb{N} \rightarrow X$ für die Folge mit der Abbildung $n: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ einer streng monoton wachsenden Folge.
- (2) Jede Teilfolge einer Folge enthält immer noch abzählbar viele Folgenglieder und ist damit ebenfalls eine Folge im Sinne von Definition 4.1.

Beispiele 4.48.

- (i) Die geometrische Folge $\{(-1)^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ enthält jede beliebige Folge mit den Werten 1 und -1 als Teilfolge. Insbesondere sind die konstanten Folgen mit Wert $+1$ und -1 enthalten, und zwar wenn wir uns nur auf die geraden bzw. ungeraden Folgenindizes beschränken (mit $n_k := 2k$ bzw. $n_k := 2k - 1$ für alle $k \in \mathbb{N}$).
- (ii) Die Folge $\{n\}_{n \in \mathbb{N}}$ der natürlichen Zahlen enthält jede streng monotone Folge in $\mathbb{N}$ als Teilfolge, also insbesondere die Folgen der geraden Zahlen, der ungeraden Zahlen, der Quadratzahlen oder der Primzahlen.

Lemma 4.49. Es sei $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine reelle Folge, die (ggf. uneigentlich) gegen ein $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ konvergiert. Dann konvergiert auch jede Teilfolge $\{a_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ (ggf. uneigentlich) gegen a .

Beweis. Es sei $\{a_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ eine beliebige Teilfolge von $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Wir betrachten zunächst den Fall eines Grenzwerts $a \in \mathbb{R}$. Wegen der Konvergenz von $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$. Wegen $n_k \geq k$ nach Definition einer Teilfolge erhalten wir damit

$$|a_{n_k} - a| < \varepsilon \quad \text{für alle } k \geq n_0$$

und damit die Konvergenz von $\{a_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ gegen a .

Für den Fall der uneigentlichen Konvergenz von $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ können wir uns auf den uneigentlichen Grenzwert ∞ beschränken (sonst gehen wir zur Folge $\{-a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ über). Dann gibt es zu jedem $K > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $a_n > K$ für alle $n \geq n_0$. Analog zu oben erhalten wir dann

$$a_{n_k} > K \quad \text{für alle } k \geq n_0$$

und damit die uneigentliche Konvergenz von $\{a_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ gegen ∞ . □

Wir werden zum Ende des Kapitels sogar die Umkehrung des Lemmas beweisen, also dass eine Folge $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ gegen den Grenzwert a konvergiert, falls jede Teilfolge von $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ gegen a konvergiert. Zunächst betrachten wir aber nur das Konvergenzverhalten entlang von einzelnen Teilfolgen einer komplexen Folge und führen darüber den Begriff eines Häufungswertes der Folge ein.

Definition 4.50 (Häufungswert einer Folge). *Es sei $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine komplexe Folge. Wir bezeichnen eine Zahl $a \in \mathbb{C}$ als Häufungswert von $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, falls es eine Teilfolge $\{a_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ von $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ gibt, die gegen a konvergiert, also mit*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = a.$$

Ist $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine reelle Folge, so bezeichnen wir ∞ (bzw. $-\infty$) als uneigentlichen Häufungswert, falls es eine Teilfolge $\{a_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ von $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ gibt, die uneigentlich gegen ∞ (bzw. $-\infty$) konvergiert, also mit

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = \infty \quad (\text{bzw. } \lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = -\infty).$$

Äquivalent kann man Häufungswerte einer Folge als sogenannte Clusterwerte charakterisieren, für die in jeder beliebig kleinen, um den Punkt zentrierten ε -Kugel stets unendlich viele Folgenglieder liegen:

Proposition 4.51 (Häufungswerte als Clusterwerte). *Eine Zahl $a \in \mathbb{C}$ ist genau dann ein Häufungswert einer komplexen Folge $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ unendlich viele Indizes $n \in \mathbb{N}$ existieren mit $|a_n - a| < \varepsilon$, d.h. wenn die Menge*

$$\{n \in \mathbb{N} : |a_n - a| < \varepsilon\} \quad \text{unendlich ist.}$$

Entsprechend ist ∞ (bzw. $-\infty$) genau dann ein uneigentlicher Häufungswert einer reellen Folge $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, wenn zu jedem $K > 0$ unendlich viele Indizes $n \in \mathbb{N}$ existieren mit $a_n > K$ (bzw. mit $a_n < -K$), d.h. wenn die Menge

$$\{n \in \mathbb{N} : a_n > K \text{ (bzw. } a_n < -K)\} \quad \text{unendlich ist.}$$

Beweis. Wir betrachten zunächst eine komplexe Folge $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ mit Häufungswert $a \in \mathbb{C}$. Dann existiert nach Definition 4.50 des Häufungswerts eine Teilfolge $\{a_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ mit Grenzwert a . Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert also ein $k_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$|a_{n_k} - a| < \varepsilon \quad \text{für alle } k \geq k_0.$$

Folglich gilt $|a_n - a| < \varepsilon$ für unendlich viele Indizes $n \in \mathbb{N}$.

Als nächstes betrachten wir eine komplexe Folge $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, so dass es zu jedem $\varepsilon > 0$ unendlich viele Indizes $n \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < \varepsilon$ gibt. Mit geeigneten Wahlen von ε konstruieren wir nun induktiv eine gegen a konvergente Teilfolge. Wir setzen dazu $n_0 := 1$. Sind dann $n_0 < \dots < n_{k-1}$ für ein $k \in \mathbb{N}$ bestimmt, so wählen wir ein $n_k \in \mathbb{N}$ mit $n_k > n_{k-1}$ und $|a_{n_k} - a| < \frac{1}{k}$. Nach Konstruktion gilt für jedes $k_0 \in \mathbb{N}$

$$|a_{n_k} - a| < \frac{1}{k} \leq \frac{1}{k_0} \quad \text{für alle } k \geq k_0,$$

also konvergiert die Teilfolge $\{a_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ nach Korollar 2.56 gegen a .

Den Fall reeller Folgen $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ mit uneigentlichem Häufungswert ∞ können wir ähnlich behandeln (und durch den Übergang auf $\{-a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ergibt sich dann auch die Aussage für den uneigentlichen Häufungswert $-\infty$). Wir nehmen zunächst an, dass ∞ ein uneigentlicher Häufungswert von $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ist. Dann existiert eine Teilfolge $\{a_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$, die uneigentlich gegen ∞ konvergiert. Zu beliebigem $K > 0$ existiert damit ein $k_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$a_{n_k} > K \quad \text{für alle } k \geq k_0,$$

und somit gilt $a_n > K$ für unendlich viele Indizes $n \in \mathbb{N}$.

Schließlich betrachte wir noch eine reelle Folge $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, so dass es zu jedem $K > 0$ unendlich viele Indizes $n \in \mathbb{N}$ mit $a_n > K$ gibt. Für geeignete Wahlen von K konstruieren wir nun induktiv die gesuchte Teilfolge, die uneigentlich gegen ∞ konvergiert. Wir setzen dazu $n_0 := 1$. Sind dann $n_0 < \dots < n_{k-1}$

für ein $k \in \mathbb{N}$ bestimmt, so wählen wir ein $n_k \in \mathbb{N}$ mit $n_k > n_{k-1}$ und $a_{n_k} > k$. Nach Konstruktion gilt für jedes $k_0 \in \mathbb{N}$

$$a_{n_k} > k \geq k_0 \quad \text{für alle } k \geq k_0,$$

also konvergiert die Teilfolge $\{a_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ nach Satz 2.54 uneigentlich gegen ∞ . $\square$

Korollar 4.52. *Eine reelle Folge $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ist genau dann nach oben (bzw. unten) beschränkt ist, wenn ∞ (bzw. $-\infty$) kein uneigentlicher Häufungswert von $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ist.*

Beweis. Es reicht, die Implikationen für Folgen zu zeigen, die nach oben beschränkt sind bzw. ∞ nicht als uneigentlichen Häufungswert haben, da wir andernfalls auf die Folge $\{-a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ übergehen können.

Wir nehmen zunächst an, dass $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ nach oben beschränkt ist. Dann existiert nach Definition der Beschränktheit ein $K > 0$ mit

$$a_n \leq K \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Damit ist die Menge $\{n \in \mathbb{N} : a_n > K\}$ leer (und insbesondere nicht unendlich). Folglich ist ∞ gemäß Proposition 4.51 kein uneigentlicher Häufungswert von $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.

Als nächstes nehmen wir an, dass ∞ kein uneigentlicher Häufungspunkt von $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ist. Nach Proposition 4.51 existiert dann ein $K > 0$, so dass die Menge

$$\{n \in \mathbb{N} : a_n > K\} \quad \text{endlich ist.}$$

Nummerieren wir diese Indizes mit $n_1, \dots, n_{k_0}$ für ein $k_0 \in \mathbb{N}$, so erhalten wir

$$a_n \leq \max\{a_{n_1}, \dots, a_{n_{k_0}}, K\} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N},$$

also die Beschränktheit von $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ nach oben. $\square$

Beispiele 4.53.

- (i) Die Folge $\{(-1)^{n+1}n^2\}_{n \in \mathbb{N}}$ der alternierenden Quadratzahlen hat genau $\pm\infty$ als (uneigentliche) Häufungswerte.
- (ii) Die geometrische Folge $\{i^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ hat wegen $i^{4k} = 1$ für alle $k \in \mathbb{N}$ genau ± 1 und $\pm i$ als Häufungswerte. Die geometrische Folge $\{z^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert nach Lemma 4.19 für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$ gegen 0 und hat damit nur den Häufungswert 0, wohingegen sie für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| > 1$ keinen Häufungswert besitzt (und die reelle Folge $\{|z^n|\}_{n \in \mathbb{N}}$ uneigentlich gegen ∞ konvergiert).
- (iii) Ist $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine beliebige Abzählung von $\mathbb{Q}$, so ist jede Zahl in $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ ein (ggf. uneigentlicher) Häufungswert von $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ (hierfür ist zu beachten, dass die Intervalle $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ und (K, ∞) für jedes $\varepsilon, K > 0$ unendlich viele rationale Zahlen enthalten, wie man sich anhand von Satz 2.57 angewandt für geeignete Folgen $\{\varepsilon_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ und $\{K_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ überlegen kann).

Für komplexe Folgen kann es, wie wir gesehen haben, mehrere Häufungswerte geben. Im reellen Fall gibt es dann aufgrund der Anordnung von $\mathbb{R}$ sogar auch einen größten und einen kleinsten Häufungswert.

Definition 4.54 (Limes superior und Limes inferior). *Es sei $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine reelle Folge. Wir definieren den Limes superior von $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ als*

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n := \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} \sup\{a_\ell : \ell \geq n\} & \text{falls } \{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ nach oben beschränkt ist,} \\ \infty & \text{sonst,} \end{cases}$$

und den Limes inferior von $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ als

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n := \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} \inf\{a_\ell : \ell \geq n\} & \text{falls } \{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ nach unten beschränkt ist,} \\ -\infty & \text{sonst.} \end{cases}$$

Bemerkungen 4.55.

- (1) Wir begründen noch die Wohldefiniertheit von Limes superior und Limes inferior, also dass die Grenzwerte auf der rechten Seite der Definitionen in $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ tatsächlich existieren. Ist $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ nach oben beschränkt, so ist die reelle Folge $\{d_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ mit

$$d_n := \sup\{a_\ell : \ell \geq n\} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

monoton fallend. Daher existiert $\lim_{n \rightarrow \infty} d_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$ nach dem Monotoniekriterium aus Satz 4.36 in $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$. Ist $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ nach unten beschränkt, so ist die reelle Folge $\{\tilde{d}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ mit

$$\tilde{d}_n := \inf\{a_\ell : \ell \geq n\} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

monoton wachsend. Entsprechend existiert $\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{d}_n = \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n$ in $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Im Gegensatz zum Grenzwert existieren der Limes superior $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$ und der Limes inferior $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n$ also für jede reelle Folge $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

- (2) Für reelle Folgen $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ gilt das Spiegelungsprinzip, dass eine Zahl $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ genau dann der Limes superior von $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ist, wenn $-a$ der Limes inferior von $\{-a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ist. Dies folgt mithilfe des Spiegelungsprinzips aus Lemma 2.28 für nach oben beschränkte Folgen direkt aus der Identität

$$-\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = -\lim_{n \rightarrow \infty} \sup\{a_\ell : \ell \geq n\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \inf\{-a_\ell : \ell \geq n\} = \liminf_{n \rightarrow \infty} (-a_n)$$

und ist für nach oben unbeschränkte Folgen offensichtlich. Daher können Aussagen über den Limes superior von Folgen immer in Aussagen über den Limes inferior von Folgen (und umgekehrt) überführt werden.

Es bleibt noch zu zeigen, dass es sich beim Limes superior und Limes inferior tatsächlich um den größten bzw. kleinsten Häufungswert der Folge handelt.

Satz 4.56 (Limes superior und Limes inferior als größter bzw. kleinster Häufungswert). *Es sei $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine reelle Folge. Dann sind der Limes superior $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$ und der Limes inferior $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n$ der größte bzw. kleinste (ggf. uneigentliche) Häufungswert von $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.*

Beweis. Es reicht, die Aussage nur für den Limes superior von $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ zu zeigen, da sich die Aussage für den Limes inferior dann aus dem Übergang zur Folge $\{-a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ mit Bemerkung 4.55 (2) ergibt.

1. Fall: $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ist unbeschränkt nach oben. Nach Korollar 4.52 ist ∞ ein uneigentlicher Häufungswert von $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, und dies ist offensichtlich der größtmögliche Häufungswert von $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.

2. Fall: $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ist beschränkt nach oben. Wir zeigen zunächst, dass $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$ ein Häufungswert von $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ist. Dazu konstruieren wir induktiv eine Teilfolge $\{a_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$, die gegen $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$ konvergiert. Wir setzen $n_0 := 1$. Sind dann $n_0 < \dots < n_{k-1}$ für ein $k \in \mathbb{N}$ bestimmt, so wählen wir mithilfe von Lemma 2.52 ein $n_k > n_{k-1}$ mit

$$\sup\{a_\ell : \ell \geq n_{k-1} + 1\} - \frac{1}{k} < a_{n_k} \leq \sup\{a_\ell : \ell \geq n_{k-1} + 1\}.$$

Wegen $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} = 0$ und der Definition des Limes superior konvergieren die Ausdrücke auf der rechten und linken Seite gegen $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$. Mit dem Einschachtelungsprinzip aus Satz 4.28 (iii) konvergiert daher die eben konstruierte Teilfolge $\{a_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ ebenfalls gegen $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$, also ist $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$ ein Häufungswert von $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.

Wir müssen noch argumentieren, dass $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$ der größte Häufungswert von $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ist. Ist $h \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ ein beliebiger Häufungswert von $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, so gibt es eine Teilfolge $\{a_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ von $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ mit $h = \lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k}$. Wegen

$$a_{n_k} \leq \sup\{a_\ell : \ell \geq n_k\} \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}$$

folgt aus Übung 4.18

$$h = \lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n < \infty.$$

Also ist $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$ tatsächlich der größte Häufungswert von $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. □

Übung 4.57. Es seien $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ zwei reelle Folgen mit $a_n \leq b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie die Ungleichungen

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} b_n \quad \text{und} \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} b_n.$$

Als sehr wichtige Folgerung von Satz 4.56 schließen wir nun auf den Satz von Bolzano–Weierstraß, der besagt, dass man für jede beliebige *beschränkte* Folge eine konvergente Teilfolge (und damit insbesondere mindestens einen Häufungswert) finden kann.

Satz 4.58 (Bolzano–Weierstraß). *Jede beschränkte reelle oder komplexe Folge besitzt eine konvergente Teilfolge (oder äquivalent dazu einen Häufungswert in $\mathbb{R}$ bzw. in $\mathbb{C}$).*

Beweis der reellen Version. Wir betrachten zunächst eine beschränkte, reelle Folge $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Dann existiert ein $K > 0$ mit

$$|a_n| \leq K \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Aus Satz 4.56 wissen wir, dass ein größter und kleinster Häufungswert von $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ existiert. Diese beiden (und damit sogar alle) Häufungswerte sind nach Annahme betragsmäßig durch K beschränkt. Folglich gibt es mindestens einen Häufungswert in $\mathbb{R}$ und damit auch eine Teilfolge von $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, die gegen diesen Häufungswert konvergiert.

Beweis der komplexen Version. Wir betrachten nun eine beschränkte, komplexe Folge $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Aus der reellen Version vom Satz von Bolzano–Weierstraß folgern wir, dass die beschränkte, reelle Folge $\{\operatorname{Re}(a_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge $\{\operatorname{Re}(a_{n_k})\}_{k \in \mathbb{N}}$ besitzt. Betrachten wir nun die Teilfolge $\{\operatorname{Im}(a_{n_k})\}_{k \in \mathbb{N}}$ der entsprechenden Imaginärteile, so können wir die reelle Version vom Satz von Bolzano–Weierstraß erneut anwenden und erhalten dann eine konvergente (Teil-)Teilfolge $\{\operatorname{Im}(a_{n_{k_\ell}})\}_{\ell \in \mathbb{N}}$. Mithilfe von Lemma 4.49 konvergiert aber auch noch $\{\operatorname{Re}(a_{n_{k_\ell}})\}_{\ell \in \mathbb{N}}$. Da nun sowohl der Real- als auch der Imaginärteil entlang der so gewonnenen Teilfolge konvergiert, schließen wir mit Übung 4.17, dass $\{a_{n_{k_\ell}}\}_{\ell \in \mathbb{N}}$ in $\mathbb{C}$ konvergiert und damit mindestens ein Häufungswert von $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathbb{C}$ existiert. $\square$

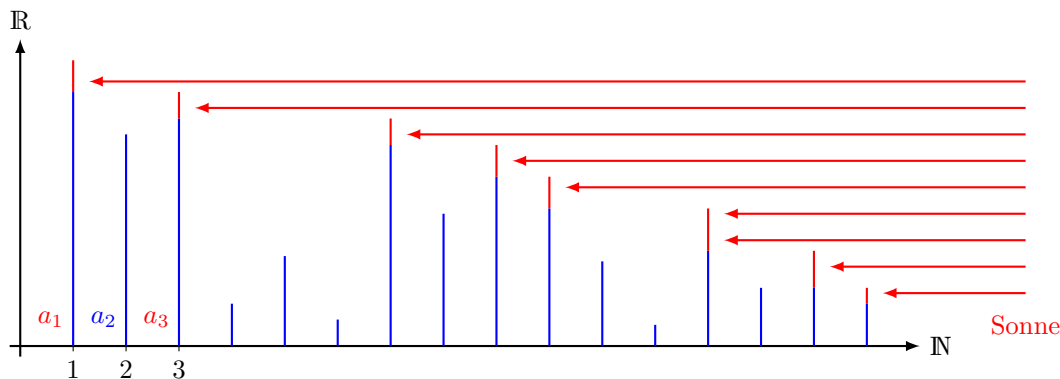
Bemerkung 4.59. *Der hier angegebene Beweis der reellen Version des Satzes von Bolzano–Weierstraß beruht auf der Existenz eines Häufungswertes aus Satz 4.56. Zwei alternative klassische Beweisstrategien sind die folgenden:*

- (1) *Für alle reelle Folgen kann man die Existenz einer monotonen Folge zeigen (siehe Übung 4.60). Für beschränkte Folgen bekommt man die Existenz einer konvergenten Teilfolge dann direkt mit dem Monotoniekriterium aus Satz 4.36.*
- (2) *Man kann für die Existenz eines Häufungswertes einer beschränkten reellen Folge ein Intervallschachtelungsprinzip nutzen. Dazu startet man mit einem endlichen Intervall $[-K, K]$, das alle Folgenglieder enthält (möglich aufgrund der Beschränktheit der Folge). Die weiteren Intervalle gewinnt man induktiv durch ein Bisektionsverfahren, bei dem jeweils eine Intervallhälfte ausgewählt wird, die unendlich viele Folgenglieder enthält. Dieses Verfahren stellt sicher, dass einerseits am Ende eine Intervallschachtelung entsteht und andererseits die eindeutige Zahl, die in allen Intervallen enthalten ist, tatsächlich ein Häufungswert der Folge ist (vgl. Proposition 4.51).*

Übung 4.60 (Rising Sun Lemma). Zeigen Sie, dass jede reelle Folge $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine monotone Teilfolge besitzt. Betrachten Sie dazu die Indexmenge

$$I := \{n \in \mathbb{N} : a_\ell \leq a_n \text{ für alle } \ell \geq n\}$$

und unterscheiden Sie die Fälle, dass I unendlich oder endlich ist.



Wir können nun Konvergenz und bestimmte Divergenz reeller Folgen auch über Konvergenz von Teilfolgen und die Häufungswerte der Folge charakterisieren. Für reelle Folgen gilt:

Satz 4.61 (äquivalente Charakterisierungen von (uneigentlicher) Konvergenz). *Es sei $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine reelle Folge und $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Dann sind äquivalent:*

- (i) Die Folge $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert (uneigentlich) gegen a .
- (ii) Jede Teilfolge von $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert (uneigentlich) gegen a .
- (iii) Jede Teilfolge von $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ besitzt eine Teilfolge, die (uneigentlich) gegen a konvergiert.
- (iv) Es gilt $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = a = \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n$, d.h. die Folge $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ hat nur a als (uneigentlichen) Häufungswert.

Beweis. Wir zeigen die Äquivalenzen über die Implikationen (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (iv) $\Rightarrow$ (i).

Implikation (i) $\Rightarrow$ (ii). Dies haben wir bereits mit Lemma 4.49 gezeigt.

Implikation (ii) $\Rightarrow$ (iii). Da in (ii) bereits jede Teilfolge (uneigentlich) konvergiert, ist auch die Aussage (iii) klar (und zwar ohne die Notwendigkeit der Auswahl einer weiteren Teilfolge).

Implikation (iii) $\Rightarrow$ (iv). Nach Satz 4.56 sind der Limes superior $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$ und der Limes inferior $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n$ Häufungswerte der Folge $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Betrachten wir beliebige zugehörige Teilfolgen $\{a_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$, $\{a_{\tilde{n}_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ von $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, also mit

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n \quad \text{und} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} a_{\tilde{n}_k} = \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n,$$

so konvergieren Teilfolgen davon nach (iii) jeweils gegen a . Da Grenzwerte von Folgen eindeutig bestimmt sind (falls existent), können wir damit den Limes superior und Limes inferior als

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = a \quad \text{und} \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = a$$

identifizieren. Da a damit sowohl der größte als auch der kleinste Häufungswert von $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ist, kann es keine weitere Häufungswerte geben und die Aussage in (iv) ist gezeigt.

Implikation (iv) $\Rightarrow$ (i). Wir bemerken zunächst die Ungleichung

$$\inf\{a_\ell : \ell \geq n\} \leq a_n \leq \sup\{a_\ell : \ell \geq n\} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Für $a \in \mathbb{R}$ konvergiert bei $n \rightarrow \infty$ sowohl der rechte als auch der linke Ausdruck nach Definition des Limes superior und des Limes inferior gegen a , also schließen wir mit dem Einschachtelungsprinzip aus Satz 4.28 (iii) auf die Konvergenz von $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ gegen a . Ist dagegen $a = \infty$, so ist die rechte Seite konstant ∞ und die linke Seite eine Unendlichfolge, also folgt die uneigentliche Konvergenz von $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ gegen ∞ mit dem Minorantenkriterium für Unendlichfolgen aus Satz 4.28 (ii). Im Fall $a = -\infty$ ergibt sich die uneigentliche Konvergenz von $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ gegen $-\infty$ schließlich durch Übergang auf die Folge $\{-a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ und deren uneigentliche Konvergenz gegen ∞ . $\square$

Bemerkung 4.62. Die Aussage (iii) erscheint im Vergleich zu (i) deutlich schwächer und ist gerade für den Nachweis von Konvergenz einer Folge besonders nützlich, da wir für jede Teilfolge “nur” noch die Konvergenz einer (Teil-)Teilfolge gegen den Grenzwertkandidaten zeigen müssen.

Übung 4.63. Bestimmen Sie den Limes superior, Limes inferior und gegebenenfalls den Grenzwert für die reellen Folgen $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ und $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ mit

$$a_n := \sqrt[n]{(1 + (-1)^n)^n + 2} \quad \text{und} \quad b_n := \text{kleinster Primteiler von } n + 1 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Durch Übergang auf Real- und Imaginärteile bzw. mit dem Satz 4.58 von Bolzano–Weierstraß erhalten wir als direkte Folgerung von Satz 4.61 die entsprechenden Äquivalenzen für die Konvergenz einer komplexen Folge.

Korollar 4.64. Es sei $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine komplexe Folge und $a \in \mathbb{C}$. Dann sind äquivalent:

- (i) Die Folge $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert gegen a .
- (ii) Jede Teilfolge von $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert gegen a .
- (iii) Jede Teilfolge von $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ besitzt eine Teilfolge, die gegen a konvergiert.
- (iv) Die Folge $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ist beschränkt und hat nur a als Häufungswert.

Beweis. Wir begründen kurz die Gültigkeit der einzelnen Implikationen.

Implikation (i) $\Rightarrow$ (ii). Ist $\{a_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ eine beliebige Teilfolge von $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, so konvergieren die reellen Folgen $\{\operatorname{Re}(a_{n_k})\}_{k \in \mathbb{N}}$ und $\{\operatorname{Im}(a_{n_k})\}_{k \in \mathbb{N}}$ wegen Lemma 4.49 gegen $\operatorname{Re}(a)$ bzw. $\operatorname{Im}(a)$. Damit konvergiert $\{a_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ wegen Übung 4.17 ebenfalls gegen a .

Implikation (ii) $\Rightarrow$ (iii). Dies ist wie in Satz 4.61 wieder offensichtlich.

Implikation (iii) $\Rightarrow$ (iv). Wegen $a \in \mathbb{C}$ schließen wir aus der reellen Version von Satz 4.61 und Korollar 4.52, dass die Folgen $\{\operatorname{Re}(a_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ und $\{\operatorname{Im}(a_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ beschränkt sind und gegen $\operatorname{Re}(a)$ bzw. $\operatorname{Im}(a)$ konvergieren. Damit ist $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ beschränkt (vgl. Lemma 3.9) und konvergiert gegen a , womit a dann der einzige Häufungswert der Folge $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ist.

Implikation (iv) $\Rightarrow$ (i). Wir argumentieren über Widerspruch und nehmen an, dass $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge mit einzigem Häufungswert a ist, die jedoch nicht gegen a konvergiert. Dann existiert ein $\varepsilon > 0$, so dass

$$\{n \in \mathbb{N} : |a_n - a| \geq \varepsilon\} \quad \text{unendlich ist.}$$

Nummerieren wir diese Elemente der Reihe nach, schließen wir damit auf die Existenz einer Teilfolge, $\{a_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$, die a nicht als Häufungswert hat. Diese Teilfolge ist nach wie vor beschränkt und muss daher nach dem Satz 4.58 von Bolzano–Weierstraß einen Häufungswert $\tilde{a} \neq a$ besitzen, im Widerspruch zur Annahme in (iv). Damit konvergiert $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ also gegen a . $\square$

Übung 4.65. Zeigen Sie für eine komplexe Folge $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ die Äquivalenz

$$\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ konvergiert} \quad \Leftrightarrow \quad \{a_{2n}\}_{n \in \mathbb{N}}, \{a_{2n-1}\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ und } \{a_{3n}\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ konvergieren.}$$

4.4 Cauchy-Folgen

Wir behandeln schließlich noch das Kriterium von Cauchy für die Konvergenz einer komplexen Folge. Dieses Kriterium tritt später noch in zahlreichen Varianten für allgemeinere Folgen auf und hat gegenüber den anderen Konvergenzkriterien den Vorteil, dass es ohne einen Grenzwertkandidaten auskommt. Wir führen zunächst den Begriff der Cauchy-Eigenschaft für komplexe Folgen ein.

Definition 4.66 (Cauchy-Folge). Es sei $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine komplexe Folge. Wir sagen, dass $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist oder die Cauchy-Eigenschaft besitzt, falls zu jedem $\varepsilon > 0$ ein Folgenindex $n_0 \in \mathbb{N}$

existiert mit

$$|a_n - a_m| < \varepsilon \quad \text{für alle } m, n \geq n_0.$$

Beispiele 4.67.

- (i) Wir betrachten die harmonische Folge $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ mit $a_n = \frac{1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wir wählen zu einem beliebig vorgegebenen $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$. Dann gilt für den Abstand zweier Folgenglieder $m, n \geq n_0$

$$\left| \frac{1}{n} - \frac{1}{m} \right| < \max \left\{ \frac{1}{m}, \frac{1}{n} \right\} < \varepsilon,$$

und die harmonische Folge besitzt somit die Cauchy-Eigenschaft.

- (ii) Für die geometrische Folge $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ mit $a_n = (-1)^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ haben zwei benachbarte Folgenglieder immer Abstand $|a_n - a_{n+1}| = 2$. Damit können wir für $\varepsilon = 2$ kein $n_0 \in \mathbb{N}$ finden mit $|a_n - a_m| < 2$ für alle $m, n \geq n_0$, und die Folge $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ hat damit nicht die Cauchy-Eigenschaft.
- (iii) Wir summieren die ersten $n \in \mathbb{N}$ Glieder der harmonischen Folge und betrachten die dazugehörige Folge $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ mit

$$a_n := \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Wir schätzen die Differenz der Folgenglieder a_{2n} und a_n für jedes $n \in \mathbb{N}$ über

$$|a_{2n} - a_n| = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n} = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$$

nach unten ab. Insbesondere zu $\varepsilon = \frac{1}{2}$ können wir damit kein $n_0 \in \mathbb{N}$ finden, so dass $|a_n - a_m| < \frac{1}{2}$ für alle $m, n \geq n_0$ gilt. Damit ist $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ also keine Cauchy-Folge (obwohl der Abstand zweier benachbarter Folgenglieder wegen $|a_{n+1} - a_n| = \frac{1}{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ eine Nullfolge ist).

Wir halten zwei einfache Eigenschaften von Cauchy-Folgen fest.

Lemma 4.68. *Es sei $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine komplexe Cauchy-Folge. Dann gelten die folgenden Aussagen:*

- (i) *Die Folge $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ist beschränkt.*
- (ii) *Falls $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge besitzt, so konvergiert bereits die ganze Folge $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, und zwar gegen den Grenzwert der konvergenten Teilfolge.*

Beweis.

- (i) Wir argumentieren mit einem ähnlichen Argument wie für die Beschränktheit konvergenter Folgen im Beweis von Lemma 4.14. Zu $\varepsilon = 1$ finden wir nach Definition einer Cauchy-Folge ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass insbesondere die Abschätzung

$$|a_n - a_{n_0}| < 1 \quad \text{für alle } n \geq n_0$$

gilt. Damit weicht die Folge $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ab diesem Folgenindex n_0 also um höchstens 1 vom fixierten Wert a_{n_0} ab und wir folgern die Beschränktheit von $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ mit

$$|a_n| \leq \max\{|a_1|, \dots, |a_{n_0-1}|, 1 + |a_{n_0}|\} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

- (ii) Es sei $\{a_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ eine Teilfolge von $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, die gegen ein $a \in \mathbb{C}$ konvergiert. Nach Definition der Konvergenz der Teilfolge und der Cauchy-Eigenschaft der Folge finden wir zu jedem beliebigen $\varepsilon > 0$ zwei Folgenindizes $k_0, n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$|a_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{für alle } k \geq k_0 \quad \text{und} \quad |a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{für alle } m, n \geq n_0.$$

Wählen wir nun ein festes $k \geq k_0$ mit $n_k \geq n_0$, so folgt aus der Dreiecksungleichung

$$|a_n - a| \leq |a_n - a_{n_k}| + |a_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq n_0,$$

also wegen der Beliebigkeit von $\varepsilon > 0$ die Konvergenz der ganzen Folge. $\square$

Aus diesem Lemma können wir nun sofort schlussfolgern, dass für komplexen Folgen die Cauchy-Eigenschaft notwendig und hinreichend für deren Konvergenz ist.

Satz 4.69 (Cauchy-Kriterium). *Eine komplexe Folge $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ist genau dann konvergent, wenn sie eine Cauchy-Folge ist.*

Beweis. Wir nehmen zunächst an, dass $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ gegen ein $a \in \mathbb{C}$ konvergiert. Zu jedem beliebig vorgegebenen $\varepsilon > 0$ finden wir ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{für alle } n \geq n_0.$$

Mit der Dreiecksungleichung folgt dann

$$|a_n - a_m| < |a_n - a| + |a - a_m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad \text{für alle } m, n \geq n_0,$$

also die Cauchy-Eigenschaft von $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.

Als nächstes nehmen wir an, dass $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ die Cauchy-Eigenschaft besitzt. Nach Lemma 4.68 (i) ist $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ beschränkt und besitzt daher nach dem Satz 4.58 von Bolzano–Weierstraß eine konvergente Teilfolge. Aus Lemma 4.68 (ii) ergibt sich daraus die Konvergenz der ganzen Folge $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. $\square$

Für Folgen, die induktiv über eine Iterationsvorschrift $x_n = f(x_{n-1})$ definiert sind, haben wir in Satz 4.38 bereits gesehen, wie man aus Monotonie und Beschränktheit eine Konvergenzaussage gewinnen kann. Als abstrakte Anwendung des Cauchy-Kriterium zeigen wir nun, wie man aus einer Kontraktionseigenschaft der bei der Folgenrechtsvorschrift involvierten Funktion auf die Konvergenz schließen kann.

Satz 4.70 (Kontraktionssatz). *Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein abgeschlossenes Intervall und $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ eine Selbstabbildung, d.h. mit $f(I) \subset I$, und eine strikte Kontraktion auf I , d.h. mit der Eigenschaft*

$$|f(x) - f(\tilde{x})| \leq \kappa |x - \tilde{x}| \quad \text{für alle } x, \tilde{x} \in I \text{ und ein } \kappa \in [0, 1).$$

Dann besitzt f genau einen Fixpunkt in I , also einen Punkt $x^ \in I$ mit $x^* = f(x^*)$. Ist zudem $x_0 \in I$ ein beliebiger Startwert, so konvergiert die Folge $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ mit $x_n := f(x_{n-1})$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gegen den Fixpunkt x^* .*

★ *Beweis.* Wir zerlegen den Beweis des Satzes in mehrere Schritte.

Eindeutigkeit des Fixpunktes. Wir überlegen uns zunächst, dass höchstens ein Fixpunkt von f in I existiert. Dazu nehmen wir an dass $x^*, \tilde{x}^* \in I$ zwei Fixpunkte von f sind. Mit der Fixpunkteigenschaft von $x^*, \tilde{x}^*$ und der Kontraktionseigenschaft von f gilt dann

$$|x^* - \tilde{x}^*| = |f(x^*) - f(\tilde{x}^*)| \leq \kappa |x^* - \tilde{x}^*|,$$

was wegen $\kappa < 1$ nur für $x^* = \tilde{x}^*$ möglich ist.

Konvergenz von $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Nach Definition der Folge $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ und wegen der Kontraktionseigenschaft von f gilt für den Abstand zweier benachbarter Folgenglieder

$$|x_{n+1} - x_n| = |f(x_n) - f(x_{n-1})| \leq \kappa |x_n - x_{n-1}| \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Induktiv folgern wir daraus

$$|x_{k+1} - x_k| \leq \kappa^k |x_1 - x_0| \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}.$$

Der Induktionsanfang $k = 1$ ist offensichtlich. Nehmen wir dann an, dass die Aussage für ein beliebiges, aber festes $k \in \mathbb{N}$ bereits gezeigt ist, so folgt die Aussage durch Anwendung der obigen Abschätzung mit $n = k + 1$ über

$$|x_{k+2} - x_{k+1}| \leq \kappa |x_{k+1} - x_k| \stackrel{\text{IV}}{\leq} \kappa^{k+1} |x_1 - x_0|.$$

Nun können wir den Abstand zweier beliebiger Folgenglieder x_n und x_m mit $n \geq m$ über die Dreiecksungleichung und die geometrische Summenformel aus Satz 1.83 abschätzen:

$$\begin{aligned} |x_n - x_m| &\leq \sum_{k=m}^{n-1} |x_{k+1} - x_k| \leq \sum_{k=m}^{n-1} \kappa^k |x_1 - x_0| \\ &= \left(\sum_{k=0}^{n-1} \kappa^k - \sum_{k=0}^{m-1} \kappa^k \right) |x_1 - x_0| \\ &= \left(\frac{1 - \kappa^n}{1 - \kappa} - \frac{1 - \kappa^m}{1 - \kappa} \right) |x_1 - x_0| \leq \frac{\kappa^m}{1 - \kappa} |x_1 - x_0|. \end{aligned}$$

Ist $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben, so können wir wegen $\kappa \in [0, 1)$ mithilfe von Korollar 2.56 ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$\frac{\kappa^{n_0}}{1 - \kappa} |x_1 - x_0| < \varepsilon$$

finden. Damit folgt $|x_n - x_m| < \varepsilon$ für alle $m, n \geq n_0$ und wir haben nachgewiesen, dass $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist und folglich nach Satz 4.69 gegen ein $x^* \in \mathbb{R}$ konvergiert.

Identifikation des Grenzwertes. Wir stellen zunächst fest, dass das Intervall I abgeschlossen ist, die Folge $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ wegen $f(I) \subset I$ ihre Werte in I annimmt und damit der Grenzwert $x^* = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ ebenfalls zum Intervall I gehört (vgl. Übung 4.18). Des weiteren konvergiert nach Definition der Folge $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ auch die Folge $\{f(x_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$. Aufgrund der Abschätzung

$$|f(x_n) - f(x^*)| \leq \kappa |x_n - x^*| \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N} \quad (4.3)$$

können wir einerseits das Majorantenkriterium für Nullfolgen aus Satz 4.28 (i) anwenden und folgern so

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x^*),$$

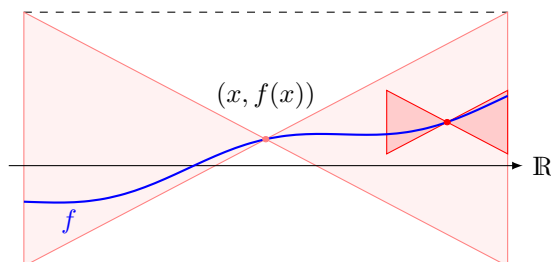
andererseits haben wir mit $x_{n+1} = f(x_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ auch

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = x^*.$$

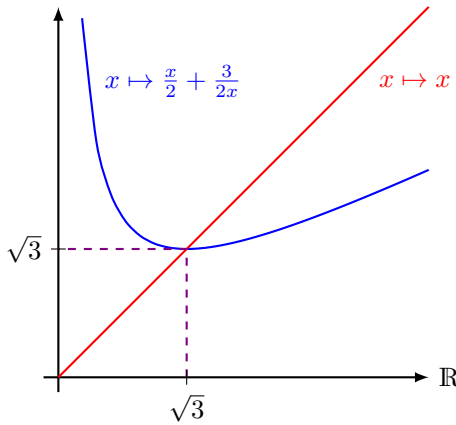
Folglich erfüllt der Grenzwert die Identität $x^* = f(x^*)$ und wir haben damit den Beweis der Konvergenz von $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ gegen den (gemäß des ersten Beweisschrittes eindeutigen) Fixpunkt $x^* \in I$ abgeschlossen. Damit ist insbesondere auch die Existenz des Fixpunktes von f (durch explizite Konstruktion) nachgewiesen. $\square$

Bemerkungen 4.71.

- (1) Für eine auf einem Intervall $I \subset \mathbb{R}$ erklärte Funktion $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ bedeutet die Kontraktionseigenschaft aus Satz 4.70 gerade, dass für jedes $x \in I$ alle Punkte $(\tilde{x}, f(\tilde{x}))$ (mit $\tilde{x} \in I$) in dem von $(x, f(x))$ ausgehenden Doppelkegel mit Steigung $\pm \kappa$ liegen. Wir werden später noch sehen, dass sich die maximale Steigung bzw. die Kontraktionszahl κ für eine differenzierbare Funktion f mithilfe der Ableitung berechnen lässt.



- (2) Ein Fixpunkt einer Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist nichts anderes als der Schnittpunkt des Funktionsgraphen von f mit der Geraden $x \mapsto x$. Für allgemeine Funktionen ist es möglich, dass kein, genau ein oder mehr als ein Fixpunkt existiert.



- (3) Beim Heron-Verfahren in Satz 4.38 für die Berechnung der Quadratwurzel einer gegebenen Zahl $y \in \mathbb{R}^+$ haben wir den Fixpunkt der Abbildung $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ mit

$$f(x) = \frac{1}{2} \left(x + \frac{y}{x} \right) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^+$$

bestimmt. Für diese Funktion kann man leicht zeigen, dass sie auf jedem Intervall $I = [a, \infty)$ mit $a \in \mathbb{R}^+$ und $a^2 > \frac{3}{y}$ eine Selbstabbildung und strikte Kontraktion ist. Um den Kontraktionssatz 4.70 anzuwenden, muss man sich daher auf Startwerte $x_0 \geq a$ beschränken (wohingegen die Argumentation über Monotonie im Beweis von Satz 4.38 alle Startwerte $x_0 \in \mathbb{R}^+$ erlaubt).

★ **Übung 4.72.** Es sei $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ die rekursiv definierte Folge mit $x_1 = 1$ und $x_{n+1} = \frac{1}{2+x_n}$ für $n \in \mathbb{N}$.

- (i) Überlegen Sie sich, dass $x_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.
- (ii) Zeigen Sie über Satz 4.70, dass $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert und bestimmen Sie den Grenzwert.

★ **Verschiedene Varianten der axiomatischen Einführung der Vollständigkeit von $\mathbb{R}$.** Die in Definition 2.48 vorgestellte Supremumseigenschaft für nach oben beschränkte Mengen ist nur eine von vielen Möglichkeiten, die Vollständigkeit der reellen Zahlen axiomatisch einzuführen. Beispielsweise sind die folgenden Eigenschaften äquivalent:

- (i) Supremumseigenschaft für nicht-leere, nach oben beschränkte Teilmengen von $\mathbb{R}$,
- (ii) Archimedisches Axiom und Gültigkeit des Intervallschachtelungsprinzip in $\mathbb{R}$,
- (iii) Archimedisches Axiom und Konvergenz jeder Cauchy-Folge in $\mathbb{R}$.

Beweis. Wir begründen kurz die Gültigkeit der einzelnen Implikationen.

Implikation (i) $\Rightarrow$ (ii). Wir stellen hierzu fest, dass sowohl für den Beweis des archimedischen Axioms in Satz 2.54 als auch für den Beweis des Intervallschachtelungsprinzip in Satz 2.61 lediglich die Supremumseigenschaft für nicht-leere, nach oben bzw. unten beschränkte Teilmengen von $\mathbb{R}$ verwendet wurde.

Implikation (ii) $\Rightarrow$ (iii). Es sei $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $\mathbb{R}$. Zu jedem $k \in \mathbb{N}$ finden wir dann ein $n(k) \in \mathbb{N}$ mit

$$|a_n - a_m| < \frac{1}{k} \quad \text{für alle } m, n \geq n(k).$$

Wir definieren nun die abgeschlossenen Intervalle $J_k := [a_{n(k)} - \frac{1}{k}, a_{n(k)} + \frac{1}{k}]$ und setzen

$$I_\ell := \bigcap_{k=1}^{\ell} J_k \quad \text{für alle } \ell \in \mathbb{N}.$$

Offensichtlich gilt $I_{\ell+1} \subset I_\ell$ für alle $\ell \in \mathbb{N}$. Weiterhin haben wir nach Konstruktion $|I_\ell| \leq \frac{2}{\ell}$ für alle $\ell \in \mathbb{N}$. Aus Korollar 2.56 (i) zum archimedischen Axiom schließen wir, dass $\{I_\ell\}_{\ell \in \mathbb{N}}$ eine Intervallschachtelung im Sinne von Definition 2.60 ist, so dass es nach Annahme genau eine reelle Zahl $a \in \mathbb{R}$ mit $a \in I_\ell$ für alle $\ell \in \mathbb{N}$ gibt. Wir zeigen nun, dass a tatsächlich der Grenzwert der Cauchy-Folge $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ist.

Dazu sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Wiederum mit Korollar 2.56 (i) finden wir ein $k \in \mathbb{N}$ mit $\frac{2}{k} < \varepsilon$. Nach Wahl von $n(k)$ haben wir dann

$$|a_n - a| \leq |a_n - a_{n(k)}| + |a_{n(k)} - a| \leq \frac{1}{k} + \frac{1}{k} < \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq n(k),$$

so dass die Konvergenz $a_n \rightarrow a$ bei $n \rightarrow \infty$ gezeigt ist.

Implikation (iii) $\Rightarrow$ (i). Es sei $M \subset \mathbb{R}$ eine beliebige nicht-leere, nach oben beschränkte Menge. Mithilfe des Bisektionsverfahrens definieren wir induktiv zwei Folgen $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ und $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Dazu wählen wir eine beliebige obere Schranke $a_1 \in \mathbb{R}$ von M und ein beliebiges Element $x_1 \in M$, und wählen dann für $n \in \mathbb{N}$

$$a_{n+1} := \begin{cases} \frac{a_n + x_n}{2} & \text{falls } \frac{a_n + x_n}{2} \text{ eine obere Schranke an } M \text{ ist,} \\ a_n & \text{sonst,} \end{cases}$$

$$x_{n+1} := \begin{cases} x_n & \text{falls } \frac{a_n + x_n}{2} \text{ eine obere Schranke an } M \text{ ist,} \\ \frac{a_n + x_n}{2} & \text{sonst.} \end{cases}$$

Nach Konstruktion ist $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine nicht-wachsende und $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine nicht-fallende Folge, so dass x_n jeweils in M liegt, a_n eine obere Schranke an M darstellt und die Abschätzung

$$a_{n+1} - x_{n+1} = \frac{a_n - x_n}{2} = 2^{-n}(a_1 - x_1) \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N} \quad (4.4)$$

gilt. Wir zeigen nun, dass $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ und $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ Cauchy-Folgen sind. Dazu sei $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben. Nach Korollar 2.56 (iii) zum archimedischen Axiom bestimmen wir $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $2^{-n_0}4|a_1 - x_1| < \varepsilon$. Dann folgt aus der Dreiecksungleichung sowie der Gleichung (4.4)

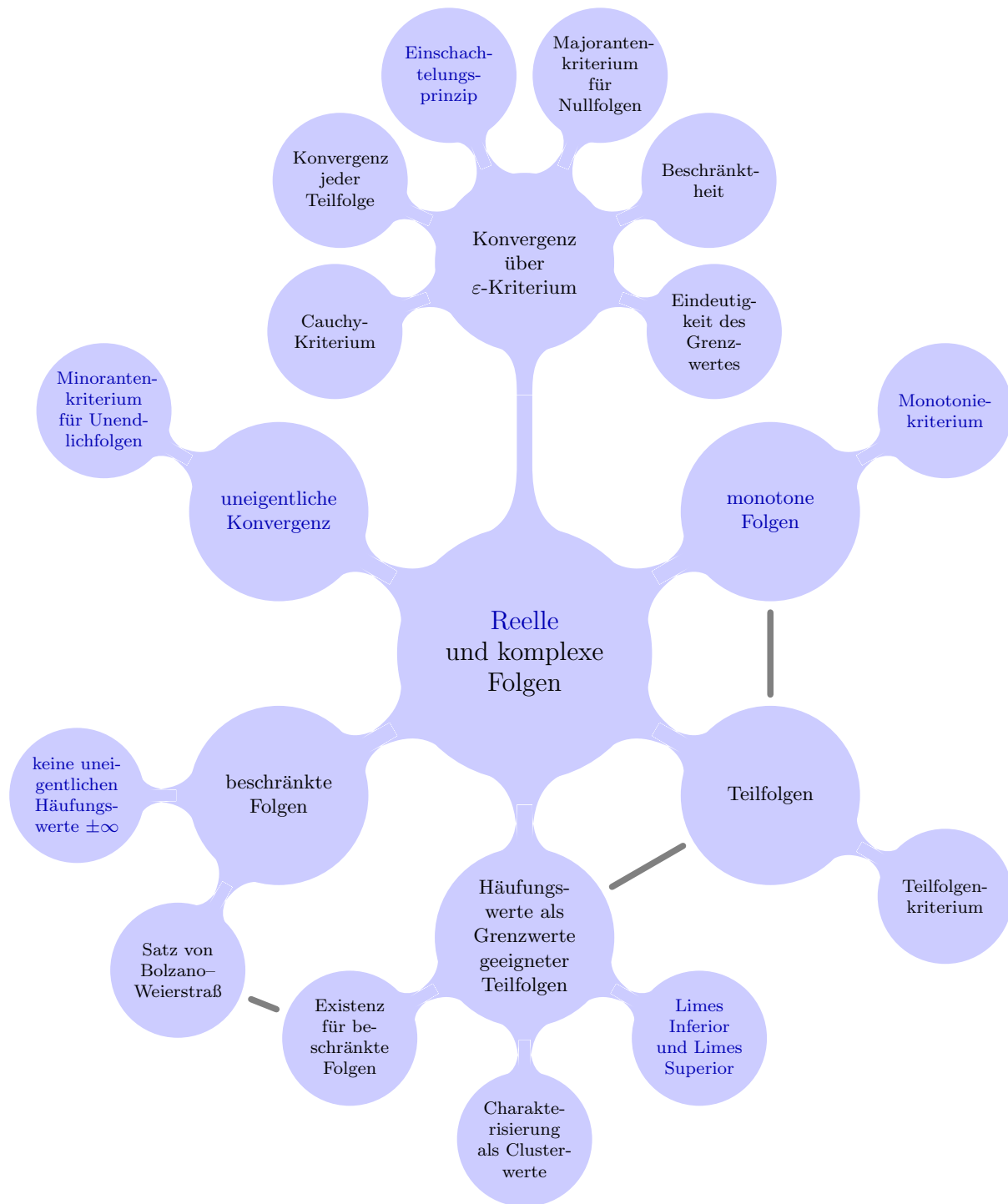
$$\begin{aligned} |a_n - a_m| &\leq |a_n - x_{n_0}| + |x_{n_0} - a_m| \\ &\leq 2|a_{n_0} - x_{n_0}| = 2^{-n_0+2}|a_1 - x_1| < \varepsilon \quad \text{für alle } m, n \geq n_0 \end{aligned}$$

und analog

$$|x_n - x_m| \leq 2^{-n_0+2}|a_1 - x_1| < \varepsilon \quad \text{für alle } m, n \geq n_0.$$

Damit sind $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ und $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ wie behauptet reelle Cauchy-Folgen und konvergieren daher nach Annahme gegen Grenzwerte $a \in \mathbb{R}$ bzw. $x \in \mathbb{R}$. Anhand der Gleichung (4.4) erkennen wir leicht, dass $a = x$ gelten muss. Es bleibt noch zu zeigen, dass a das Supremum von M ist, also die kleinste obere Schranke von M darstellt. Wir zeigen zunächst über Widerspruch, dass a tatsächlich eine obere Schranke von M ist. Wäre dies nämlich nicht der Fall, dann existiert ein $m \in M$ mit $a < m$. Wegen $a_n \rightarrow a$ bei $n \rightarrow \infty$ haben wir dann $a \leq a_n < m$ für alle $n \in \mathbb{N}$ hinreichend groß, was im Widerspruch dazu steht, dass a_n für alle $n \in \mathbb{N}$ nach Konstruktion eine obere Schranke von M ist. Als nächstes zeigen wir über Widerspruch, dass a auch schon die kleinste obere Schranke von M ist. Gäbe es nämlich eine obere Schranke $\tilde{a}$ von M mit $\tilde{a} < a$, so würde wegen $x_n \rightarrow x = a$ bei $n \rightarrow \infty$ auch $\tilde{a} < x_n \leq a$ für alle $n \in \mathbb{N}$ hinreichend groß gelten. Dies steht aber im Widerspruch dazu, dass $x_n \in M$ für alle $n \in \mathbb{N}$ nach Konstruktion gilt und $\tilde{a}$ nach Annahme eine obere Schranke von M ist. $\square$

Mindmap. Überlegen Sie sich anhand der Mindmap, wie die wichtigsten Begriffe und Konzepte aus diesem Kapitel zusammenhängen und ob Sie diese verstanden haben!



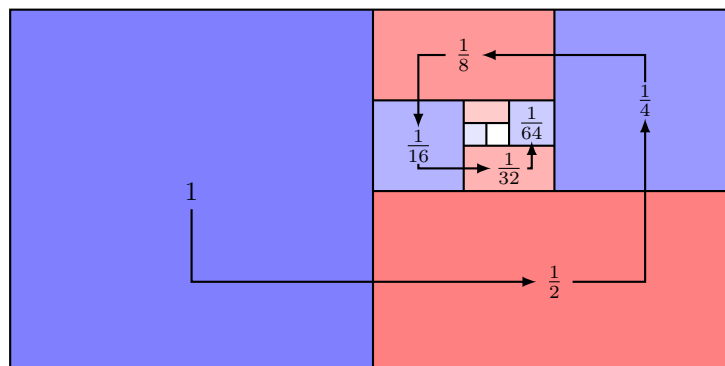
Kapitel 5

Reihen

In diesem Kapitel verallgemeinern wir die Summation von endlich vielen Summanden auf die Summation von abzählbar vielen Summanden. Dies ist insbesondere in zwei Situationen relevant. Einerseits kann man sich fragen, wie man eine unendliche Summe einer vorgegebenen Form wie etwa

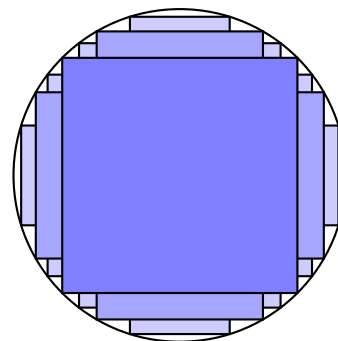
$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \dots$$

mathematisch rigoros definieren und ihr einen Wert zuweisen kann.



In diesem konkreten Beispiel stellen wir fest, dass die endliche Summe, wenn man die Summation nach dem n -ten Summanden abbricht, gerade eine geometrische Summe ist, für die wir nach Satz 1.83 gerade $2 - 2^{-n}$ erhalten, so dass der Wert dieser endlichen “partiellen” Summen im Limes $n \rightarrow \infty$ gegen 2 konvergiert. Dies kann man sich auch gut graphisch vorstellen, indem man Rechtecke der Größe 2^{-k} geschickt und ohne Überlappung in einem Rechteck der Größe 2 anordnet.

Andererseits kann man sich für die Fläche (oder das Volumen) von Objekten interessieren, die nicht durch gerade Seiten (oder Flächen) begrenzt sind. Da man die Fläche von Rechtecken kennt, kann man das Objekt dann von innen durch viele kleine, nicht überlappende Rechtecke approximieren und deren Flächen addieren. Dies involviert typischerweise immer kleiner werdende Rechtecke, deren Anzahl n immer größer wird, und das Objekt wird erst im Limes $n \rightarrow \infty$ ohne Fehler approximiert. Damit ergibt sich für eine solche Flächenberechnung ebenfalls eine unendliche Summe. Interessiert man sich etwa für die Fläche der Einheitskreisscheibe, so kann man mit dem größten Quadrat, das komplett im Kreis liegt, starten und dann sukzessive die verbleibende Fläche mit kleinen Rechtecken ausfüllen. Die Summe dieser Fläche approximiert dann den tatsächlichen Flächeninhalt π beliebig gut.



Die eben beschriebenen unendlichen Summationen kann man als spezielle Folgen auffassen, die über Zuwächse charakterisiert sind, so dass insbesondere viele Konvergenzresultate für Folgen aus Kapitel 4 anwendbar sind. Zudem lernen wir nun einige Techniken kennen, wie man die Werte einiger unendlichen Summationen explizit berechnen kann. Wir werden später zudem sehen, dass unendliche Summen auch ein wichtiges Werkzeug zur Konstruktion und Darstellung von Funktionen bilden.

Definition 5.1 (Partialsummen, Reihe und Konvergenz). *Es sei $\{a_k\}_{k \geq k_0}$ für ein $k_0 \in \mathbb{Z}$ eine komplexe (oder speziell eine reelle) Folge. Für $n \geq k_0$ definieren wir die n -te Partialsumme von $\{a_k\}_{k \geq k_0}$ als*

$$s_n := \sum_{k=k_0}^n a_k = a_{k_0} + \dots + a_n.$$

Wir bezeichnen die Folge $\{s_n\}_{n \geq k_0}$ der Partialsummen als (unendliche) Reihe mit Gliedern $\{a_k\}_{k \geq k_0}$ und schreiben dafür auch

$$\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k.$$

Wir sagen, dass diese Reihe konvergiert, falls die Folge $\{s_n\}_{n \geq k_0}$ der Partialsummen konvergiert, und andernfalls sagen wir, dass diese Reihe divergiert. Sind alle Glieder $\{a_k\}_{k \geq k_0}$ reell, so sagen wir bei einer divergenten Reihe entsprechend, dass sie uneigentlich konvergiert oder bestimmt divergiert, falls dies für die Folge $\{s_n\}_{n \geq k_0}$ der Partialsummen der Fall ist.

Für eine (ggf. uneigentlich) konvergente Reihe nennen wir den (ggf. uneigentlichen) Grenzwert der Folge $\{s_n\}_{n \geq k_0}$ der Partialsummen den Wert oder die Summe der Reihe und setzen

$$\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k := \lim_{n \rightarrow \infty} s_n.$$

Bemerkungen 5.2.

(1) Das Symbol $\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k$ hat zwei Bedeutungen. Es kann stehen für

- die Folge $\{s_n\}_{n \geq k_0}$ der Partialsummen,
- den (ggf. uneigentlichen) Grenzwert der Folge $\{s_n\}_{n \geq k_0}$ der Partialsummen.

Die Bedeutung ist immer aus dem Kontext ersichtlich. Verwenden wir die Bedeutung als Folge von Partialsummen, spielt es keine Rolle, ob der Grenzwert existiert. In Situationen, in denen das Konvergenzverhalten (noch) nicht klar ist, sprechen wir daher manchmal auch von einer formalen Reihe. Verwenden wir dagegen die Bedeutung als Grenzwert, so muss bereits sichergestellt sein, dass der Grenzwert der Folge der Partialsummen (ggf. uneigentlich) existiert.

(2) Eine Reihe $\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k$ ist nach Definition 5.1 genau dann konvergent, wenn die Folge $\{s_n\}_{n \geq k_0}$ der Partialsummen konvergiert. Mithilfe der Definition 4.8 der Konvergenz einer Folge und des Cauchy-Kriteriums aus Satz 4.69 ist die Reihe also genau dann konvergent, falls eine der folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt ist:

- es gibt eine Zahl $s \in \mathbb{C}$, so dass zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \geq k_0$ existiert mit

$$|s_n - s| = \left| \sum_{k=k_0}^n a_k - s \right| < \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq n_0;$$

- zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $n_0 \geq k_0$ mit

$$|s_m - s_n| = \left| \sum_{k=k_0}^n a_k - \sum_{k=k_0}^m a_k \right| = \left| \sum_{k=n+1}^m a_k \right| < \varepsilon \quad \text{für alle } m \geq n \geq n_0.$$

- (3) Die Abänderung der Werte von endlich vielen Gliedern kann zwar den Wert der Reihe (falls existent), jedoch nicht das grundsätzliche Konvergenzverhalten ändern. Das Vertauschen von endlich vielen Gliedern ändert weder das grundsätzliche Konvergenzverhalten noch den Wert der Reihe (falls existent).
- (4) Jede Reihe $\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k$ kann man nach Definition 5.1 als eine Folge auffassen, nämlich als die Folge $\{s_n\}_{n \geq k_0}$ der Partialsummen. Umgekehrt kann man auch jede Folge $\{s_n\}_{n \geq k_0}$ als Reihe (und damit als Folge von Partialsummen) interpretieren, und zwar mit Gliedern $\{a_k\}_{k \geq k_0}$, definiert über

$$a_{k_0} := s_{k_0} \quad \text{und} \quad a_{k+1} := s_{k+1} - s_k \quad \text{für alle } k \geq k_0.$$

Um die Konvergenz von Reihen besser zu verstehen, überlegen wir uns zunächst, dass ihre Glieder notwendigerweise eine Nullfolge bilden, wenn die Reihe konvergiert.

Lemma 5.3. Es sei $\{a_k\}_{k \geq k_0}$ für ein $k_0 \in \mathbb{Z}$ eine komplexe Folge. Falls die Reihe $\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k$ konvergiert, so ist $\{a_k\}_{k \geq k_0}$ eine Nullfolge.

Beweis. Falls die Reihe $\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k$ konvergiert, so konvergiert die Folge $\{s_n\}_{n \geq k_0}$ der Partialsummen, mit $s_n := \sum_{k=k_0}^n a_k$ für $n \geq k_0$. Folglich haben wir

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} s_{n-1} \in \mathbb{C}.$$

Mit den Rechenregeln für Grenzwerte von Folgen aus Lemma 4.15 schließen wir dann auf die Behauptung

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (s_n - s_{n-1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n - \lim_{n \rightarrow \infty} s_{n-1} = 0. \quad \square$$

Bemerkung 5.4. Untersucht man eine Reihe auf Konvergenz, so sollte man zuerst überprüfen, ob ihre Glieder eine Nullfolge bilden. Es kann nämlich keine Konvergenz der Reihe vorliegen, wenn die Glieder keine Nullfolge sind (was man daher auch als Triviale Kriterium für Divergenz bezeichnet). Sind die Glieder dagegen eine Nullfolge, so muss man die Reihe noch weiter untersuchen, um ihre Konvergenz nachzuweisen oder auszuschließen. Mit den folgenden Beispielen 5.5 (ii) und (iii) haben wir zwei Beispiele von Reihen, deren Glieder jeweils eine Nullfolge bilden, wobei die erste Reihe konvergiert, die zweite aber nicht. Damit ist das Kriterium, dass die Glieder eine Nullfolge bilden, nur eine notwendige, jedoch keine hinreichende Bedingung für die Konvergenz der Reihe.

Beispiele 5.5.

- (i) Die *geometrische Reihe* ist für $z \in \mathbb{C}$ definiert als

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k.$$

- Für $|z| \geq 1$ haben wir $|z^k| = |z|^k \geq 1$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$. Somit bilden die Glieder $\{z^k\}_{k \geq 0}$ keine Nullfolge und die geometrische Reihe divergiert.
- Für $|z| < 1$ dagegen haben wir $|z^k| = |z|^k \rightarrow 0$ bei $k \rightarrow \infty$, so dass $\{z^k\}_{k \geq 0}$ eine Nullfolge darstellt. Da die geometrische Summenformel aus Satz 1.83 auch für komplexe Zahlen gilt, erhalten wir als Wert der n -ten Partialsumme

$$s_n := \sum_{k=0}^n z^k = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_0$$

und somit Konvergenz der Reihe mit Wert

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z} = \frac{1}{1 - z}.$$

(ii) Für die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$$

erhalten wir über die Teleskopeigenschaft (siehe Lemma 1.79) als Partialsummen

$$s_n := \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = 1 - \frac{1}{n+1} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Daraus folgt die Konvergenz der Reihe mit Wert

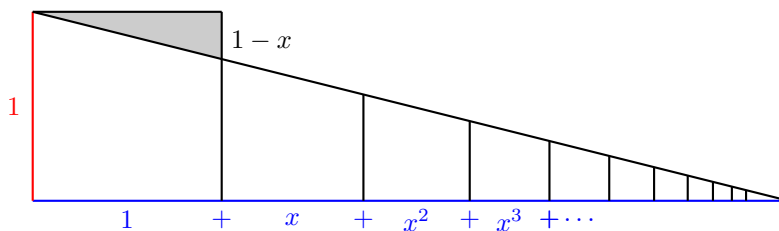
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = 1.$$

(iii) Die *harmonische Reihe* ist definiert als

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}.$$

Alle Folgenglieder sind positiv (und bilden sogar eine Nullfolge), so dass die Folge der Partialsummen monoton wächst. In Beispiel 4.67 (iii) haben wir außerdem gesehen, dass die Folge der Partialsummen nicht konvergiert. Damit liegt nach dem Monotoniekriterium aus Satz 4.36 uneigentliche Konvergenz der Reihe gegen ∞ vor.

★ **Übung 5.6.** Wir überlegen uns eine anschauliche Herleitung für den Wert der geometrischen Reihe für positive Zahlen $x \in (0, 1)$ und nehmen dafür an, dass bereits bekannt ist, dass die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$ konvergiert.



- (i) Begründen Sie zunächst über den Strahlensatz, dass die kürzere Kathete im grauen Dreieck die Länge $1 - x$ hat.
- (ii) Schließen Sie mittels Ähnlichkeit auf den Wert der geometrischen Reihe.

Übung 5.7. Bestimmen Sie reelle Zahlen $a, b, c \in \mathbb{R}$ mit

$$\frac{2}{k(k+1)(k+2)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1} + \frac{c}{k+2} \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}$$

und zeigen Sie damit die Konvergenz der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k(k+1)(k+2)}$.

Aus den Rechenregeln für konvergente Folgen können wir durch die Anwendung auf Partialsummen nun auch Rechenregeln für konvergente Reihen ableiten.

Lemma 5.8 (Rechenregeln für konvergente Reihen). *Es seien $\{a_k\}_{k \geq k_0}$ und $\{b_k\}_{k \geq k_0}$ für ein $k_0 \in \mathbb{Z}$ zwei komplexe Folgen, so dass die Reihen $\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=k_0}^{\infty} b_k$ konvergieren. Dann gelten die folgenden Aussagen:*

(i) Die Reihe $\sum_{k=k_0}^{\infty} (a_k + b_k)$ ist konvergent mit Wert

$$\sum_{k=k_0}^{\infty} (a_k + b_k) = \sum_{k=k_0}^{\infty} a_k + \sum_{k=k_0}^{\infty} b_k.$$

(ii) Die Reihe $\sum_{k=k_0}^{\infty} \lambda a_k$ ist für jedes $\lambda \in \mathbb{C}$ konvergent mit Wert

$$\sum_{k=k_0}^{\infty} \lambda a_k = \lambda \sum_{k=k_0}^{\infty} a_k.$$

(iii) Ist $\{c_k\}_{k \geq k_0}$ eine komplexe Folge, die genau aus den disjunkten Teilfolgen $\{a_k\}_{k \geq k_0}$ und $\{b_k\}_{k \geq k_0}$ besteht, d.h. es gibt zwei disjunkte, streng monoton wachsende Folgen $\{k_\ell\}_{\ell \geq k_0}$ und $\{\tilde{k}_\ell\}_{\ell \geq k_0}$ in $\mathbb{Z}$ mit

$$\{k \in \mathbb{Z} : k \geq k_0\} = \{k_\ell : \ell \in \mathbb{N}\} \cup \{\tilde{k}_\ell : \ell \in \mathbb{N}\}$$

sowie

$$c_{k_\ell} = a_\ell \quad \text{und} \quad c_{\tilde{k}_\ell} = b_\ell \quad \text{für alle } \ell \geq k_0,$$

so ist die Reihe $\sum_{k=k_0}^{\infty} c_k$ konvergent mit Wert

$$\sum_{k=k_0}^{\infty} c_k = \sum_{k=k_0}^{\infty} a_k + \sum_{k=k_0}^{\infty} b_k.$$

Beweis. Im Folgenden bezeichnen wir die Partialsummen zu den Reihen mit Gliedern $\{a_k\}_{k \geq k_0}$ und $\{b_k\}_{k \geq k_0}$ mit $\{s_n\}_{n \geq k_0}$ und $\{t_n\}_{n \geq k_0}$. Nach Annahme gelten die Konvergenzen

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \sum_{k=k_0}^{\infty} a_k \quad \text{und} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} t_n = \sum_{k=k_0}^{\infty} b_k.$$

(i) Für die Partialsummen $\{u_n\}_{n \geq k_0}$ der Reihe mit Gliedern $\{a_k + b_k\}_{n \geq k_0}$ haben wir

$$u_n = s_n + t_n \quad \text{für alle } n \geq k_0.$$

Da die Folgen $\{s_n\}_{n \geq k_0}$ und $\{t_n\}_{n \geq k_0}$ nach Annahme konvergieren, schließen wir aus Lemma 4.15 auf die Konvergenz der Folge $\{u_n\}_{n \geq k_0}$, mit

$$\sum_{k=k_0}^{\infty} (a_k + b_k) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n + \lim_{n \rightarrow \infty} t_n = \sum_{k=k_0}^{\infty} a_k + \sum_{k=k_0}^{\infty} b_k.$$

(ii) Für die Partialsummen $\{u_n\}_{n \geq k_0}$ der Reihe mit Gliedern $\{\lambda a_k\}_{k \geq k_0}$ haben wir

$$u_n = \lambda s_n \quad \text{für alle } n \geq k_0.$$

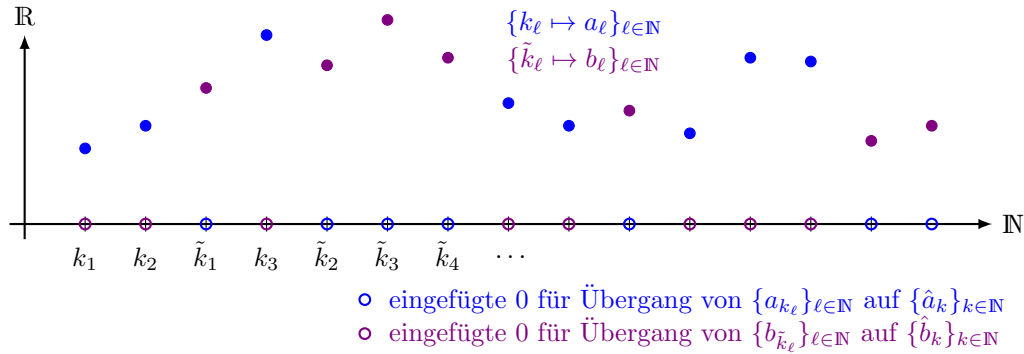
Analog zum Beweis von (i) folgern wir die Konvergenz der Reihe $\sum_{k=k_0}^{\infty} \lambda a_k$, mit

$$\sum_{k=k_0}^{\infty} \lambda a_k = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lambda \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lambda \sum_{k=k_0}^{\infty} a_k.$$

(iii) Wir definieren zunächst zwei Folgen $\{\hat{a}_k\}_{k \geq k_0}$ und $\{\hat{b}_k\}_{k \geq k_0}$ mittels

$$\hat{a}_k := \begin{cases} a_\ell & \text{falls } k = k_\ell \text{ für ein } \ell \geq k_0, \\ 0 & \text{falls } k \notin \{k_\ell : \ell \geq k_0\}. \end{cases} \quad \hat{b}_k := \begin{cases} 0 & \text{falls } k \notin \{\tilde{k}_\ell : \ell \geq k_0\}, \\ b_\ell & \text{falls } k = \tilde{k}_\ell \text{ für ein } \ell \geq k_0. \end{cases}$$

für alle $k \geq k_0$. Bei der Bildung von $\{\hat{a}_k\}_{k \geq k_0}$ bzw. $\{\hat{b}_k\}_{k \geq k_0}$ wird an der Stelle k also eine Null eingefügt, wenn k nicht in der Folge $\{k_\ell\}_{\ell \geq k_0}$ bzw. $\{\tilde{k}_\ell\}_{\ell \geq k_0}$ vorkommt. Dieses Einfügen einer Null passiert nach Voraussetzung an $\{k_\ell\}_{\ell \geq k_0}$ und $\{\tilde{k}_\ell\}_{\ell \geq k_0}$ an jeder Stelle k genau einmal, so dass sich eine Art “Reißverschlussverfahren” ergibt (im Bild für den Fall $k_0 = 1$ illustriert).



Da wir lediglich Glieder mit Wert 0 eingefügt haben, gilt die Konvergenz der Reihen mit Gliedern $\{\hat{a}_k\}_{k \geq k_0}$ und $\{\hat{b}_k\}_{k \geq k_0}$, mit Werten

$$\sum_{k=k_0}^{\infty} \hat{a}_k = \sum_{k=k_0}^{\infty} a_k \quad \text{und} \quad \sum_{k=k_0}^{\infty} \hat{b}_k = \sum_{k=k_0}^{\infty} b_k.$$

Wegen

$$c_k = \hat{a}_k + \hat{b}_k \quad \text{für alle } k \geq k_0$$

folgt dann aus (i) die Konvergenz der Reihe $\sum_{k=k_0}^{\infty} c_k$, mit

$$\sum_{k=k_0}^{\infty} c_k = \sum_{k=k_0}^{\infty} \hat{a}_k + \sum_{k=k_0}^{\infty} \hat{b}_k = \sum_{k=k_0}^{\infty} a_k + \sum_{k=k_0}^{\infty} b_k. \quad \square$$

Bemerkungen 5.9.

- (1) Wir stellen fest, dass die Reihenfolge der Summationen innerhalb der konvergenten Reihen jeweils nicht verändert wurde. Dies ist tatsächlich wesentlich für die allgemeine Gültigkeit der Aussagen, wie wir in Kapitel 5.3 noch sehen werden.
- (2) Eine typische Anwendung der Rechenregel aus Lemma 5.8 (iii) ist die Berechnung des Wertes einer Reihe, indem man getrennt die Werte der beiden Teilreihen bestimmt, die nur aus den Gliedern mit geradem bzw. ungeradem Folgenindex der ursprünglichen Reihe bestehen.

Übung 5.10. Es sei $\{a_k\}_{k \geq k_0}$ für ein $k_0 \in \mathbb{Z}$ eine komplexe Folge, so dass die Reihe $\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k$ konvergiert.

- (i) Zeigen Sie die Konvergenz der Reihen $\sum_{k=k_0}^{\infty} \operatorname{Re}(a_k)$ und $\sum_{k=k_0}^{\infty} \operatorname{Im}(a_k)$ mit Werten

$$\sum_{k=k_0}^{\infty} \operatorname{Re}(a_k) = \operatorname{Re} \left(\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k \right) \quad \text{bzw.} \quad \sum_{k=k_0}^{\infty} \operatorname{Im}(a_k) = \operatorname{Im} \left(\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k \right).$$

- (ii) Zeigen Sie die Konvergenz der Reihe $\sum_{k=k_0}^{\infty} \bar{a}_k$ mit Wert

$$\sum_{k=k_0}^{\infty} \bar{a}_k = \overline{\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k}.$$

5.1 Konvergenzkriterien für reelle Reihen

Wir beginnen in diesem Kapitel damit, unendliche Reihen $\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k$ auf Konvergenz zu untersuchen, und beschäftigen uns zunächst mit dem Fall, dass die Glieder $\{a_k\}_{k \geq k_0}$ reell sind. Sind die Glieder sogar (fast) alle nicht-negativ, so sind die Partialsummen (ab einem endlichen Folgenindex) monoton wachsend und wir erhalten eine Charakterisierung der Konvergenz der Reihe über die Beschränktheit der Partialsummen.

Satz 5.11 (Reihen mit nicht-negativen Gliedern). *Es sei $\{a_k\}_{k \geq k_0}$ für ein $k_0 \in \mathbb{Z}$ eine reelle Folge mit $a_k \geq 0$ für (fast) alle $k \geq k_0$. Dann gilt genau eine der folgenden Aussagen:*

- (i) *Die Reihe $\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k$ konvergiert und die Folge $\{\sum_{k=k_0}^n a_k\}_{n \geq k_0}$ der Partialsummen ist beschränkt.*
- (ii) *Die Reihe $\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k$ konvergiert uneigentlich gegen ∞ und die Folge $\{\sum_{k=k_0}^n a_k\}_{n \geq k_0}$ der Partialsummen ist unbeschränkt.*

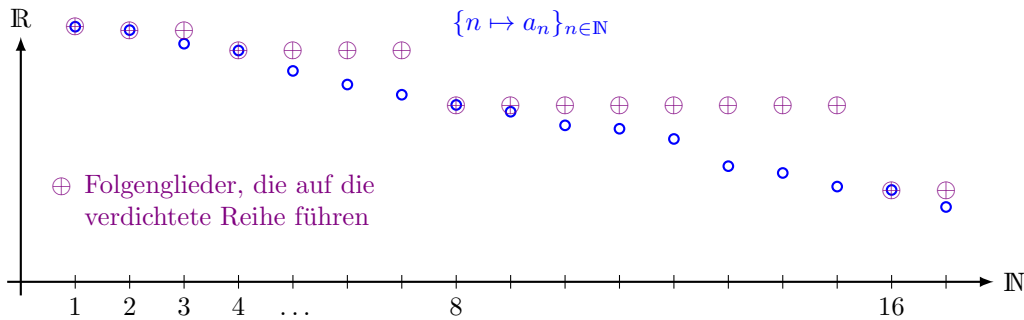
Beweis. Wegen Bemerkung 5.2 (3) können wir annehmen, dass alle Glieder $\{a_k\}_{k \geq k_0}$ der Reihe nicht-negativ sind. Damit wächst die Folge $\{\sum_{k=k_0}^n a_k\}_{n \geq k_0}$ der Partialsummen monoton. Diese Folge der Partialsummen ist nach dem Monotoniekriterium aus Satz 4.36 entweder beschränkt und konvergiert, oder sie ist unbeschränkt und konvergiert uneigentlich gegen ∞ . Nach Definition der (uneigentlichen) Konvergenz einer Reihe folgt damit die Aussage des Satzes. $\square$

Eine direkte Anwendung von Satz 5.11 ist das folgende Verdichtungskriterium von Cauchy.

Satz 5.12 (Verdichtungskriterium von Cauchy). *Es sei $\{a_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ eine monoton fallende Nullfolge. Dann sind die Reihen*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \quad \text{und} \quad \sum_{\ell=0}^{\infty} 2^\ell a_{2^\ell} = a_1 + 2a_2 + 4a_4 + 8a_8 + \dots$$

entweder beide konvergent oder beide uneigentlich konvergent (gegen ∞).



Beweis. Wir verwenden im Folgenden für die Partialsummen der beiden Reihen die Bezeichnungen

$$s_n := \sum_{k=1}^n a_k \quad \text{und} \quad S_n := \sum_{\ell=0}^n 2^\ell a_{2^\ell}$$

für $n \in \mathbb{N}$. Wir nutzen nun die Monotonie der Folge $\{a_k\}_{k \in \mathbb{N}}$, um diese Partialsummen gegeneinander abzuschätzen. Damit schließen wir einerseits auf

$$\begin{aligned} s_{2^n} &= \sum_{k=1}^{2^n} a_k = a_1 + (a_2 + a_3) + \dots + (a_{2^{n-1}-1} + \dots + a_{2^n-1}) + a_{2^n} \\ &= \sum_{\ell=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{2^\ell-1} a_{2^\ell+j} + a_{2^n} \leq \sum_{\ell=0}^n 2^\ell a_{2^\ell} = S_n \end{aligned}$$

und andererseits auf

$$\begin{aligned} s_{2^n} &= \sum_{k=1}^{2^n} a_k = a_1 + a_2 + (a_3 + a_4) + \dots + (a_{2^{n-1}+1} + \dots + a_{2^n}) \\ &= a_1 + \sum_{\ell=1}^n \sum_{j=1}^{2^{\ell-1}} a_{2^{\ell-1}+j} \geq \sum_{\ell=0}^n 2^{\ell-1} a_{2^\ell} = \frac{1}{2} S_n, \end{aligned}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Weil die Folgen $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ und $\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ nach Voraussetzung monoton wachsen, erhalten wir aus der ersten Ungleichung die Beschränktheit von $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, falls $\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ beschränkt ist, und aus der zweiten Ungleichung die Beschränktheit von $\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, falls $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ beschränkt ist. Mit diesen Beobachtungen folgt die Behauptung direkt aus Satz 5.11. $\square$

Beispiel 5.13. Das wichtigste Beispiel für die Anwendung des Verdichtungskriteriums ist die Untersuchung der verallgemeinerten harmonischen Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s}$$

für reelle Exponenten $s \in \mathbb{R}$ auf Konvergenz. Nach dem Verdichtungskriterium von Cauchy aus Satz 5.12 konvergiert diese Reihe genau dann, wenn die verdichtete Reihe

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} 2^\ell (2^\ell)^{-s} = \sum_{\ell=0}^{\infty} (2^\ell)^{1-s} = \sum_{\ell=0}^{\infty} (2^{1-s})^\ell$$

konvergiert (wobei wir hier die Potenzgesetze angewandt haben, die später auch für nicht-ganzzahlige Potenzen in Lemma 7.9 gerechtfertigt werden). Bei der verdichteten Reihe handelt es sich um die geometrische Reihe aus Beispiel 5.5 (i) mit $z = 2^{1-s}$, die genau dann konvergiert, wenn

$$2^{1-s} < 1 \quad \Leftrightarrow \quad 1 - s < 0 \quad \Leftrightarrow \quad s > 1$$

gilt. Damit haben wir für die verallgemeinerte harmonische Reihe¹ also Konvergenz für alle Exponenten $s > 1$ und Divergenz für alle Exponenten $s \leq 1$ nachgewiesen.

Wie für Folgen können wir auch ein Majoranten- und Minorantenkriterium für Reihen herleiten. Diese erlauben es, auf das Konvergenzverhalten einiger Reihen mittels eines Vergleichs mit anderen (bekannten) Reihen zu schließen.

Satz 5.14 (Vergleichsprinzipien). *Es seien $\{a_k\}_{k \geq k_0}$, $\{b_k\}_{k \geq k_0}$ für ein $k_0 \in \mathbb{Z}$ zwei reelle Folgen.*

(i) Majorantenkriterium: *Gilt*

$$|a_k| \leq cb_k \quad \text{für (fast) alle } k \geq k_0$$

mit einer Konstante $c \geq 0$ und konvergiert die Reihe $\sum_{k=k_0}^{\infty} b_k$, so konvergiert auch die Reihe $\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k$. In diesem Fall bezeichnen wir $\sum_{k=k_0}^{\infty} b_k$ als konvergente Majorante für $\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k$.

(ii) Minorantenkriterium: *Gilt*

$$a_k \geq cb_k \quad \text{für (fast) alle } k \geq k_0$$

¹Tatsächlich kann man die verallgemeinerte harmonische Reihe sogar für komplexe Exponenten $s \in \mathbb{C}$ betrachten (siehe Kapitel 7.2) und Konvergenz im Fall $\operatorname{Re}(s) > 1$ nachweisen. Fasst man in diesem Fall s als Variable auf, so definiert dies gerade die *Riemannsche ζ -Funktion*. Die *Riemannsche Vermutung* besagt, dass alle nicht-trivialen Nullstellen der Riemannschen ζ -Funktion genau Realteil $\frac{1}{2}$ haben. Diese Vermutung wurde im Jahre 1859 von Bernhard Riemann formuliert, von David Hilbert als (Teil) eines der 23 Hilbertschen Probleme auf dem internationalen Mathematikerkongress im Jahre 1900 in Paris vorgestellt, vom Clay Mathematics Institute in die Liste der sieben Millennium-Probleme der Mathematik aufgenommen und gilt nach wie vor als ungelöst.

mit einer Konstante $c > 0$ und konvergiert die Reihe $\sum_{k=k_0}^{\infty} b_k$ uneigentlich gegen ∞ , so konvergiert auch die Reihe $\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k$ uneigentlich gegen ∞ .

Beweis. Im Folgenden bezeichnen wir die Partialsummen zu den Reihen mit Gliedern $\{a_k\}_{k \geq k_0}$ und $\{b_k\}_{k \geq k_0}$ mit $\{s_n\}_{n \geq k_0}$ und $\{t_n\}_{n \geq k_0}$. Wegen Bemerkung 5.2 (3) können wir annehmen, dass die angenommenen Ungleichungen für alle Indizes $k \geq k_0$ gelten.

- (i) Es sei $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben. Nach Voraussetzung konvergiert die Reihe $\sum_{k=k_0}^{\infty} b_k$, so dass wir mithilfe des Cauchy-Kriteriums aus Bemerkung 5.2 (2) ein $n_0 \geq k_0$ mit

$$|t_m - t_n| = \sum_{k=n+1}^m b_k < \frac{\varepsilon}{1+c} \quad \text{für alle } m \geq n \geq n_0$$

bestimmen können. Wegen $|a_k| \leq cb_k$ für alle $k \geq k_0$ folgern wir daraus

$$|s_m - s_n| = \left| \sum_{k=n+1}^m a_k \right| \leq \sum_{k=n+1}^m |a_k| \leq c \sum_{k=n+1}^m b_k < \varepsilon \quad \text{für alle } m \geq n \geq n_0.$$

Mit Bemerkung 5.2 (2) schließen wir also auf die Konvergenz der Folge $\{s_n\}_{n \geq k_0}$ der Partialsummen und damit der Reihe $\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k$.

- (ii) Nach Voraussetzung haben wir

$$s_n = \sum_{k=k_0}^n a_k \geq c \sum_{k=k_0}^n b_k = ct_n \quad \text{für alle } n \geq k_0.$$

Mit $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = \infty$ folgt die uneigentliche Konvergenz der Folge $\{s_n\}_{n \geq k_0}$ der Partialsummen und damit der Reihe $\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k$ aus dem Minorantenkriterium für Folgen aus Satz 4.28 (ii). $\square$

Beispiele 5.15.

- (i) Für die Reihe der reziproken Quadratzahlen

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

stellt man fest, dass die Glieder quadratisch abfallen, so dass ein Vergleich mit der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$ aus Beispiel 5.5 (ii) naheliegt, deren Glieder ebenfalls quadratisch abfallen und die konvergiert. Für die Glieder gilt die Abschätzung

$$\frac{1}{k^2} \leq \frac{2}{k(k+1)} \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}.$$

Über das Majorantenkriterium aus Satz 5.14 (i) erhalten wir daher, dass auch die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ konvergiert (wie wir bereits in Beispiel 5.13 festgestellt haben).

- (ii) Für die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k(k+1)}}$$

bietet sich aufgrund des Wachstums der Glieder ein Vergleich mit der harmonischen Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ aus Beispiel 5.5 (iii) an, die uneigentlich gegen ∞ konvergiert. Für die Glieder gilt die Abschätzung

$$\frac{1}{\sqrt{k(k+1)}} > \frac{1}{k+1} \geq \frac{1}{2k} \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}.$$

Über das Minorantenkriterium Satz 5.14 (ii) folgt daher die uneigentliche Konvergenz der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k(k+1)}}$ gegen ∞ .

Übung 5.16. Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{k^k}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k!)^2}{(2k)!}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{(k+42)\sqrt{k}} \quad \text{und} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^{42}}{42^k}.$$

Haben die Glieder einer Reihe abwechselnd positives und negatives Vorzeichen, so sprechen wir von einer alternierenden Reihe und können dafür ein spezielles Konvergenzkriterium beweisen.

Definition 5.17 (alternierende Reihe). Eine Reihe der Form $\pm \sum_{k=k_0}^{\infty} (-1)^k a_k$ mit $k_0 \in \mathbb{Z}$ und nicht-negativen Gliedern $\{a_k\}_{k \geq k_0}$ bezeichnen wir als alternierende Reihe.

Satz 5.18 (Leibniz-Kriterium). Ist $\{a_k\}_{k \geq k_0}$ für ein $k_0 \in \mathbb{Z}$ eine monoton fallende Nullfolge, so konvergieren die alternierenden Reihen $\pm \sum_{k=k_0}^{\infty} (-1)^k a_k$.

Beweis. Ohne Einschränkung dürfen wir das positive Vorzeichen vor der Reihe und $k_0 = 1$ annehmen (sonst können wir die Indizes umnummerieren und gegebenenfalls mit dem Faktor (-1) multiplizieren). Wir bemerken für die Folge $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ der Partialsummen von $\{a_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ zunächst

$$\begin{aligned} s_{n+1} - s_n &= (-1)^{n+1} a_{n+1}, \\ s_{n+2} - s_n &= (-1)^{n+2} a_{n+2} + (-1)^{n+1} a_{n+1} = (-1)^n (a_{n+2} - a_{n+1}), \end{aligned}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Da die Folge $\{a_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ monoton fällt, haben wir $a_{n+2} - a_{n+1} \leq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Folglich ist die Teilfolge $\{s_{2\ell}\}_{\ell \in \mathbb{N}}$ der Partialsummen mit geraden Folgenindizes monoton fallend und die Teilfolge $\{s_{2\ell-1}\}_{\ell \in \mathbb{N}}$ der Partialsummen mit ungeraden Folgenindizes monoton wachsend, mit

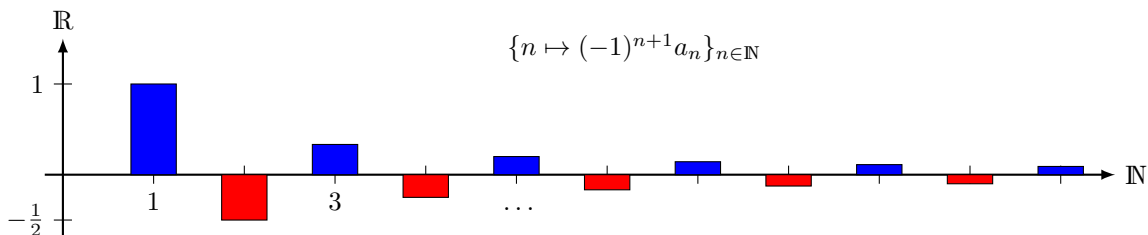
$$s_1 \leq s_3 \leq \dots \leq s_{2\ell+1} = s_{2\ell} - a_{2\ell+1} \leq s_{2\ell} \leq \dots \leq s_4 \leq s_2$$

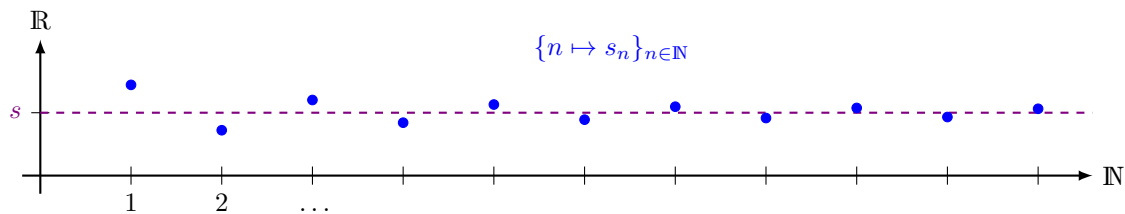
für alle $\ell \in \mathbb{N}$. Da beide Teilfolgen damit auch beschränkt sind, konvergieren sie nach dem Monotoniekriterium aus Satz 4.36. Mit den Rechenregeln für Grenzwerte folgt aus der Voraussetzung, dass $\{a_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist, außerdem

$$\lim_{\ell \rightarrow \infty} s_{2\ell+1} = \lim_{\ell \rightarrow \infty} s_{2\ell} - \lim_{\ell \rightarrow \infty} a_{2\ell+1} = \lim_{\ell \rightarrow \infty} s_{2\ell}.$$

Dies bedeutet, dass die Grenzwerte der beiden Teilfolgen $\{s_{2\ell}\}_{\ell \in \mathbb{N}}$ und $\{s_{2\ell-1}\}_{\ell \in \mathbb{N}}$ übereinstimmen. Damit ist nun gezeigt, dass die ganze Folge $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ der Partialsummen und damit die Reihe $\sum_{k=k_0}^{\infty} (-1)^k a_k$ konvergiert. $\square$

Bemerkung 5.19. Falls $\{a_k\}_{k \geq k_0}$ für ein $k_0 \in \mathbb{Z}$ eine monoton fallende Nullfolge ist, so gilt für die Folge $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ der Partialsummen für die alternierenden Reihen $\pm \sum_{k=k_0}^{\infty} (-1)^k a_k$, dass die Werte einerseits abwechselnd größer gleich oder kleiner gleich dem Grenzwert sind und andererseits der Abstand zum Grenzwert entlang der Teilfolgen mit geraden bzw. ungeraden Folgenindizes monoton fällt. Insofern kann man das Leibniz-Kriterium so verstehen, dass die Konvergenz der Reihe durch kleiner werdende Oszillationen erzwungen werden.





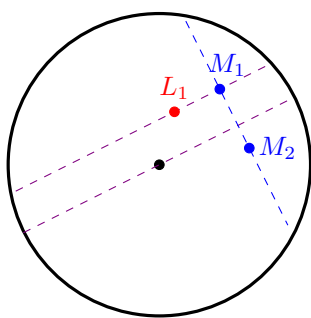
Beispiel 5.20. Nach dem Leibniz-Kriterium aus Satz 5.18 konvergieren etwa die *alternierende harmonische Reihe*

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \pm \dots = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k}$$

(für die die ersten Summanden sowie die ersten Glieder der Folge der Partialsummen in den beiden obigen Bildern dargestellt sind) und die *Leibniz-Reihe*

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \pm \dots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{2k+1}.$$

★ **Übung 5.21.** Ein Löwe und ein Mensch befinden sich an zwei verschiedenen Punkten in einer kreisförmigen Arena. Wir nehmen an, dass der Löwe und der Mensch beide gleich schnell laufen, instantan beschleunigen und die Richtung wechseln können, und wir stellen uns ihre Position als Punkte in einem Kreis in $\mathbb{R}^n \simeq \mathbb{C}$ mit Radius $R > 0$ um den Ursprung vor. Der Löwe will den Menschen fangen und fressen, der Mensch dagegen möchte das verhindern oder dem Löwen zumindest möglichst lange entkommen. Überlegen Sie sich, dass die folgende Überlebensstrategie möglich ist (d.h. innerhalb der Arena stattfindet und der Löwe den Menschen nicht erreicht) und wie lange der Mensch damit mindestens überleben kann. Wir bezeichnen dabei die Position des Löwen und des Menschen zu Beginn mit L_0 und M_0 und nach n Zeitintervallen (mit noch zu wählender Zeitlänge) mit L_n und M_n .



- Am Anfang bewegt sich der Mensch ggf. vom Rand der Arena weg, so dass die Position M_1 des Menschen mindestens Abstand $d > 0$ sowohl zum Rand der Arena als auch zur Position L_1 des Löwen hat.
- Für jedes $n \in \mathbb{N}$ rennt der Mensch im $(n+1)$ -ten Zeitschritt entlang der Senkrechten zur Verbindungslinie zwischen der Position M_n des Menschen und der Position L_n des Löwen mit maximaler Geschwindigkeit. Als Richtung wählt er diejenige, so dass er die Parallele zur Verbindungslinie von M_n und L_n durch den Mittelpunkt des Kreises überqueren kann, und die Endposition M_{n+1} wählt er dann in Entfernung $\frac{d}{2n}$ nach der Überquerung dieser Parallele.

5.2 Konvergenzkriterien für komplexe Reihen

Wir beschäftigen uns nun mit Konvergenzkriterien für Reihen mit komplexen Gliedern. Typischerweise zeigen diese Kriterien sogar eine stärkere Form der Konvergenz, nämlich absolute Konvergenz.

Definition 5.22 (absolute Konvergenz). Wir nennen eine Reihe $\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k$ mit komplexen Gliedern $\{a_k\}_{k \geq k_0}$ für ein $k_0 \in \mathbb{Z}$ absolut konvergent, wenn die Reihe $\sum_{k=k_0}^{\infty} |a_k|$ konvergiert.

Satz 5.23. Jede absolut konvergente Reihe ist auch konvergent.

Beweis. Es sei $\{a_k\}_{k \geq k_0}$ für ein $k_0 \in \mathbb{Z}$ eine komplexe Folge, so dass die Reihe $\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k$ absolut konvergiert. Zu einem beliebig vorgegebenen $\varepsilon > 0$ existiert mit Bemerkung 5.2 (2) nach dem Cauchy-Kriterium ein $n_0 \geq k_0$ mit

$$\left| \sum_{k=k_0}^m |a_k| - \sum_{k=k_0}^n |a_k| \right| = \sum_{k=n+1}^m |a_k| < \varepsilon \quad \text{für alle } m \geq n \geq n_0.$$

Mit der Dreiecksungleichung folgt für die Folge $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ der Partialsummen der Reihe $\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k$ dann

$$|s_m - s_n| = \left| \sum_{k=n+1}^m a_k \right| \leq \sum_{k=n+1}^m |a_k| < \varepsilon \quad \text{für alle } m \geq n \geq n_0.$$

Nach dem Cauchy-Kriterium haben wir daher Konvergenz der Reihe $\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k$. □

Bemerkungen 5.24.

- (1) Absolute Konvergenz einer Reihe $\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k$ mit komplexen Gliedern $\{a_k\}_{k \geq k_0}$ für ein $k_0 \in \mathbb{Z}$ ist nach Definition 5.22 nichts anderes als Konvergenz der Reihe $\sum_{k=k_0}^{\infty} |a_k|$ mit nicht-negativen Gliedern $\{|a_k|\}_{k \geq k_0}$. Folglich können wir die Resultate aus Kapitel 5.1 anwenden und haben insbesondere:

- Es liegt nach Satz 5.11 genau dann absolute Konvergenz der Reihe $\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k$ vor, wenn die Folge $\{\sum_{k=k_0}^n |a_k|\}_{n \geq n_0}$ beschränkt ist,
- Komplexe Variante des Majorantenkriteriums: Gilt

$$|a_k| \leq cb_k \quad \text{für (fast) alle } k \geq k_0$$

mit einer Konstante $c \geq 0$ und konvergiert die Reihe $\sum_{k=k_0}^{\infty} b_k$ für eine reelle Folge $\{b_k\}_{k \geq k_0}$, so konvergiert die Reihe $\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k$ absolut. Das Majorantenkriterium aus Satz 5.14 ist also tatsächlich ein Kriterium für absolute Konvergenz.

- (2) Die Umkehrung von Satz 5.23 ist im Allgemeinen falsch, d.h. nicht jede konvergente Reihe konvergiert auch absolut. Beispielsweise konvergiert die alternierende harmonische Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k}$ gemäß des Leibniz-Kriteriums aus Satz 5.18, jedoch gilt hierbei keine absolute Konvergenz, da die harmonische Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{\infty} |(-1)^{k+1} \frac{1}{k}|$ nach Beispiel 5.5 (iii) divergiert.

Wie wir in Lemma 5.3 gesehen haben, müssen die Glieder einer Reihe $\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k$ eine Nullfolge bilden, damit überhaupt (absolute) Konvergenz vorliegen kann. Ob tatsächlich absolute Konvergenz vorliegt, hängt im Wesentlichen davon ab, ob die Glieder der Reihe “schnell genug” gegen 0 konvergieren. In einigen Fällen kann man diese Geschwindigkeit der Konvergenz gegen 0 über die Größe der Quotienten $\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|}$ bzw. der Wurzeln $\sqrt[k]{|a_k|}$ bestimmen: über die Implikationen

$$\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} \leq q \quad \text{für alle } k \geq k_0 \quad \Rightarrow \quad |a_k| \leq q^{k-k_0} |a_{k_0}| \quad \text{für alle } k \geq k_0$$

bzw.

$$\sqrt[k]{|a_k|} \leq q \quad \text{für alle } k \geq k_0 \quad \Rightarrow \quad |a_k| \leq q^k \quad \text{für alle } k \geq k_0$$

kann man nämlich einen Vergleich mit der geometrischen Reihe $\sum_{k=k_0}^{\infty} q^k$ ziehen, die nach Beispiel 5.5 (i) für $q < 1$ konvergiert. Tatsächlich wird sich sogar eine asymptotische Abschätzung der Quotienten und der Wurzeln als ausreichend erweisen. Dazu stellen wir eine kurze Vorüberlegung an, bevor wir im Anschluss die beiden Konvergenzkriterien präzise formulieren.

Lemma 5.25. Es sei $\{b_k\}_{k \geq k_0}$ für ein $k_0 \in \mathbb{Z}$ eine reelle Folge.

- (i) Genau dann gilt $\limsup_{k \rightarrow \infty} b_k < 1$, wenn es ein $q < 1$ und ein $n_0 \geq k_0$ gibt mit $b_k \leq q$ für alle $k \geq n_0$.
- (ii) Genau dann gilt $\limsup_{k \rightarrow \infty} b_k > 1$, wenn es ein $r > 1$ gibt mit $b_k \geq r$ für unendlich viele Folgenindizes $k \geq k_0$.

Beweis.

- (i) Wir nehmen zunächst

$$q_0 := \limsup_{k \rightarrow \infty} b_k := \lim_{k \rightarrow \infty} \sup\{b_\ell : \ell \geq k\} < 1$$

an. Nach Definition 4.8 des Grenzwerts einer Folge finden wir zu jedem $q \in (q_0, 1)$ und die spezielle Wahl $\varepsilon := q - q_0 > 0$ einen Index $n_0 \geq k_0$ mit $|\sup\{b_\ell : \ell \geq k\} - q_0| < q - q_0$ für alle $k \geq n_0$. Damit haben wir insbesondere

$$\sup\{b_\ell : \ell \geq k\} \leq |\sup\{b_\ell : \ell \geq k\} - q_0| + q_0 < q \quad \text{für alle } k \geq n_0,$$

was nichts anderes als $b_k \leq q$ für alle $k \geq n_0$ bedeutet.

Als nächstes nehmen wir an, dass es ein $q < 1$ und ein $n_0 \geq k_0$ gibt mit $b_k \leq q$ für alle $k \geq n_0$. Damit gilt auch $\sup\{b_\ell : \ell \geq n_0\} \leq q$. Da die Folge $\{\sup\{b_\ell : \ell \geq k\}\}_{k \geq k_0}$ monoton fallend ist, erhalten wir aus dem Monotoniekriterium aus Satz 4.36

$$\begin{aligned} \limsup_{k \rightarrow \infty} b_k &:= \lim_{k \rightarrow \infty} \sup\{b_\ell : \ell \geq k\} \\ &= \inf_{k \geq k_0} \sup\{b_\ell : \ell \geq k\} \leq \sup\{b_\ell : \ell \geq n_0\} \leq q < 1. \end{aligned}$$

- (ii) Wir nehmen zunächst

$$r_0 := \limsup_{k \rightarrow \infty} b_k > 1$$

an. Nach Satz 4.56 ist der Limes superior der größte Häufungswert einer Folge. Nach Proposition 4.51 existieren für jedes $r \in (1, r_0)$ und die spezielle Wahl $\varepsilon := r_0 - r > 0$ unendlich viele Folgenindizes $k \geq k_0$ mit $|b_k - r_0| < r_0 - r$ und dann wegen der umgekehrten Dreiecksungleichung auch mit

$$b_k \geq r_0 - |b_k - r_0| > r.$$

Als nächstes nehmen wir an, dass es ein $r > 1$ gibt mit $b_k \geq r$ für unendlich viele Folgenindizes $k \geq k_0$. Dann gilt $\sup\{b_\ell : \ell \geq k\} \geq r$ für alle $\ell \geq k_0$ und ähnlich wie im Beweis von (i) erhalten wir über das Monotoniekriterium dann

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} b_k := \lim_{k \rightarrow \infty} \sup\{b_\ell : \ell \geq k\} = \inf_{k \geq k_0} \sup\{b_\ell : \ell \geq k\} \geq r > 1. \quad \square$$

Bemerkungen 5.26.

- (1) Die Bedingung $\limsup_{k \rightarrow \infty} b_k < 1$ ist nicht äquivalent dazu, dass es ein $n_0 \geq k_0$ gibt mit $b_k < 1$ für alle $k \geq n_0$ (vgl. Übung 4.18). Setzen wir etwa $b_k := \frac{k}{k+1}$ für alle $k \in \mathbb{N}$, so haben wir nach Definition $b_k < 1$ für alle $k \in \mathbb{N}$, jedoch gilt $\limsup_{k \rightarrow \infty} b_k = \lim_{k \rightarrow \infty} b_k = 1$.
- (2) Mit dem Zusammenhang $\liminf_{k \rightarrow \infty} b_k = -\limsup_{k \rightarrow \infty} (-b_k)$ können wir auch entsprechende äquivalente Formulierungen für den Limes inferior angeben, die im Folgenden jedoch nicht benötigt werden.

Wie oben bereits erläutert, lässt sich die Konvergenz einiger Reihen über das (asymptotische) Verhältnis ihrer aufeinanderfolgenden Glieder, also deren Quotient, beurteilen. Dies führt zum folgenden Quotientenkriterium:

Satz 5.27 (Quotientenkriterium). *Es sei $\{a_k\}_{k \geq k_0}$ für ein $k_0 \in \mathbb{Z}$ eine komplexe Folge mit $a_k \neq 0$ für (fast) alle $k \geq k_0$.*

- (i) *Die Reihe $\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k$ konvergiert absolut, falls $\limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} < 1$ gilt.*
- (ii) *Die Reihe $\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k$ divergiert, falls $\liminf_{k \rightarrow \infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} > 1$ gilt.*

Beweis.

- (i) Mithilfe von Lemma 5.25 (i) finden wir ein $q < 1$ und ein $n_0 \geq k_0$ mit $\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} \leq q$ für alle $k \geq n_0$. Daraus folgern wir mit dem Prinzip der vollständigen Induktion

$$|a_{k+n_0}| \leq q^k |a_{n_0}| \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}_0.$$

Der Induktionsanfang $k = 0$ ist offensichtlich. Nehmen wir nun an, dass $|a_{k+n_0}| \leq q^k |a_{n_0}|$ für ein festes, aber beliebiges $k \in \mathbb{N}_0$ gilt, so folgern wir

$$|a_{k+1+n_0}| \leq q |a_{k+n_0}| \stackrel{\text{IV}}{\leq} q^{k+1} |a_{n_0}|.$$

Da die geometrische Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} q^k$ konvergiert, schließen wir aus dem Majorantenkriterium aus Satz 5.14 (i) in der komplexen Variante (vgl. Bemerkung 5.24) sowie die Tatsache, dass das grundsätzliche Konvergenzverhalten der Reihe nicht von den endlich vielen Gliedern $a_{k_0}, \dots, a_{n_0-1}$ abhängt, auf die absolute Konvergenz der Reihe $\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k$.

- (ii) Mithilfe von Lemma 5.25 (ii) und Bemerkung 5.26 (2) finden wir ein $r > 1$ und ein $n_0 > k_0$ mit $\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} \geq r$ für alle $k \geq n_0$. Analog wie oben im Beweis von (i) leiten wir daraus

$$|a_{k+n_0}| \geq r^k |a_{n_0}| \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}_0$$

ab. Folglich ist $\{a_k\}_{k \geq k_0}$ keine Nullfolge und nach Lemma 5.3 muss die Reihe $\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k$ dann divergieren. $\square$

Lässt sich das asymptotische Wachstum der Glieder a_k am einfachsten über seine k -te Wurzel erfassen, so bietet das Wurzelkriterium eine effiziente Möglichkeit zur Konvergenzbestimmung:

Satz 5.28 (Wurzelkriterium). *Es sei $\{a_k\}_{k \geq k_0}$ für ein $k_0 \in \mathbb{Z}$ eine komplexe Folge.*

- (i) *Die Reihe $\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k$ konvergiert absolut, falls $\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} < 1$ gilt.*
- (ii) *Die Reihe $\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k$ divergiert, falls $\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} > 1$ gilt.*

Beweis.

- (i) Wie im Beweis des Quotientenkriteriums aus Satz 5.27 (i) verwenden wir Lemma 5.25 (i), um ein $q < 1$ und ein $n_0 \geq k_0$ zu finden, so dass

$$\sqrt[k]{|a_k|} \leq q \quad \Leftrightarrow \quad |a_k| \leq q^k \quad \text{für alle } k \geq n_0$$

gilt. Aus der Konvergenz der geometrischen Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} q^k$ und dem Majorantenkriterium aus Satz 5.14 (i) folgern wir nun auf die absolute Konvergenz der Reihe $\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k$.

- (ii) Mit Lemma 5.25 (ii) gilt in diesem Fall $\sqrt[k]{|a_k|} \geq 1$ oder äquivalente dazu $|a_k| \geq 1$ für unendlich viele Folgenindizes $k \geq k_0$. Also ist $\{a_k\}_{k \geq k_0}$ keine Nullfolge und die Reihe $\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k$ nach Lemma 5.3 dann divergent. $\square$

Bemerkungen 5.29 (zu Quotienten- und Wurzelkriterium).

(1) Das Wurzelkriterium ist allgemeiner als das Quotientenkriterium.

- Falls die Bedingung $\limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} < 1$ des Quotientenkriteriums erfüllt ist, so haben wir im Beweis von Satz 5.27 gezeigt, dass für ein $q < 1$ und ein $n_0 \geq k_0$ die Ungleichung $|a_{k+n_0}| \leq q^k |a_{n_0}|$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$ gilt. Mit Lemma 4.19 ergibt sich daraus dann sofort die Bedingung $\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} \leq q < 1$ des Wurzelkriteriums.
- Es gibt Beispiele von Reihen, für die das Wurzelkriterium anwendbar ist und Konvergenz liefert, wohingegen man über das Quotientenkriterium (ohne weitere Anpassung) keine Aussage zur Konvergenz treffen kann. Beispielsweise gilt für die Folge

$$a_k := \begin{cases} 2^{-k} & \text{falls } k \in \mathbb{N} \text{ gerade} \\ 3^{-k} & \text{falls } k \in \mathbb{N} \text{ ungerade} \end{cases}$$

die Bedingung

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} = \frac{1}{2} < 1$$

und damit Konvergenz der Reihe $\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k$ nach dem Wurzelkriterium. Zugleich haben wir jedoch

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} = \infty > 1 \quad \text{und} \quad \liminf_{k \rightarrow \infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} = 0 < 1,$$

so dass das Quotientenkriterium nicht unmittelbar anwendbar ist.

Das Quotientenkriterium ist dennoch nützlich und für den Nachweis der Konvergenz einiger Reihen einfacher anzuwenden als das Wurzelkriterium.

(2) Um die absolute Konvergenz einer Reihe $\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k$ zu zeigen, reicht es nicht, wenn man nachweist, dass es ein $n_0 \geq k_0$ gibt, so dass

$$|a_{k+1}| < |a_k| \quad \text{oder} \quad \sqrt[k]{|a_k|} < 1 \quad \text{für alle } k \geq n_0$$

gilt (vgl. Bemerkung 5.26 (1)). Beide Ungleichungen sind für $a_k := \frac{1}{k}$ für $k \in \mathbb{N}$ erfüllt, aber für die harmonische Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ gilt nach Beispiel 5.5 (iii) uneigentliche Konvergenz gegen ∞ .

(3) Unter den Bedingungen

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} = 1 \quad \text{oder} \quad \limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} = 1$$

kann die entsprechende Reihe wie im Fall der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ der reziproken Quadratzahlen konvergieren oder aber auch wie im Fall der harmonischen Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ divergieren.

(4) Es gibt noch feinere Kriterien für absolute Konvergenz wie das Kriterium von Raabe: Ist $\{a_k\}_{k \geq k_0}$ für ein $k_0 \in \mathbb{Z}$ eine komplexe Folge mit $a_k \neq 0$ für (fast) alle $k \geq k_0$ und gilt

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} - 1 \right) \cdot k < -1,$$

so gilt für die Reihe $\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k$ absolute Konvergenz. Mit diesem Kriterium lässt sich insbesondere auch die Konvergenz der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ erfassen.

Beispiel 5.30 (Exponentialreihe). Die *Exponentialreihe* ist für $z \in \mathbb{C}$ definiert als

$$\exp(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}.$$

Für die Glieder $a_k := \frac{z^k}{k!}$ für $k \in \mathbb{N}_0$ haben wir

$$\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} = \frac{|z|^{k+1}k!}{(k+1)!|z|^k} = \frac{|z|}{k+1} \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}_0.$$

Damit gilt also

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} = 0 < 1,$$

so dass wir aus dem Quotientenkriterium aus Satz 5.27 auf die absolute Konvergenz (und damit insbesondere die Konvergenz) der Exponentialreihe für jede Zahl $z \in \mathbb{C}$ schließen. Wir werden die Funktion $z \mapsto \exp(z)$ später noch genauer untersuchen und insbesondere die Formel

$$\exp(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C}$$

herleiten, mit deren Hilfe wir für die Eulersche Zahl e die folgenden beiden Darstellungen gewinnen können:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1^k}{k!} = \exp(1) =: e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Übung 5.31. Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf (absolute) Konvergenz:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!(2k)!}{(3k)!}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{(k+1)^k}{k^{k+1}}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1+2^k}{2^{k+1}}\right)^k \quad \text{und} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+1}{k^3+3}.$$

Übung 5.32. Geben Sie genau an, welche Konvergenzkriterien aus Majoranten-, Leibniz-, Quotienten- und Wurzelkriterium sich eignen, um die Konvergenz der folgenden Reihen zu begründen:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{\sqrt{k}}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1+(-1)^k}{k!} \quad \text{und} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^k}.$$

Abschließend beweisen wir noch zwei Kriterien für Reihen mit Produkten als Gliedern.

★ Satz 5.33 (Konvergenzkriterien von Abel und Dirichlet). *Es seien $\{a_k\}_{k \geq k_0}$, $\{b_k\}_{k \geq k_0}$ für ein $k_0 \in \mathbb{Z}$ zwei komplexe Folgen, so dass*

$$\sum_{k=k_0}^{\infty} |a_k - a_{k+1}| < \infty$$

gilt und zusätzlich eine der folgenden Voraussetzungen erfüllt ist:

- (i) Abel-Kriterium: $\sum_{k=k_0}^{\infty} b_k$ ist konvergent,
- (ii) Dirichlet-Kriterium: $\{a_k\}_{k \geq k_0}$ ist eine Nullfolge und die Folge $\{\sum_{k=k_0}^n b_k\}_{n \geq k_0}$ der Partialsummen zu $\{b_k\}_{k \geq k_0}$ ist beschränkt.

Dann gilt die Konvergenz der Reihe $\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k b_k$.

★ **Bemerkungen 5.34.**

- (1) *Unter der Voraussetzung $\sum_{k=k_0}^{\infty} |a_{k+1} - a_k| < \infty$ ist die Folge $\{a_k\}_{k \geq k_0}$ insbesondere konvergent (und damit auch beschränkt). Dies ergibt sich direkt aus dem Cauchy-Kriterium für die Konvergenz von Folgen aus Satz 4.69, da man aus der Dreiecksungleichung*

$$|a_m - a_n| \leq \sum_{k=n}^{m-1} |a_k - a_{k+1}| \quad \text{für alle } m \geq n \geq n_0$$

erhält und die rechte Seite nach dem Cauchy-Kriterium für die Konvergenz von Reihen beliebig klein wird, wenn die Indizes $m \geq n$ nur hinreichend groß gewählt werden.

- (2) *Eine schwächere Variante des Dirichlet-Kriteriums stellt an die Nullfolge $\{a_k\}_{k \geq k_0}$ noch die Forderung der Monotonie. In diesem Fall haben wir mit Teleskopsummen*

$$\sum_{k=k_0}^n |a_k - a_{k+1}| = \left| \sum_{k=k_0}^n (a_k - a_{k+1}) \right| = |a_{k_0} - a_{n+1}| \quad \text{für alle } n \geq k_0$$

und die vorausgesetzte Konvergenz der Reihe $\sum_{k=k_0}^{\infty} |a_{k+1} - a_k|$ gilt wegen der Annahme, dass es sich bei $\{a_k\}_{k \geq k_0}$ um eine Nullfolge handelt, automatisch.

- (3) *Wählen wir in der schwächeren Variante (2) des Dirichlet-Kriteriums $b_k := (-1)^k$ für alle $k \geq k_0$, so ergibt sich als Spezialfall das Leibniz-Kriterium aus Satz 5.18.*

★ **Beweis von Satz 5.33.** Wir leiten zuerst eine andere Darstellungsformel für die Folge $\{\sum_{k=k_0}^n a_k b_k\}_{n \geq k_0}$ der Partialsummen her. Dazu schreiben wir für $n \geq k_0$ zunächst

$$\sum_{k=k_0}^n a_k b_k = \sum_{k=k_0}^n a_k \left(\sum_{\ell=k_0}^k b_{\ell} - \sum_{\ell=k_0}^{k-1} b_{\ell} \right) = a_n \sum_{\ell=k_0}^n b_{\ell} + \sum_{k=k_0}^{n-1} a_k \sum_{\ell=k_0}^k b_{\ell} - \sum_{k=k_0+1}^n a_k \sum_{\ell=k_0}^{k-1} b_{\ell},$$

wobei wir hier die erste Doppelsumme aufgeteilt haben und in der zweiten Doppelsumme ausgenutzt haben, dass jede Summe über die leere Indexmenge den Wert 0 hat. Als nächstes machen wir eine Indexverschiebung und erhalten dadurch die sogenannte *Abelsche Formel für partielle Summation*

$$\sum_{k=k_0}^n a_k b_k = a_n \sum_{\ell=k_0}^n b_{\ell} + \sum_{k=k_0}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) \sum_{\ell=k_0}^k b_{\ell} \quad (5.1)$$

für $n \geq k_0$, auf deren rechte Seite sich nun gut die Voraussetzungen anwenden lassen:

- Konvergenz der Folge $\{a_n \sum_{\ell=k_0}^n b_{\ell}\}_{n \geq k_0}$ im Fall des Abel-Kriteriums (i): die Folge $\{a_n\}_{n \geq k_0}$ konvergiert nach Bemerkung 5.34 (1) und die Folge $\{\sum_{\ell=k_0}^n b_{\ell}\}_{n \geq k_0}$ der Partialsummen wegen der Konvergenz der Reihe $\sum_{k=k_0}^{\infty} b_k$. Mit der Produktregel für konvergente Folgen aus Lemma 4.15 ergibt sich dann die Konvergenz von $\{a_n \sum_{\ell=k_0}^n b_{\ell}\}_{n \geq k_0}$.
- Konvergenz der Folge $\{a_n \sum_{\ell=k_0}^n b_{\ell}\}_{n \geq k_0}$ im Fall des Dirichlet-Kriteriums (ii): Nach Voraussetzung ist die Folge $\{\sum_{\ell=k_0}^n b_{\ell}\}_{n \geq k_0}$ der Partialsummen durch eine Konstante $c \geq 0$ beschränkt. Daher gilt die Ungleichung

$$\left| a_n \sum_{\ell=k_0}^n b_{\ell} \right| \leq c |a_n| \quad \text{für alle } n \geq k_0.$$

Da $\{a_k\}_{k \geq k_0}$ nach Voraussetzung eine Nullfolge ist, impliziert das Majorantenkriterium für Nullfolgen aus Satz 4.28 (i), dass $\{a_n \sum_{\ell=k_0}^n b_{\ell}\}_{n \geq k_0}$ eine Nullfolge ist und damit insbesondere konvergiert.

- Konvergenz der Folge $\{\sum_{k=k_0}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) \sum_{\ell=k_0}^k b_\ell\}_{n \geq k_0}$: in jedem der beiden Fälle ist die Folge $\{\sum_{\ell=k_0}^n b_\ell\}_{n \geq k_0}$ der Partialsummen durch eine Konstante $c \geq 0$ beschränkt. Folglich haben wir

$$\left| (a_k - a_{k+1}) \sum_{\ell=k_0}^k b_\ell \right| \leq c |a_k - a_{k+1}| \quad \text{für alle } k \geq k_0.$$

Da die Reihe $\sum_{k=k_0}^{\infty} |a_k - a_{k+1}|$ nach Voraussetzung konvergiert, schließen wir mit dem Majorantenkriterium für Reihen (in der komplexen Variante, vgl. Bemerkung 5.24) auf die Konvergenz der Folge $\{\sum_{k=k_0}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) \sum_{\ell=k_0}^k b_\ell\}_{n \geq k_0}$.

Mit den eben gezeigten Konvergenzen können wir die Rechenregeln für konvergente Folgen in der Abelschen Formel (5.1) für partielle Summation anwenden und erhalten die Konvergenz der Folge $\{\sum_{k=k_0}^n a_k b_k\}_{n \geq k_0}$ der Partialsummen. Daher konvergiert die Reihe $\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k b_k$ unter den Annahmen in (i) bzw. (ii) und die beiden behaupteten Kriterien sind bewiesen. $\square$

5.3 Umordnungen

Bei endlichen Summen spielt die Reihenfolge der Summation wegen der Kommutativität keine Rolle, und entsprechend dürfen wir bei einer konvergenten unendlichen Reihe die Reihenfolge von endlich vielen Glieder vertauschen, ohne dass sich der Wert der Reihe ändert. In diesem Kapitel untersuchen wir nun das Konvergenzverhalten unendlicher Reihen unter allgemeineren Umordnungen.

Definition 5.35 (Umordnung). *Es seien $\{a_k\}_{k \geq k_0}$, $\{b_k\}_{k \geq k_0}$ für ein $k_0 \in \mathbb{Z}$ zwei komplexe Folgen. Wir nennen die Reihe $\sum_{k=k_0}^{\infty} b_k$ eine Umordnung der Reihe $\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k$, falls eine bijektive Abbildung $\sigma: \{k \in \mathbb{Z}: k \geq k_0\} \rightarrow \{k \in \mathbb{Z}: k \geq k_0\}$ (eine Permutation) existiert mit*

$$b_k = a_{\sigma(k)} \quad \text{für alle } k \geq k_0.$$

Wir zeigen zunächst, dass die Reihenfolge der Summation bei *absolut konvergenten* Reihen keine Rolle spielt, also jede Umordnung der Reihe ebenfalls (absolut) gegen denselben Wert konvergiert.

Satz 5.36. *Es sei $\{a_k\}_{k \geq k_0}$ für ein $k_0 \in \mathbb{Z}$ eine komplexe Folge, so dass die Reihe $\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k$ absolut konvergiert. Dann konvergiert auch jede Umordnung von $\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k$ absolut, und zwar gegen denselben Wert $\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k$.*

Beweis. Es sei $\sigma: \{k \in \mathbb{Z}: k \geq k_0\} \rightarrow \{k \in \mathbb{Z}: k \geq k_0\}$ eine bijektive Abbildung und $\varepsilon > 0$ beliebig. Aufgrund der Konvergenz der Reihe $\sum_{k=k_0}^{\infty} |a_k|$ bestimmen wir zunächst einen Index $n_0 \geq k_0$ mit

$$\left| \sum_{k=k_0}^{n_0} |a_k| - \sum_{k=k_0}^{\infty} |a_k| \right| = \sum_{k=n_0+1}^{\infty} |a_k| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (5.2)$$

Mit der Dreiecksungleichung gilt dann auch

$$\left| \sum_{k=k_0}^{n_0} a_k - \sum_{k=k_0}^{\infty} a_k \right| = \left| \sum_{k=n_0+1}^{\infty} a_k \right| \leq \sum_{k=n_0+1}^{\infty} |a_k| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (5.3)$$

Dies bedeutet insbesondere, dass der Wert der ursprünglichen Reihe durch Summation aller Folgenglieder mit den Indizes bis n_0 bis auf einen Fehler der Größe $\frac{\varepsilon}{2}$ erreicht wird. Als nächstes wählen wir $\tilde{n}_0 \geq n_0$ hinreichend groß, so dass

$$\{\sigma(k_0), \sigma(k_0 + 1), \dots, \sigma(\tilde{n}_0)\} \supset \{k_0, k_0 + 1, \dots, n_0\}$$

gilt, also so dass die zuvor für die ursprüngliche Reihe betrachteten Indizes nach Umordnung in der Menge der Indizes bis $\sigma(\tilde{n}_0)$ enthalten sind. Für alle $k > \tilde{n}_0$ haben wir wegen der Injektivität der Abbildung σ dann $\sigma(k) \geq n_0 + 1$. Mithilfe der Ungleichung (5.2) folgern wir daraus

$$\left| \sum_{k=k_0}^m |a_{\sigma(k)}| - \sum_{k=k_0}^n |a_{\sigma(k)}| \right| = \sum_{k=n+1}^m |a_{\sigma(k)}| \leq \sum_{k=n_0+1}^{\infty} |a_k| < \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \quad \text{für alle } m \geq n \geq \tilde{n}_0,$$

so dass wir mit dem Cauchy-Kriterium auf die absolute Konvergenz der Umordnung $\sum_{k=k_0}^{\infty} a_{\sigma(k)}$ schließen können (aber noch nicht auf dessen Wert). Außerdem bekommen wir mit der oben getroffenen Wahl von $\tilde{n}_0$ über die Ungleichungen (5.2) und (5.3) für alle $n \geq \tilde{n}_0$

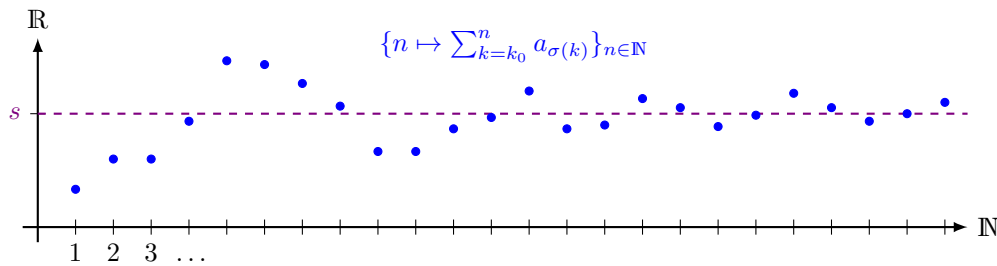
$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=k_0}^n a_{\sigma(k)} - \sum_{k=k_0}^{\infty} a_k \right| &\leq \left| \sum_{k=k_0}^n a_{\sigma(k)} - \sum_{k=k_0}^{n_0} a_k \right| + \left| \sum_{k=k_0}^{n_0} a_k - \sum_{k=k_0}^{\infty} a_k \right| \\ &\leq \sum_{k=n_0+1}^{\infty} |a_k| + \left| \sum_{k=k_0}^{n_0} a_k - \sum_{k=k_0}^{\infty} a_k \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Dies zeigt die Konvergenz der Umordnung $\sum_{k=k_0}^{\infty} a_{\sigma(k)}$ gegen denselben Wert $\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k$ wie bei der ursprünglichen Reihe. $\square$

Es gilt für Reihen auch die Umkehrung von Satz 5.36, also dass eine Reihe absolut konvergiert, falls jede Umordnung der Reihe gegen denselben Wert konvergiert. Durch Kontraposition ist diese Aussage äquivalent dazu, dass für eine konvergente, aber nicht absolut konvergente Reihe Umordnungen mit unterschiedlichen Werten existieren. Tatsächlich gilt für reelle Reihen in diesem Fall sogar, dass wir eine Umordnung konstruieren können, die gegen einen *beliebig vorgegebenen Wert* konvergiert.

Satz 5.37 (Riemannscher Umordnungssatz). *Es sei $\{a_k\}_{k \geq k_0}$ für ein $k_0 \in \mathbb{Z}$ eine reelle Folge, so dass die Reihe $\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k$ konvergent, aber nicht absolut konvergent ist. Dann existiert zu jedem Wert $s \in \mathbb{R}$ eine Umordnung von $\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k$, die gegen s konvergiert.*

Beweisidee. Die grundsätzliche Idee des Beweises von Satz 5.37 ist es, die Glieder $\{a_k\}_{k \geq k_0}$ der Reihe in die Teilfolgen der nicht-negativen und der negativen Glieder aufzuteilen. Ist $s \in \mathbb{R}$ gegeben, so summieren wir anfänglich so viele nicht-negative Folgenglieder auf, bis der Wert s überschritten ist (für $s < 0$ also keines). Anschließend summieren wir so viele negative Folgenglieder auf, bis der Wert s wieder erreicht oder unterschritten ist. Diesen Prozess iterieren wir, was tatsächlich möglich ist, weil die Reihe mit den positiven Gliedern und die Reihe mit den negativen Gliedern uneigentlich gegen den Wert ∞ bzw. $-\infty$ konvergiert. Dass die so gebildete Umordnung von $\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k$ gegen den vorgegebenen Wert s konvergiert, ist schließlich im Wesentlichen in der Tatsache begründet, dass die ursprüngliche Reihe $\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k$ konvergiert und es sich daher bei den Gliedern $\{a_k\}_{k \geq k_0}$ um eine Nullfolge handelt. $\square$



★ *Beweis von Satz 5.37.* Wir zerlegen den Beweis des Satzes in mehrere Schritte.

Aufteilung von $\{a_k\}_{k \geq k_0}$ in nicht-negative und negative Glieder. Zu einer beliebigen reellen Zahl $x \in \mathbb{R}$ definieren wir den Positiv- und Negativteil als

$$x^+ := \max\{x, 0\} \quad \text{und} \quad x^- := \max\{-x, 0\}$$

und haben damit $x^+, x^- \geq 0$, $x = x^+ - x^-$ und $|x| = x^+ + x^-$. Wir betrachten dann die beiden Folgen $\{a_k^+\}_{k \geq k_0}$ der Positivteile und $\{a_k^-\}_{k \geq k_0}$ der Negativteile. Wir stellen zunächst fest, dass deren uneigentliche Reihen jeweils den Wert ∞ haben, d.h. es gilt

$$\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k^+ = \infty \quad \text{und} \quad \sum_{k=k_0}^{\infty} a_k^- = \infty$$

(womit beide Folgen $\{a_k^+\}_{k \geq k_0}$ und $\{a_k^-\}_{k \geq k_0}$ auch jeweils unendlich viele nicht-verschwindende Glieder enthalten). Wäre nämlich eine dieser beiden Reihen konvergent, so müsste wegen $\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k \in \mathbb{R}$ und den Rechenregeln für konvergente Reihen aus Lemma 5.8 auch die andere Reihe konvergieren, im Widerspruch zu

$$\sum_{k=k_0}^{\infty} |a_k| = \sum_{k=k_0}^{\infty} (a_k^+ + a_k^-) = \infty.$$

Da die Reihe $\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k$ konvergiert, schließen wir aus Lemma 5.3, dass $\{a_k\}_{k \geq k_0}$ eine Nullfolge ist. Wegen $a_k^+ \in \{a_k, 0\}$ und $a_k^- \in \{-a_k, 0\}$ folgt also auch

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_k^+ = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} a_k^- = 0.$$

Wahl der Umordnung für einen gegebenen Wert $s \in \mathbb{R}$. Wir müssen nun die oben angegebene Strategie mathematisch über die Definition der entsprechenden (von s abhängigen) Umordnung beschreiben. Dazu definieren wir induktiv eine Abbildung $\sigma: \{n \in \mathbb{Z}: n \geq k_0\} \rightarrow \{k \in \mathbb{Z}: k \geq k_0\}$ über die Vorschrift

$$\sigma(n+1) := \begin{cases} \min\{k \in \mathbb{Z}: k \geq k_0, k \notin \sigma(\{k_0, \dots, n\}) \text{ und } a_k \geq 0\} & \text{falls } \sum_{\ell=k_0}^n a_{\sigma(\ell)} \leq s \\ \min\{k \in \mathbb{Z}: k \geq k_0, k \notin \sigma(\{k_0, \dots, n\}) \text{ und } a_k < 0\} & \text{falls } \sum_{\ell=k_0}^n a_{\sigma(\ell)} > s \end{cases}$$

für alle $n \geq k_0 - 1$. Wir zeigen über eine Reihe von Hilfsaussagen, dass die Abbildung σ wohldefiniert und bijektiv ist (demzufolge σ dann eine Permutation der Menge $\{n \in \mathbb{Z}: n \geq k_0\}$ darstellt). Folglich ist die Reihe $\sum_{k=k_0}^{\infty} a_{\sigma(k)}$ tatsächlich eine Umordnung der ursprünglichen Reihe $\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k$.

- *σ ist wohldefiniert:* Die beiden Mengen $\min\{k \in \mathbb{Z}: k \geq k_0, k \notin \sigma(\{k_0, \dots, n\}) \text{ und } a_k \geq 0\}$ und $\{k \in \mathbb{Z}: k \geq k_0, k \notin \sigma(\{k_0, \dots, n\}) \text{ und } a_k < 0\}$ sind für jedes $n \geq k_0 - 1$ nicht-leere und nach unten beschränkte Teilmengen von $\mathbb{Z}$, und somit existieren deren Minima nach Korollar 2.53.
- *σ ist injektiv:* Es gilt $\sigma(n+1) \neq \sigma(\ell)$ für alle $\ell \in \{k_0, \dots, n\}$ für alle $n \geq k_0$ gemäß der Definition von σ .
- *σ ist unbeschränkt nach oben:* Dies ist eine unmittelbare Konsequenz der Injektivität von σ .
- *Die Mengen*

$$\left\{n \geq k_0: \sum_{\ell=k_0}^n a_{\sigma(\ell)} \leq s\right\} \quad \text{und} \quad \left\{n \geq k_0: \sum_{\ell=k_0}^n a_{\sigma(\ell)} > s\right\} \quad (5.4)$$

sind unendlich: Wir beweisen zunächst über Widerspruch, dass für unendlich viele Indizes $n \geq k_0$ die Bedingung $\sum_{\ell=k_0}^n a_{\sigma(\ell)} \leq s$ gilt. Gäbe es nämlich nur endlich viele solcher Indizes, so würden wir ein $N \geq k_0$ finden mit

$$\sum_{\ell=k_0}^N a_{\sigma(\ell)} \leq s \quad \text{und} \quad \sum_{\ell=k_0}^m a_{\sigma(\ell)} > s \quad \text{für alle } m \geq N+1. \quad (5.5)$$

Demzufolge hätten wir wegen der Definition von σ sowie der Unbeschränktheit von σ nach oben

$$a_{\sigma(m+1)} < 0 \quad \text{für alle } m \geq N+1 \quad \text{und} \quad \sum_{\ell=N+2}^{\infty} a_{\sigma(\ell)} = \sum_{k=\sigma(N+1)}^{\infty} a_k^- = -\infty.$$

Damit wäre aber auch $\sum_{\ell=k_0}^{\infty} a_{\sigma(\ell)} = -\infty$, im Widerspruch dazu, dass die Folge der Partialsummen für diese Reihe wegen (5.5) nach unten durch s beschränkt wäre. Vollkommen analog erhalten wir, dass auch die Bedingung $\sum_{k=k_0}^{n-1} a_{\sigma(k)} > s$ für unendlich viele Indizes $n \geq k_0$ erfüllt ist.

- *Die Mengen*

$$W^+ := \left\{ \hat{n} \geq k_0 : \sum_{\ell=k_0}^{\hat{n}-1} a_{\sigma(\ell)} \leq s < \sum_{\ell=k_0}^{\hat{n}} a_{\sigma(\ell)} \right\}$$

der oberen Wendepunkte und

$$W^- := \left\{ \check{n} \geq k_0 : \sum_{\ell=k_0}^{\check{n}-1} a_{\sigma(\ell)} > s \geq \sum_{\ell=k_0}^{\check{n}} a_{\sigma(\ell)} \right\}$$

der unteren Wendepunkte sind unendlich: Aus der Unendlichkeit der Mengen in (5.4) erhalten wir, dass es für jeden oberen Wendepunkt $\hat{n} \in W^+$ einen unteren Wendepunkt $\check{n} \in W^-$ mit $\hat{n} > \check{n}$ gibt und umgekehrt. Daraus folgt sofort die Unendlichkeit der oberen und unteren Wendepunkte.

- σ ist surjektiv: Zwischen jedem oberen und unteren Wendepunkt wird mindestens ein negatives Glied summiert und zwischen jedem unteren und oberen Wendepunkt mindestens ein positives. Da die Mengen der oberen und unteren Wendepunkte unendlich sind und in der Konstruktion von σ jeweils das nächste, bisher noch nicht verwendete nicht-negative bzw. positive Glied verwendet wird, liegt jedes $k \geq k_0$ im Bild von σ . Damit bildet σ surjektiv nach $\{k \in \mathbb{Z} : k \geq k_0\}$ ab.

Konvergenz der Umordnung gegen s . Wir betrachten erst Partialsummen der Umordnung bis zu den oberen und unteren Wendepunkten. Für jeden oberen Wendepunkt $\hat{n} \in W^+$ haben wir nach Definition von W^+

$$\left| \sum_{\ell=k_0}^{\hat{n}} a_{\sigma(\ell)} - s \right| = \sum_{\ell=k_0}^{\hat{n}} a_{\sigma(\ell)} - s \leq \sum_{\ell=k_0}^{\hat{n}} a_{\sigma(\ell)} - \sum_{\ell=k_0}^{\hat{n}-1} a_{\sigma(\ell)} = a_{\sigma(\hat{n})} = a_{\sigma(\hat{n})}^+.$$

Vollkommen analog haben wir für jeden unteren Wendepunkt $\check{n} \in W^-$

$$\left| \sum_{\ell=k_0}^{\check{n}} a_{\sigma(\ell)} - s \right| = s - \sum_{\ell=k_0}^{\check{n}} a_{\sigma(\ell)} < \sum_{\ell=k_0}^{\check{n}-1} a_{\sigma(\ell)} - \sum_{\ell=k_0}^{\check{n}} a_{\sigma(\ell)} = -a_{\sigma(\check{n})} = a_{\sigma(\check{n})}^-.$$

Für eine Partialsumme der Umordnung bis zu einem beliebigen Index $n \geq k_0$ muss der Wert zwischen dem nächstgelegenen oberen und unteren Wendepunkt liegen (siehe Bild oben bei der Beweisidee). Mit

$$\hat{n} := \begin{cases} \min(W^+ \cap [n, \infty)) & \text{für } a_{\sigma(n)} \geq 0 \\ \max(W^+ \cap (-\infty, n]) & \text{für } a_{\sigma(n)} < 0 \end{cases} \quad \text{und} \quad \check{n} := \begin{cases} \max(W^- \cap (-\infty, n]) & \text{für } a_{\sigma(n)} \geq 0 \\ \min(W^- \cap [n, \infty)) & \text{für } a_{\sigma(n)} < 0 \end{cases}$$

haben wir mit der obigen Argumentation

$$\sum_{\ell=k_0}^{\check{n}} a_{\sigma(\ell)} \leq \sum_{\ell=k_0}^n a_{\sigma(\ell)} \leq \sum_{\ell=k_0}^{\hat{n}} a_{\sigma(\ell)} \quad \Rightarrow \quad \left| \sum_{\ell=k_0}^n a_{\sigma(\ell)} - s \right| \leq \max \{a_{\sigma(\hat{n})}^+, a_{\sigma(\check{n})}^-\},$$

Mit dieser Vorüberlegung können wir nun die Konvergenz der Umordnung gegen s beweisen. Es sei $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben. Weil $\{a_k\}_{k \geq k_0}$ eine Nullfolge ist, finden wir $n_0 \geq k_0$ mit $|a_k| < \varepsilon$ für alle $k \geq n_0$. Dann wählen wir einen Wendepunkt $\tilde{n}_0 \in W^+ \cup W^-$, der so groß ist, dass

$$\{\sigma(k_0), \sigma(k_0+1), \dots, \sigma(\tilde{n}_0-1)\} \supset \{k_0, k_0+1, \dots, n_0-1\}$$

gilt. Wegen der Injektivität von σ haben wir $\sigma(\ell) \geq n_0$ und damit $|a_{\sigma(\ell)}| < \varepsilon$ für alle $\ell \geq \tilde{n}_0$. Da wegen der Wahl von $\tilde{n}_0$ aus der Menge der Wendepunkte $W^+ \cup W^-$ außerdem $\hat{n}, \check{n} \geq n_0$ für jedes $n \geq \tilde{n}_0$ sichergestellt ist, folgt

$$\left| \sum_{\ell=k_0}^n a_{\sigma(\ell)} - s \right| \leq \max \{a_{\sigma(\hat{n})}^+, a_{\sigma(\check{n})}^-\} < \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq \tilde{n}_0.$$

Dies beweist die Konvergenz der Umordnung gegen s und damit die Aussage des Satzes. $\square$

Bemerkung 5.38. Ist $\{a_k\}_{k \geq k_0}$ für ein $k_0 \in \mathbb{Z}$ eine reelle Folge, so dass die Reihe $\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k$ konvergent, aber nicht absolut konvergent ist, so gibt es auch eine Umordnung von $\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k$, die uneigentlich gegen ∞ (bzw. gegen $-\infty$) konvergiert. Eine solche Umordnung kann man explizit angeben, indem man die Konstruktion aus dem Beweis des Riemannschen Umordnungssatzes 5.37 geeignet modifiziert, so dass durch die Summation von nicht-negativen Gliedern zuerst jeweils ein Level L überschritten wird, bevor das L -te negative Glied summiert wird.

Beispiel 5.39 (Umordnung der alternierenden harmonischen Reihe mit Wert ∞). Zur alternierenden harmonischen Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k}$ betrachten wir die Umordnung

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{4} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \frac{1}{6} \pm \dots = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{\ell=2^{k-1}}^{2^k-1} \frac{1}{2\ell-1} - \frac{1}{2k} \right),$$

bei der, für $k = 1, 2, 3, \dots$, jeweils auf 2^{k-1} positive Glieder in der ursprünglichen Reihenfolge das k -te negative Glied folgt. Betrachten wir einen solchen Block für ein beliebiges $k \geq 4$, so haben wir die Abschätzung

$$\sum_{\ell=2^{k-1}}^{2^k-1} \frac{1}{2\ell-1} - \frac{1}{2k} \geq 2^{k-1} \frac{1}{2(2^k-1)-1} - \frac{1}{2k} \geq \frac{2^{k-1}}{2^{k+1}} - \frac{1}{2k} = \frac{1}{4} - \frac{1}{8} = \frac{1}{8}.$$

Dies zeigt, dass es für die angegebene Umordnung eine Teilfolge von Partialsummen gibt, die uneigentlich gegen ∞ konvergiert. Falls wir in einem Block nur einen Teil der positiven Glieder summieren, so ist die entsprechende Partialsumme jeweils größer als die vorherige Partialsumme. Folglich konvergiert die ganze Folge der Partialsummen und damit die angegebene Umordnung der alternierenden Reihe uneigentlich gegen ∞ .

Abschließend behandeln wir noch Produkte von Reihen im folgenden Sinn.

Definition 5.40 (Cauchy-Produkt). Es seien $\{a_k\}_{k \geq 0}$, $\{b_k\}_{k \geq 0}$ zwei komplexe Folgen. Wir definieren das Cauchy-Produkt der Reihen $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ als die (formale) Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\ell=0}^k a_{\ell} b_{k-\ell} \quad \left(= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\ell=0}^k a_{k-\ell} b_{\ell} \right).$$

Bemerkung 5.41. Betrachtet man zu einem $k \in \mathbb{N}_0$ die innere, mit ℓ indizierte Summe, so stehen dort alle Produkte von Gliedern aus den Folgen $\{a_k\}_{k \geq 0}$ und $\{b_k\}_{k \geq 0}$, deren Indizes in Summe gerade k ergeben.

Es stellt sich heraus, dass zumindest für absolute konvergente Reihen das Cauchy-Produkt einem formalen Ausmultiplizieren wie bei endlichen Summen (und einer entsprechenden Anordnung der Glieder der resultierenden Reihe) entspricht.

Satz 5.42 (Konvergenz des Cauchy-Produkts). Es seien $\{a_k\}_{k \geq 0}$, $\{b_k\}_{k \geq 0}$ zwei komplexe Folgen, so dass eine der Reihen $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ absolut konvergiert und die andere konvergiert. Dann konvergiert

ihr Cauchy-Produkt gegen den Wert

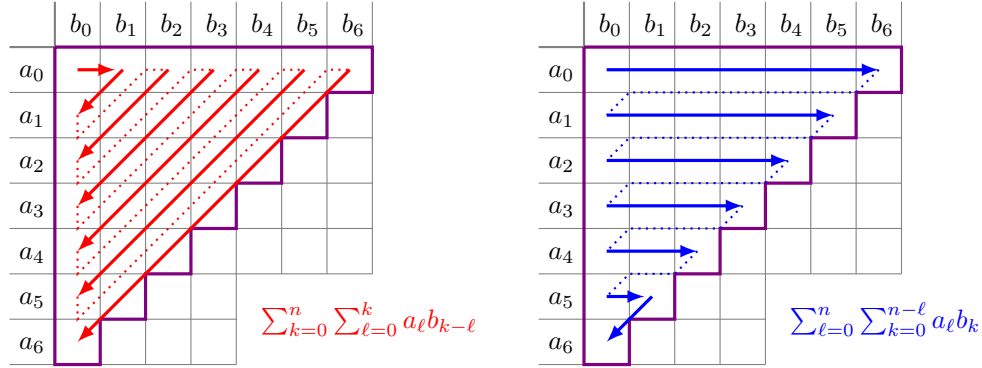
$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\ell=0}^k a_{\ell} b_{k-\ell} = \left(\sum_{\ell=0}^{\infty} a_{\ell} \right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k \right).$$

Die Konvergenz des Cauchy-Produkts ist sogar absolut, falls beide Reihen $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ absolut konvergieren.

Beweis. Ohne Einschränkung dürfen wir annehmen, dass die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ absolut konvergiert. Wir müssen die Konvergenz der Folge der Partialsummen für das Cauchy-Produkt gegen das Produkt der Reihen $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ zeigen. Für $n \in \mathbb{N}_0$ schreiben wir zunächst

$$\sum_{k=0}^n \sum_{\ell=0}^k a_{\ell} b_{k-\ell} = \sum_{\ell=0}^n \sum_{k=0}^{n-\ell} a_{\ell} b_k.$$

Dies entspricht nur einer Änderung der Summationsreihenfolge (welche bei endlichen Summen keine Rolle für den Wert der Summe spielt).



Aus der letzten Identität folgen wir

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^n \sum_{\ell=0}^k a_{\ell} b_{k-\ell} - \left(\sum_{\ell=0}^{\infty} a_{\ell} \right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k \right) \\ &= \sum_{\ell=0}^n \sum_{k=0}^{n-\ell} a_{\ell} b_k - \sum_{\ell=0}^{\infty} a_{\ell} \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k \right) \\ &= \sum_{\ell=0}^n a_{\ell} \cdot \left(\sum_{k=0}^{n-\ell} b_k \right) - \sum_{\ell=0}^n a_{\ell} \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k \right) - \sum_{\ell=n+1}^{\infty} a_{\ell} \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k \right) \\ &= - \sum_{\ell=0}^n a_{\ell} \cdot \left(\sum_{k=n-\ell+1}^{\infty} b_k \right) - \sum_{\ell=n+1}^{\infty} a_{\ell} \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k \right) \\ &= - \sum_{\ell=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} a_{\ell} \cdot \left(\sum_{k=n-\ell+1}^{\infty} b_k \right) - \sum_{\ell=\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1}^n a_{\ell} \cdot \left(\sum_{k=n-\ell+1}^{\infty} b_k \right) - \sum_{\ell=n+1}^{\infty} a_{\ell} \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k \right). \end{aligned} \quad (5.6)$$

Wir wollen nun zeigen, dass die drei Terme auf der rechten Seite betragsmäßig beliebig klein werden, wenn wir $n \in \mathbb{N}_0$ hinreichend groß wählen. Wir definieren

$$A := \sum_{\ell=0}^{\infty} |a_{\ell}| \quad \text{und} \quad B := \sup \left\{ \left| \sum_{k=0}^n b_k \right| : n \in \mathbb{N}_0 \right\}$$

und bemerken, dass A und B nach Voraussetzung der absoluten Konvergenz der Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ bzw. der Konvergenz der Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ endlich sind. Es sei nun $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben. Wegen dieser vorausgesetzten Konvergenzen finden wir ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$\sum_{k=n_0+1}^{\infty} |a_k| < \frac{\varepsilon}{1+4B} \quad \text{und} \quad \left| \sum_{k=m}^{\infty} b_k \right| < \frac{\varepsilon}{1+4A} \quad \text{für } m \geq n_0 + 1.$$

Für $n \geq 2n_0$ haben wir dann für den ersten Term auf der rechten Seite von (5.6)

$$\left| \sum_{\ell=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} a_{\ell} \cdot \left(\sum_{k=n-\ell+1}^{\infty} b_k \right) \right| \leq \sum_{\ell=0}^{\infty} |a_{\ell}| \cdot \left| \sum_{k=n-\ell+1}^{\infty} b_k \right| < A \cdot \frac{\varepsilon}{1+4A} < \frac{\varepsilon}{4}$$

(man beachte dabei $n - \ell + 1 \geq n_0 + 1$ für alle $\ell \in \{0, 1, \dots, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor\}$), für den zweiten Term

$$\left| \sum_{\ell=\lfloor \frac{n}{2} \rfloor+1}^n a_{\ell} \cdot \left(\sum_{k=n-\ell+1}^{\infty} b_k \right) \right| \leq \sum_{\ell=\lfloor \frac{n}{2} \rfloor+1}^n |a_{\ell}| \cdot \left| \sum_{k=0}^{\infty} b_k - \sum_{k=0}^{n-\ell} b_k \right| < \frac{\varepsilon}{1+4B} \cdot 2B < \frac{\varepsilon}{2}$$

und für den dritten Term

$$\left| \sum_{\ell=n+1}^{\infty} a_{\ell} \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k \right) \right| \leq \sum_{\ell=n_0+1}^{\infty} |a_{\ell}| \cdot \left| \sum_{k=0}^{\infty} b_k \right| < \frac{\varepsilon}{1+4B} \cdot B < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Insgesamt bekommen wir mithilfe der Dreiecksungleichung angewandt auf die Identität (5.6) sowie den eben gezeigten drei Abschätzungen

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{k=0}^n \sum_{\ell=0}^k a_{\ell} b_{k-\ell} - \left(\sum_{\ell=0}^{\infty} a_{\ell} \right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k \right) \right| \\ & \leq \left| \sum_{\ell=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} a_{\ell} \cdot \left(\sum_{k=n-\ell+1}^{\infty} b_k \right) \right| + \left| \sum_{\ell=\lfloor \frac{n}{2} \rfloor+1}^n a_{\ell} \cdot \left(\sum_{k=n-\ell+1}^{\infty} b_k \right) \right| + \left| \sum_{\ell=n+1}^{\infty} a_{\ell} \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k \right) \right| \\ & < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Damit ist die Konvergenz des Cauchy-Produkts gezeigt, mit Wert

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\ell=0}^k a_{\ell} b_{k-\ell} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \sum_{\ell=0}^k a_{\ell} b_{k-\ell} = \left(\sum_{\ell=0}^{\infty} a_{\ell} \right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k \right).$$

Schließlich zeigen wir noch, dass die Konvergenz absolut ist, falls auch die zweite Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ absolut konvergiert. Für $n \in \mathbb{N}_0$ schätzen wir dafür die zugehörige (endliche) Partialsumme durch

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \left| \sum_{\ell=0}^k a_{\ell} b_{k-\ell} \right| & \leq \sum_{k=0}^n \sum_{\ell=0}^k |a_{\ell}| \cdot |b_{k-\ell}| \\ & \leq \left(\sum_{\ell=0}^n |a_{\ell}| \right) \cdot \left(\sum_{k=0}^n |b_k| \right) \leq \left(\sum_{\ell=0}^{\infty} |a_{\ell}| \right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} |b_k| \right) \end{aligned}$$

nach oben ab. Somit ist die Folge $\{\sum_{k=0}^n |\sum_{\ell=0}^k a_{\ell} b_{k-\ell}|\}_{n \geq 0}$ der Partialsummen beschränkt, so dass nach Bemerkung 5.24 (1) die behauptete absolute Konvergenz gilt. $\square$

Bemerkung 5.43. Für die Konvergenz des Cauchy-Produkts der beiden Reihen $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ kann man im Allgemeinen nicht auf die Voraussetzung verzichten, dass mindestens eine der Reihen absolut konvergiert. Wählen wir beispielsweise

$$a_k := (-1)^k \frac{1}{\sqrt{k+1}} \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}_0,$$

so ist die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ nach dem Leibniz-Kriterium konvergent (vgl. Übung 5.32), jedoch nicht absolut konvergent. Das Cauchy-Produkt dieser Reihe mit sich selbst hat als Glieder

$$\sum_{\ell=0}^k a_{\ell} a_{k-\ell} = \sum_{\ell=0}^k (-1)^{\ell} \frac{1}{\sqrt{\ell+1}} (-1)^{k-\ell} \frac{1}{\sqrt{k-\ell+1}} = (-1)^k \sum_{\ell=0}^k \frac{1}{\sqrt{\ell+1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{k-\ell+1}}.$$

Wegen $\ell+1 \leq k+1$ und $k-\ell+1 \leq k+1$ für alle $\ell \in \{0, 1, \dots, k\}$ folgt

$$\left| \sum_{\ell=0}^k a_{\ell} a_{k-\ell} \right| \geq \sum_{\ell=0}^k \frac{1}{\sqrt{k+1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{k+1}} = 1 \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}_0.$$

Damit hat das Cauchy-Produkt der Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ mit sich selbst keine Nullfolge als Glieder und ist somit nach dem Trivialekriterium für Divergenz (siehe Lemma 5.3) divergent.

Über das Cauchy-Produkt kann man insbesondere die Werte für manche Reihen explizit bestimmen sowie einige interessante Identitäten herleiten.

Beispiele 5.44.

- (i) Mit dem Cauchy-Produkt für zwei *geometrische Reihen* für ein $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$ erhalten wir über Beispiel 5.5 (i)

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{1-z} \right)^2 &= \left(\sum_{\ell=0}^{\infty} z^{\ell} \right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} z^k \right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\ell=0}^k z^{\ell} z^{k-\ell} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\ell=0}^k z^k = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) z^k. \end{aligned}$$

- (ii) Mit dem Cauchy-Produkt für die Exponentialreihen für $w, z \in \mathbb{C}$ aus Beispiel 5.30 finden wir über den binomischen Lehrsatz 1.94 die *Funktionalgleichung* für die Exponentialreihe

$$\begin{aligned} \exp(w) \cdot \exp(z) &= \left(\sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{w^{\ell}}{\ell!} \right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{\ell=0}^k \frac{w^{\ell}}{\ell!} \frac{z^{k-\ell}}{(k-\ell)!} \right) \cdot \frac{k!}{k!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{\ell=0}^k \binom{k}{\ell} w^{\ell} z^{k-\ell} \right) \cdot \frac{1}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(w+z)^k}{k!} = \exp(w+z). \end{aligned}$$

Übung 5.45. Bestimmen Sie das Cauchy-Produkt der Reihen $\sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k}$ und $\sum_{k=0}^{\infty} 3^{-k}$ und berechnen Sie dessen Wert.

★ **Übung 5.46** (Additionstheorem für die Binomialreihe). Für $s \in \mathbb{R}$ und $z \in \mathbb{C}$ definieren wir die *Binomialreihe* über

$$B_s(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \binom{s}{k} z^k,$$

wobei $\binom{s}{k}$ für $k \in \mathbb{N}_0$ die Binomialkoeffizienten aus Definition 1.88 bezeichnen.

- (i) Zeigen Sie die absolute Konvergenz der Binomialreihe $B_s(z)$ für alle $s \in \mathbb{R}$ und $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$.
(ii) Beweisen Sie mithilfe des Prinzips der vollständigen Induktion die Formel

$$\sum_{\ell=0}^k \binom{s}{\ell} \binom{t}{k-\ell} = \binom{s+t}{k} \quad \text{für alle } s, t \in \mathbb{R} \text{ und } k \in \mathbb{N}_0. \quad (5.7)$$

- (iii) Begründen Sie mithilfe des Cauchy-Produkts das Additionstheorem

$$B_s(z) \cdot B_t(z) = B_{s+t}(z) \quad \text{für alle } s, t \in \mathbb{R} \text{ und } z \in \mathbb{C} \text{ mit } |z| < 1.$$

5.4 Potenzreihen

Viele wichtige Funktionen lassen sich über Reihen der besonderen Form

$$\mathbb{C} \ni z \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$$

mit komplexen Koeffizienten $\{a_k\}_{k \in \mathbb{N}_0}$ und einem $z_0 \in \mathbb{C}$ definieren oder schreiben, den sogenannten *Potenzreihen*. Die Konvergenzeigenschaften einer solchen zunächst nur formal definierten Reihe hängt im Allgemeinen vom Wert der Variable $z \in \mathbb{C}$ ab, so dass wir die komplexe Zahlenebene $\mathbb{C}$ in den Konvergenzbereich $K \subset \mathbb{C}$, so dass die Reihe genau für $z \in K$ konvergiert, und den Divergenzbereich $\mathbb{C} \setminus K$ zerlegen können. In diesem Abschnitt wollen wir vor allem diesen Konvergenzbereich genauer untersuchen und einige wichtige Eigenschaften von Potenzreihen herleiten.

Definition 5.47 (Potenzreihe, Konvergenzbereich und Konvergenzradius). *Eine Potenzreihe ist eine Reihe der Form*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$$

mit gegebenen komplexen Koeffizienten $\{a_k\}_{k \in \mathbb{N}_0}$, einem Entwicklungspunkt $z_0 \in \mathbb{C}$ und einer freien Variable $z \in \mathbb{C}$. Die Menge

$$K := \left\{ z \in \mathbb{C} : \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \text{ konvergiert} \right\} \subset \mathbb{C}$$

bezeichnen wir als den Konvergenzbereich und

$$R := \sup\{|z - z_0| : z \in K\} \in [0, \infty]$$

als den Konvergenzradius der Potenzreihe. Ferner nennen wir die Funktion $P: K \rightarrow \mathbb{C}$ definiert durch

$$P(z) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \quad \text{für } z \in K$$

die Potenzreihenfunktion oder die durch die Potenzreihe dargestellte Funktion.

Bemerkung 5.48. *Häufig reduziert man bei der Untersuchung von Potenzreihen auf den Fall $z_0 = 0$ des Ursprungs als Entwicklungspunkt. Der allgemeine Fall folgt dann, indem man die freie Variable $z \in \mathbb{C}$ durch $z - z_0$ ersetzt.*

Potenzreihen weisen ein relativ einfaches Konvergenzverhalten auf. Sie konvergieren immer *innerhalb einer offenen Kreisscheibe*

$$B_R(z_0) := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < R\}$$

um den Entwicklungspunkt $z_0 \in \mathbb{C}$ mit einem Radius $R \in [0, \infty]$ und sie divergieren in der Menge $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| > R\}$, also *außerhalb der abgeschlossenen Kreisscheibe* um z_0 mit Radius R . Dieses Konvergenzverhalten rechtfertigt den zuvor eingeführten Begriff des *Konvergenzradius* für eine Potenzreihe. Um dies zu beweisen, machen wir zunächst eine Vorüberlegung:

Lemma 5.49. *Es sei $\{a_k\}_{k \in \mathbb{N}_0}$ eine komplexe Folge und $w \in \mathbb{C}$, so dass $\{a_k w^k\}_{k \in \mathbb{N}_0}$ eine Nullfolge ist. Dann konvergiert die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < |w|$ absolut.*

Beweis. Für $w = 0$ existiert kein $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < |w| = 0$ und die Aussage des Lemmas ist trivial. Folglich dürfen wir $w \neq 0$ und damit $|w| > 0$ annehmen. Da $\{a_k w^k\}_{k \in \mathbb{N}_0}$ nach Voraussetzung eine Nullfolge ist, finden wir eine Konstante $c \geq 0$ mit

$$|a_k w^k| \leq c \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}_0.$$

Damit haben wir die Abschätzung

$$|a_k z^k| = |a_k w^k| \cdot \left| \frac{z}{w} \right|^k \leq c \left| \frac{z}{w} \right|^k \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}_0.$$

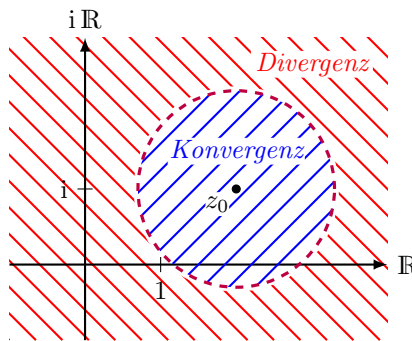
Wegen $\left| \frac{z}{w} \right| < 1$ folgt die absolute Konvergenz der Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ dann aus der in Beispiel 5.5 (i) gezeigten Konvergenz der geometrischen Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \left| \frac{z}{w} \right|^k$ und dem Majorantenkriterium (in der komplexen Variante). $\square$

Satz 5.50 (Konvergenzverhalten von Potenzreihen). *Es sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$ eine Potenzreihe mit komplexen Koeffizienten $\{a_k\}_{k \in \mathbb{N}_0}$, einem Entwicklungspunkt $z_0 \in \mathbb{C}$ und Konvergenzradius $R \in [0, \infty]$. Dann ist die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$*

- (i) *absolut konvergent für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z - z_0| < R$,*
- (ii) *divergent für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z - z_0| > R$.*

Bemerkungen 5.51.

- (1) *Da innerhalb der Kreisscheibe $B_R(z_0)$ Konvergenz der Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$ gilt, bezeichnet man $B_R(z_0)$ auch als den Konvergenzkreis der Reihe.*
- (2) *Satz 5.50 macht keine allgemeingültige Aussage über das Konvergenzverhalten der Potenzreihe auf dem Rand $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = R\}$ der Kreisscheibe $B_R(z_0)$. Wir werden in Beispiel 5.54 (i) sehen, dass es Potenzreihen gibt, bei denen es auf dem Rand der Kreisscheibe sowohl Punkte mit Konvergenz als auch Punkte mit Divergenz der Potenzreihe gibt.*
- (3) *Die Grenzfälle $R \in \{0, \infty\}$ für den Konvergenzradius sind zulässig. Im Fall $R = 0$ konvergiert die Reihe nur für $z = z_0$ (mit Wert a_0) und divergiert für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \{z_0\}$, wohingegen sie im Fall $R = \infty$ für alle $z \in \mathbb{C}$ konvergiert.*



Beweis von Satz 5.50. Ohne Einschränkung betrachten wir nur den Fall $z_0 = 0$ (ansonsten betrachten wir die Verschiebung $z - z_0$ anstelle von z , siehe Bemerkung 5.48).

- (i) Ist $R > 0$ und $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < R$, so gibt es nach Definition des Konvergenzradius ein $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ mit $|z| < |w| \leq R$, so dass $\sum_{k=0}^{\infty} a_k w^k$ konvergiert. Folglich ist $\{a_k w^k\}_{k \in \mathbb{N}_0}$ nach Lemma 5.3 eine Nullfolge und die absolute Konvergenz von $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ gilt dann wegen Lemma 5.49.
- (ii) Ist $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| > R$ (für $R = 0$ trifft dies auf alle $z \in \mathbb{C}$ zu), so muss die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ nach der Definition des Konvergenzradius divergieren. $\square$

Nach dem vorherigen Satz 5.50 ist für das Konvergenzverhalten einer Potenzreihe also der Konvergenzradius entscheidend. Diesen kann man auf verschiedene Arten berechnen:

Satz 5.52 (Berechnung des Konvergenzradius). *Es sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k$ eine Potenzreihe mit komplexen Koeffizienten $\{a_k\}_{k \in \mathbb{N}_0}$ und einem Entwicklungspunkt $z_0 \in \mathbb{C}$. Dann gilt für den Konvergenzradius $R \in [0, \infty]$ der Potenzreihe:*

- (i) $R = \sup\{x \in [0, \infty) : \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \text{ konvergiert}\},$
- (ii) $R = \sup\{r \in [0, \infty) : \lim_{k \rightarrow \infty} |a_k| r^k = 0\},$
- (iii) Formel von Euler: $R = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|a_k|}{|a_{k+1}|},$ falls dieser Limes (ggf. uneigentlich) existiert.
- (iv) Formel von Cauchy–Hadamard: $R = (\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|})^{-1}$ (mit den Konventionen $\infty^{-1} = 0$ und $0^{-1} = \infty$).

Beweis. Ohne Einschränkung betrachten wir wieder nur den Fall $z_0 = 0$ (siehe Bemerkung 5.48).

- (i) Es sei $x \in [0, \infty)$. Betrachten wir $z := z_0 + x \in \mathbb{C}$, so haben wir $x = |x| = |z - z_0|$ und für die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ gilt nach Satz 5.50 für $x < R$ Konvergenz, für $x > R$ Divergenz, und für $x = R$ entweder Konvergenz oder Divergenz. Damit ergibt sich sofort die Behauptung, dass $R = \sup\{x \in [0, \infty) : \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \text{ konvergiert}\}$ gilt.

- (ii) Wir setzen $R^{(ii)} := \sup\{r \in [0, \infty) : \lim_{k \rightarrow \infty} |a_k| r^k = 0\}$. Wir zeigen die Behauptung $R^{(ii)} = R$, indem wir die beiden Ungleichungen $R \leq R^{(ii)}$ und $R^{(ii)} \leq R$ beweisen.

Ist $r < R$ beliebig, so gilt wegen (i) die Konvergenz der Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k r^k$ und damit ist $\{a_k r^k\}_{k \in \mathbb{N}_0}$ nach Lemma 5.3 eine Nullfolge. Nach Definition von $R^{(ii)}$ und der Beliebigkeit von $r < R$ haben wir also $R \leq R^{(ii)}$.

Ist $r < R^{(ii)}$ beliebig, so ist $\{|a_k| r^k\}_{k \in \mathbb{N}_0}$ nach Definition von $R^{(ii)}$ und damit auch $\{a_k r^k\}_{k \in \mathbb{N}_0}$ eine Nullfolge. Aus Lemma 5.49 erhalten wir dann insbesondere, dass die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ für jedes $x \in [0, \infty)$ mit $x < r$ (absolut) konvergiert. Wegen der Beliebigkeit von $r < R^{(ii)}$ schließen wir, dass die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ für jedes $x \in [0, \infty)$ mit $x < R^{(ii)}$ konvergiert. Mithilfe von Aussage (i) folgt dann $R^{(ii)} \leq R^{(i)} = R$.

- (iii) Falls $R^{(iii)} := \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|a_k|}{|a_{k+1}|}$ (ggf. uneigentlich) in $[0, \infty]$ existiert, so gilt für jedes beliebige $x > 0$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|a_{k+1} x^{k+1}|}{|a_k x^k|} = \begin{cases} \frac{x}{R^{(iii)}} & \text{falls } R^{(iii)} > 0, \\ \infty & \text{falls } R^{(iii)} = 0. \end{cases}$$

Mit dem Quotientenkriterium aus Satz 5.27 haben wir für die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ daher Konvergenz für alle $x \in [0, R^{(iii)})$ und Divergenz für alle $x \in (R^{(iii)}, \infty)$. Mit Aussage (i) haben wir daher $R^{(iii)} = R^{(i)} = R$.

- (iv) Für $R^{(iv)} := (\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|})^{-1} \in [0, \infty]$ haben wir für jedes beliebige $x > 0$

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k x^k|} = \begin{cases} \frac{x}{R^{(iv)}} & \text{falls } R^{(iv)} > 0, \\ \infty & \text{falls } R^{(iv)} = 0. \end{cases}$$

Nach dem Wurzelkriterium aus Satz 5.28 gilt für die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ Konvergenz für alle $x \in [0, R^{(iv)})$ und Divergenz für alle $x \in (R^{(iv)}, \infty)$. Mit Aussage (i) haben wir daher auch die letzte Behauptung $R^{(iv)} = R^{(i)} = R$ bewiesen. $\square$

Bemerkung 5.53. *Man beachte, dass im Gegensatz zum Quotientenkriterium aus Satz 5.27 und zum Wurzelkriterium aus Satz 5.28 für die Berechnung des Konvergenzradius in der Formel von Euler und von Cauchy–Hadamard die inversen Größen im Grenzwert betrachtet werden müssen. Dies liegt gerade daran, dass man für den Konvergenzradius nur die Koeffizienten betrachtet und dass diese bestimmen,*

welche Werte die freie Variable $z - z_0$ noch annehmen darf, so dass die Potenzreihe konvergiert. Da der Konvergenzradius der Grenzfall der Konvergenz ist, haben wir als Merkgeln für diese Zusammenhänge

$$R \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|a_{k+1}| R^{k+1}}{|a_k| R^k} \stackrel{!}{=} 1 \quad \Leftrightarrow \quad R = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|a_k|}{|a_{k+1}|}$$

(im Fall der Existenz dieses Grenzwertes) bzw.

$$R \limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} = \limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k| R^k} \stackrel{!}{=} 1 \quad \Leftrightarrow \quad R = \left(\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} \right)^{-1}.$$

Beispiele 5.54.

(i) Die drei Potenzreihen

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k, \quad \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{z^k}{k} \quad \text{und} \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(k+1)^2}$$

haben (beispielsweise nach den Formeln von Euler oder von Cauchy–Hadamard) alle als Konvergenzradius $R = 1$. Das Verhalten auf dem Rand $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ des Konvergenzkreises $B_1(0)$ ist für jedes der Beispiele unterschiedlich:

- Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} z^k$ divergiert für jedes $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = 1$, da $\{z^k\}_{k \in \mathbb{N}_0}$ in diesem Fall keine Nullfolge darstellt.
 - Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{z^k}{k}$ ist für $z = -1$ das Negative der harmonischen Reihe und divergiert, wohingegen sie für $z = 1$ die alternierende harmonische Reihe ist und somit nach dem Leibniz-Kriterium konvergiert. Tatsächlich gilt für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \{-1\}$ mit $|z| = 1$ Konvergenz, vgl. Übung 5.56 unten.
 - Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(k+1)^2}$ konvergiert für jedes $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = 1$ absolut, da $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^2}$ konvergiert und eine Majorante darstellt.
- (ii) Die Exponentialreihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$ (vgl. Beispiel 5.30) hat nach der Formel von Euler als Konvergenzradius $R = \lim_{k \rightarrow \infty} (k+1) = \infty$.
- (iii) Die Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} 3^k z^k$ hat nach der Formel von Euler als Konvergenzradius $R = \frac{1}{3}$ und stellt auf $B_{1/3}(0)$ die Funktion $z \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} (3z)^k = (1 - 3z)^{-1}$ dar (vgl. die Berechnung des Werts der geometrischen Reihe in Beispiel 5.5 (i)).

Übung 5.55. Bestimmen Sie den Konvergenzradius der folgenden Potenzreihen:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^2}{2^k} (z - i)^k, \quad \sum_{k=0}^{\infty} k^k z^k \quad \text{und} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4^k}{k} (z + 1)^{2k}.$$

★ **Übung 5.56.** Es sei $\{a_k\}_{k \in \mathbb{N}_0}$ eine monoton fallende Nullfolge mit $\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} = 1$. Dann konvergiert die Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| \leq 1$ und $z \neq 1$ (und die Konvergenz oder Divergenz bei $z = 1$ hängt von der konkreten Nullfolge $\{a_k\}_{k \in \mathbb{N}_0}$ ab).

Bemerkung 5.57 (Grundoperationen mit Potenzreihen). Wir wollen kurz und ohne genauere Details anmerken, dass viele “natürliche” Operationen auch für Potenzreihen möglich sind. Im Folgenden seien $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$, $\sum_{k=0}^{\infty} b_k (z - z_0)^k$ zwei Potenzreihen mit komplexen Koeffizienten $\{a_k\}_{k \in \mathbb{N}_0}$, $\{b_k\}_{k \in \mathbb{N}_0}$, einem Entwicklungspunkt $z_0 \in \mathbb{C}$ und Konvergenzradien $R_a, R_b \in [0, \infty]$.

- (1) Linearkombinationen von Potenzreihen: Sind $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ beliebige komplexe Zahlen, so hat die Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} (\lambda a_k + \mu b_k) (z - z_0)^k$ als Konvergenzradius mindestens $\min\{R_a, R_b\}$ und für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z - z_0| < \min\{R_a, R_b\}$ gilt nach den Rechenregeln für konvergente Reihen aus Lemma 5.8

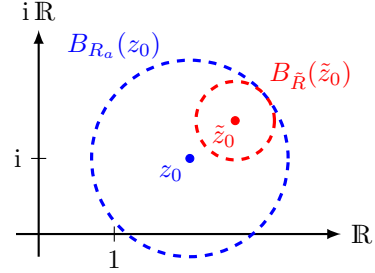
$$\sum_{k=0}^{\infty} (\lambda a_k + \mu b_k) (z - z_0)^k = \lambda \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k + \mu \sum_{k=0}^{\infty} b_k (z - z_0)^k.$$

- (2) Produkt zweier Potenzreihen: Die Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\ell=0}^k a_{\ell} b_{k-\ell} (z - z_0)^k$ hat als Cauchy-Produkt der Potenzreihen $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k (z - z_0)^k$ nach Satz 5.42 als Konvergenzradius mindestens $\min\{R_a, R_b\}$ und für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z - z_0| < \min\{R_a, R_b\}$ den Wert

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\ell=0}^k a_{\ell} b_{k-\ell} (z - z_0)^k = \left(\sum_{\ell=0}^{\infty} a_{\ell} (z - z_0)^{\ell} \right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k (z - z_0)^k \right).$$

- (3) Wechsel des Entwicklungspunktes: Für $\tilde{z}_0 \in B_{R_a}(z_0)$ hat man über den binomischen Lehrsatz 1.94 und Umordnung der Reihe (mit Satz 5.36)

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k [(z - \tilde{z}_0) + (\tilde{z}_0 - z_0)]^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k \sum_{\ell=0}^k \binom{k}{\ell} (z - \tilde{z}_0)^{\ell} (\tilde{z}_0 - z_0)^{k-\ell} \\ &= \sum_{\ell=0}^{\infty} \left(\sum_{k=\ell}^{\infty} a_k \binom{k}{\ell} (\tilde{z}_0 - z_0)^{k-\ell} \right) (z - \tilde{z}_0)^{\ell} \end{aligned}$$



für alle $z \in B_{R_a}(z_0)$. Die Potenzreihe auf der rechten Seite mit Entwicklungspunkt $\tilde{z}_0$ hat als Konvergenzradius mindestens $\tilde{R} = R_a - |\tilde{z}_0 - z_0|$ und stellt in $B_{\tilde{R}}(\tilde{z}_0)$ die gleiche Funktion wie die ursprüngliche Potenzreihe dar.

- (4) Invertierung einer Potenzreihe: Für $R_a > 0$ und $a_0 \neq 0$ gibt es für das multiplikative Inverse $(\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k)^{-1}$ eine Potenzreihendarstellung, die den gleichen Entwicklungspunkt z_0 , über das Cauchy-Produkt in (2) bestimmbare Koeffizienten und einen positiven Konvergenzradius besitzt.

Zum Abschluss dieses Kapitels untersuchen wir noch die Familie aller Potenzreihen um einen gegebenen Entwicklungspunkt. Wir überlegen uns zunächst, wie gut eine Potenzreihe nahe des Entwicklungspunktes durch ihre Partialsummen approximiert wird.

Lemma 5.58 (Abbruchfehler). Es sei $P(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$ eine Potenzreihenfunktion mit komplexen Koeffizienten $\{a_k\}_{k \in \mathbb{N}_0}$, einem Entwicklungspunkt $z_0 \in \mathbb{C}$ und Konvergenzradius $R \in [0, \infty]$. Zu jedem $r \in (0, R)$ und $n \in \mathbb{N}_0$ gibt es eine Konstante $C_n(r) \in [0, \infty)$, so dass der Abbruchfehler die Ungleichung

$$\left| \sum_{k=0}^n a_k (z - z_0)^k - P(z) \right| \leq C_n(r) |z - z_0|^{n+1}$$

für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z - z_0| \leq r$ erfüllt.

Beweis. Mit der Definition der Potenzreihe und der Dreiecksungleichung schätzen wir den Abbruchfehler für jedes $z \in \mathbb{C}$ mit $|z - z_0| \leq r$ durch

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=0}^n a_k (z - z_0)^k - P(z) \right| &= \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \right| \\ &\leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k| \cdot |z - z_0|^k \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k| r^{k-n-1} \cdot |z - z_0|^{n+1} \end{aligned}$$

ab. Die Aussage des Lemmas folgt nun für die Wahl der Konstante $C_n(r)$ als

$$C_n(r) := \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k| r^{k-n-1} = r^{-n-1} \sum_{\ell=0}^{\infty} |a_{n+1+\ell}| r^{n+1+\ell},$$

die wegen $r < R$ nach Satz 5.52 in Kombination mit Lemma 5.49 endlich ist. $\square$

Als Anwendung von Lemma 5.58 zeigen wir eine wichtige Aussage über die Nullstellen einer Potenzreihenfunktion, nämlich dass sich die Nullstellen nur dann beim Entwicklungspunkt häufen können, falls die Potenzreihenfunktion die Nullfunktion darstellt.

Satz 5.59 (Nullstellensatz für Potenzreihen). *Es sei $P(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k$ eine Potenzreihenfunktion mit komplexen Koeffizienten $\{a_k\}_{k \in \mathbb{N}_0}$, einem Entwicklungspunkt $z_0 \in \mathbb{C}$ und Konvergenzradius $R \in (0, \infty]$. Falls nicht $a_k = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$ gilt, dann gibt es ein $\varrho \in (0, R)$, so dass die offene Kreisscheibe $B_\varrho(z_0)$ höchstens eine Nullstelle der Potenzreihenfunktion P enthält.*

Beweis. Wir bezeichnen mit $n := \min\{k \in \mathbb{N}_0 : a_k \neq 0\}$ den Index des ersten nicht-verschwindenden Koeffizienten der Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k$. Für ein beliebiges fixiertes $r \in (0, R)$ (etwa $r = \frac{R}{2}$) bestimmen wir mithilfe von Lemma 5.58 eine Konstante $C_n(r) \geq 0$ mit

$$|a_n(z-z_0)^n - P(z)| = \left| \sum_{k=0}^n a_k(z-z_0)^k - P(z) \right| \leq C_n(r)|z-z_0|^{n+1}$$

für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z-z_0| \leq r$, so dass aus der umgedrehten Dreiecksungleichung eine Abschätzung von $|P(z)|$ nach unten durch

$$|P(z)| \geq |a_n||z-z_0|^n - |a_n(z-z_0)^n - P(z)| \geq (|a_n| - C_n(r)|z-z_0|)|z-z_0|^n \quad (5.8)$$

folgt. Wählen wir nun $\varrho := \min\{r, \frac{|a_n|}{2C_n(r)+1}\}$, so haben wir für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z-z_0| < \varrho \leq r$

$$|a_n| - C_n(r)|z-z_0| \geq |a_n| - C_n(r)\varrho \geq |a_n| - C_n(r)\frac{|a_n|}{2C_n(r)+1} \geq \frac{|a_n|}{2} > 0.$$

Aus (5.8) erhalten wir dann $|P(z)| > 0$ für alle $z \in B_\varrho(z_0) \setminus \{z_0\}$, so dass einzig der Entwicklungspunkt z_0 als Nullstelle der Potenzreihenfunktion P in der offenen Kreisscheibe $B_\varrho(z_0)$ in Frage kommt. Damit ist der Nullstellensatz für Potenzreihen bewiesen. $\square$

Mit der Anwendung des Nullstellensatzes auf die Differenz zweier Potenzreihen um einen gemeinsamen Entwicklungspunkt erhalten wir, dass diese beiden Potenzreihen genau dann die gleiche Funktion darstellen, wenn ihre Koeffizienten übereinstimmen. Die Potenzreihendarstellung einer Funktion um einen Entwicklungspunkt ist damit also eindeutig bestimmt.

Korollar 5.60 (Identitätssatz für Potenzreihen). *Es seien $P(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k$ und $Q(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k(z-z_0)^k$ zwei Potenzreihenfunktionen mit komplexen Koeffizienten $\{a_k\}_{k \in \mathbb{N}_0}$ und $\{b_k\}_{k \in \mathbb{N}_0}$, einem gemeinsamen Entwicklungspunkt $z_0 \in \mathbb{C}$ und positiven Konvergenzradien $R_a, R_b \in (0, \infty]$. Falls eine Folge $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ mit*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z_0 \quad \text{und} \quad P(z_n) = Q(z_n) \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

existiert, so stimmen die Potenzreihenfunktionen P und Q überein, d.h. es gilt $a_k = b_k$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$.

Beweis. Die Potenzreihe

$$D(z) := \sum_{k=0}^{\infty} (a_k - b_k)(z-z_0)^k$$

stimmt nach Bemerkung 5.57 (1) für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z-z_0| < \min\{R_a, R_b\}$ mit der Differenz $P(z) - Q(z)$ der beiden Potenzreihen überein. Falls eine Folge $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ existiert, so dass $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z_0$ und $P(z_n) = Q(z_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, dann hat die Potenzreihenfunktion D insbesondere für jedes $\varrho < \min\{R_a, R_b\}$ unendlich viele Nullstellen in $B_\varrho(z_0)$. Nach Satz 5.59 folgt also

$$a_k - b_k = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a_k = b_k \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}_0. \quad \square$$

Mindmap. Überlegen Sie sich anhand der Mindmap, wie die wichtigsten Begriffe und Konzepte aus diesem Kapitel zusammenhängen und ob Sie diese verstanden haben!



Kapitel 6

Grenzwerte und Stetigkeit von Funktionen

In diesem Kapitel beschäftigen wir uns mit Funktionen, die auf einer Teilmenge von $\mathbb{R}$ oder allgemeiner auf einer Teilmenge von $\mathbb{C}$ definiert sind. Wir führen zunächst den Begriff des Grenzwertes einer Funktion ein. Danach definieren wir den Begriff der Stetigkeit einer Funktion und diskutieren, unter welchen Operationen die Eigenschaft der Stetigkeit erhalten bleibt. Abschließend beweisen wir einige wichtige Aussagen für stetige Funktionen, insbesondere für solche mit einem kompakten Intervall als Definitionsbereich.

6.1 Grenzwerte

Wir betrachten eine Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ mit Definitionsbereich $D \subset \mathbb{C}$ und wollen über *Grenzwerte* die Werte von f lokal um einen Punkt $z_0 \in \mathbb{C}$ erfassen, der “beliebig gut” durch Punkte aus D approximiert werden kann. Wir lassen uns dabei von der Frage leiten, ob für jede Folge $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ im punktierten Definitionsbereich $D \setminus \{z_0\}$, die gegen diesen Punkt z_0 konvergiert, auch die Folge $\{f(z_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ der Funktionswerte im Wertebereich $\mathbb{C}$ der Funktion konvergiert (und zwar notwendigerweise für jede solche Folge $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ gegen den gleichen Grenzwert). Damit diese Frage sinnvoll gestellt werden kann, müssen wir zunächst wissen, dass überhaupt eine solche, gegen z_0 konvergente Folge $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ in $D \setminus \{z_0\}$ existiert. Dazu führen wir das Konzept des Häufungspunktes einer Menge $D \subset \mathbb{C}$ ein (und nur an solchen Häufungspunkten wollen wir anschließend den Begriff des Grenzwertes einer Funktion einführen).

Definition 6.1 (Häufungspunkt einer Menge). *Es sei $D \subset \mathbb{C}$ eine Menge. Ein Punkt $z_0 \in \mathbb{C}$ heißt Häufungspunkt der Menge D , falls eine Folge $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ existiert mit*

$$z_n \in D \setminus \{z_0\} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N} \quad \text{und} \quad z_n \rightarrow z_0 \quad \text{bei } n \rightarrow \infty.$$

Bemerkungen 6.2.

- (1) In Definition 6.1 ist es wichtig, dass die Folgenglieder von $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ alle aus der Menge $D \setminus \{z_0\}$ stammen, sonst wäre jeder Punkt in D bereits ein Häufungspunkt von D (mit der konstanten Folge $z_n = z_0$ für alle $n \in \mathbb{N}$), und sie sich um z_0 tatsächlich “häufen” (vgl. Übung 6.3). Es ist dabei vollkommen unwichtig, ob der Punkt z_0 im Definitionsbereich D oder in seinem Komplement $\mathbb{C} \setminus D$ liegt – er muss lediglich der Grenzwert einer Folge aus $D \setminus \{z_0\}$ sein.
- (2) Ist D eine Teilmenge von $\mathbb{R}$, so sind auch alle Häufungspunkte von D in $\mathbb{R}$. In diesem Fall kann man außerdem ∞ und $-\infty$ als uneigentliche Häufungspunkte von D bezeichnen, falls es eine Folge $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ in D gibt mit $z_n \rightarrow \infty$ bzw. $z_n \rightarrow -\infty$ bei $n \rightarrow \infty$.

Übung 6.3 (äquivalente Formulierungen von Häufungspunkt). Es sei $D \subset \mathbb{C}$ eine Menge und $z_0 \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

- (i) Der Punkt $z_0 \in \mathbb{C}$ ist ein Häufungspunkt der Menge D (gemäß Definition 6.1).

- (ii) Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein Punkt $z \in D \setminus \{z_0\}$ mit $|z - z_0| < \varepsilon$.
- (iii) Zu jedem $\varepsilon > 0$ existieren abzählbar viele Punkte $z \in D \setminus \{z_0\}$ mit $|z - z_0| < \varepsilon$.

Beispiele 6.4.

- (i) Die Menge $\{42\}$ hat keinen einzigen Häufungspunkt.
- (ii) Die Menge $\{k^{-1} : k \in \mathbb{N}\}$ hat einen einzigen Häufungspunkt, nämlich die 0.
- (iii) Die Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen hat $\mathbb{R}$ als Menge aller Häufungspunkte.
- (iv) Das offene Intervall $(a, b) \subset \mathbb{R}$ (mit $a < b$) hat das abgeschlossene Intervall $[a, b]$ als Menge aller Häufungspunkte. Entsprechend hat die offene Kreisscheibe $B_R(z) := \{w \in \mathbb{C} : |w - z| < R\}$ (mit $R > 0$ und $z \in \mathbb{C}$) die abgeschlossene Kreisscheibe $\{w \in \mathbb{C} : |w - z| \leq R\}$ als Menge aller Häufungspunkte.

Ist $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ eine Funktion, z_0 ein Häufungspunkt von D und konvergiert für jede Folge $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ in $D \setminus \{z_0\}$ mit $z_n \rightarrow z_0$ bei $n \rightarrow \infty$ auch die Folge $\{f(z_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ der Funktionswerte, so können wir den Grenzwert von f als genau diesen (eindeutigen) Grenzwert der Folgen der Funktionswerte definieren (und das im Fall $z_0 \in D$ ganz unabhängig vom vorgegebenem Funktionswert $f(z_0)$ an der Stelle z_0):

Definition 6.5 (Grenzwert einer Funktion). *Es sei $D \subset \mathbb{C}$ eine Menge mit Häufungspunkt $z_0 \in \mathbb{C}$. Wir nennen $y \in \mathbb{C}$ den Grenzwert einer Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ für $z \rightarrow z_0$, in Zeichen*

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = y \quad \text{oder} \quad f(z) \rightarrow y \quad \text{bei } z \rightarrow z_0,$$

falls für jede Folge $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ von Punkten in $D \setminus \{z_0\}$ mit $z_n \rightarrow z_0$ bei $n \rightarrow \infty$ gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = y.$$

Bemerkungen 6.6.

- (1) Wegen der Eindeutigkeit der Grenzwerte von Folgen ist klar, dass der Grenzwert y der Funktion f bei $z \rightarrow z_0$ eindeutig ist, falls er existiert.
- (2) Ist $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ eine komplexwertige Funktion, z_0 ein Häufungspunkt von D und $y \in \mathbb{C}$, so folgern wir aus Übung 4.17: die Funktion f hat für $z \rightarrow z_0$ genau dann den Grenzwert y , falls für jede Folge $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ von Punkten in $D \setminus \{z_0\}$ mit $z_n \rightarrow z_0$ bei $n \rightarrow \infty$ die Konvergenzen

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{Re}(f(z_n)) = \operatorname{Re}(y) \quad \text{und} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{Im}(f(z_n)) = \operatorname{Im}(y)$$

in $\mathbb{R}$ gelten, d.h. wenn die reellwertigen Funktionen $\operatorname{Re}(f), \operatorname{Im}(f): D \rightarrow \mathbb{R}$ des Real- und Imaginärteils von f bei $z \rightarrow z_0$ die Grenzwerte $\operatorname{Re}(y)$ bzw. $\operatorname{Im}(y)$ besitzen.

- (3) Wir definieren Grenzwerte von Funktionen ausschließlich für Häufungspunkte von D und betrachten dabei lediglich Funktionswerte von f entlang von Folgen $\{z_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ in $D \setminus \{z_0\}$. In einigen Lehrbüchern werden Grenzwerte von Funktionen für alle Punkte $z_0 \in \mathbb{C}$ definiert, die Häufungspunkt von D sind oder zu D selbst gehören, und dazu werden Funktionswerte von f entlang aller Folgen $\{z_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ in D betrachtet (insbesondere ist in diesem Fall für Punkte $z_0 \in D$ die konstante Folge $z_n := z_0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ zulässig). Diese Definition ist etwas restriktiver als unsere Definition 6.5, jedoch betrachten wir in den für uns wichtigsten Anwendungen (wie der stetigen Fortsetzbarkeit von Funktionen in Definitionslücken oder der Definition von Differenzierbarkeit als Limes von Differenzenquotienten) nur Grenzwerte für Häufungspunkte $z_0 \notin D$, so dass beide Definitionen hier übereinstimmen.

Beispiele 6.7.

- (i) Für die konstante Funktion $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ mit $f(z) = y$ für alle $z \in \mathbb{C}$ und eine Konstante $y \in \mathbb{C}$ gilt $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = y$ für alle $z_0 \in \mathbb{C}$.
- (ii) Für die Funktion $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ mit $f(z) = z$ für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = z_0$ für alle $z_0 \in \mathbb{C}$.
- (iii) Die Exponentialreihe $\exp: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ aus Beispiel 5.30 erfüllt nach Lemma 5.58 die Abschätzung $|\exp(z) - 1| \leq C|z|$ für alle $|z| \leq 1$ und eine Konstante $C \geq 0$. Damit folgt $\lim_{z \rightarrow 0} \exp(z) = 1$.
- (iv) Für die Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(0) = 0$ und $f(x) = 1$ für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gilt $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$.
- (v) Die Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) := \lfloor x \rfloor$ für alle $x \in \mathbb{R}$ ist konstant gleich m auf jedem halboffenen Intervall $[m, m+1)$ mit $m \in \mathbb{Z}$. Damit existiert der Grenzwert $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lfloor x_0 \rfloor = f(x_0)$ für alle $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, wohingegen der Grenzwert $\lim_{x \rightarrow m} f(x)$ für $m \in \mathbb{Z}$ nicht existiert (da in diesem Fall $\lim_{n \rightarrow \infty} f(m - n^{-1}) = m - 1 \neq m = \lim_{n \rightarrow \infty} f(m + n^{-1})$ gilt).
- (vi) Für die Funktion $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definiert als

$$\mathbb{1}_{\mathbb{Q}} := \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{falls } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \end{cases}$$

existiert der Grenzwert $\lim_{x \rightarrow x_0} \mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(x)$ für kein $x_0 \in \mathbb{R}$ (da es insbesondere Folgen $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ mit $x_n \rightarrow x_0$ bei $n \rightarrow \infty$ gibt, für die $x_n \in \mathbb{Q}$ und damit $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(x_n) = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ oder $x_n \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ und damit $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(x_n) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt).

Anstelle den Grenzwert einer Funktion wie oben über Folgen zu definieren können wir äquivalent auch eine Formulierung über Umgebungen in Definitions- und Wertebereich der Funktion verwenden:

Lemma 6.8 (Umgebungs- oder ε - δ -Formulierung für den Grenzwert einer Funktion). *Es sei $D \subset \mathbb{C}$ eine Menge mit Häufungspunkt $z_0 \in \mathbb{C}$. Für eine Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ gilt $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = y$ genau dann, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert mit*

$$|f(z) - y| < \varepsilon \quad \text{für alle } z \in D \setminus \{z_0\} \text{ mit } |z - z_0| < \delta.$$

Beweis.

$\Rightarrow$: Wir beweisen die Implikation über Widerspruch und nehmen an, dass $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = y$ gilt, aber die ε - δ -Formulierung nicht zutrifft. Dann finden wir ein $\varepsilon > 0$, so dass für jedes $\delta > 0$ ein $z \in D \setminus \{z_0\}$ existiert mit $|z - z_0| < \delta$ und $|f(z) - y| \geq \varepsilon$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ dürfen wir insbesondere $\frac{1}{n} > 0$ anstelle von δ betrachten und erhalten so eine Folge $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ in $D \setminus \{z_0\}$ mit

$$|z_n - z_0| < \frac{1}{n} \quad \text{und} \quad |f(z_n) - y| \geq \varepsilon \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Nach Konstruktion hätten wir dann $z_n \rightarrow z_0$ bei $n \rightarrow \infty$, womit dann die Voraussetzung $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = y$ im Widerspruch zu $|f(z_n) - y| \geq \varepsilon$ für alle $n \in \mathbb{N}$ stünde. Folglich muss die ε - δ -Formulierung für den Grenzwert gelten.

$\Leftarrow$: Wir nehmen an, dass die ε - δ -Formulierung für den Grenzwert zutrifft. Es sei $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine beliebige Folge von Punkten in $D \setminus \{z_0\}$ mit $z_n \rightarrow z_0$ bei $n \rightarrow \infty$. Ist $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben und $\delta > 0$ entsprechend der ε - δ -Formulierung gewählt, so existiert ein Index $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|z_n - z_0| < \delta$ und damit, gemäß der ε - δ -Formulierung, auch mit $|f(z_n) - y| < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$. Wegen der Beliebigkeit von $\varepsilon > 0$ haben wir daher $\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = y$, und wegen der Beliebigkeit der Folge $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ in $D \setminus \{z_0\}$ mit $z_n \rightarrow z_0$ bei $n \rightarrow \infty$ folgt dann auch die Existenz des Grenzwerts $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = y$. $\square$

Bemerkung 6.9 (Existenz des Grenzwertes als lokale Eigenschaft). *Anhand der ε - δ -Formulierung aus Lemma 6.8 kann man leicht erkennen, dass die Existenz oder Nicht-Existenz des Grenzwerts einer Funktion an einem Häufungspunkt z_0 eine lokale Eigenschaft ist, d.h. nur vom Verhalten der Funktion in einer (beliebig kleinen) Kreisscheibe um z_0 abhängt.*

★ **Übung 6.10** (Cauchy-Kriterium für den Grenzwert einer Funktion). Es sei $D \subset \mathbb{C}$ eine Menge mit Häufungspunkt $z_0 \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie für eine Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{C}$, dass der Grenzwert $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ genau dann existiert, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert mit

$$|f(z) - f(\tilde{z})| < \varepsilon \quad \text{für alle } z, \tilde{z} \in D \setminus \{z_0\} \text{ mit } |z - z_0| < \delta \text{ und } |\tilde{z} - z_0| < \delta.$$

Als Anwendung der ε - δ -Formulierung für den Grenzwert einer Funktion aus Lemma 6.8 zeigen wir, dass die Koeffizienten einer Potenzfunktion über eine Grenzwertbildung rekonstruiert werden können.

Lemma 6.11 (Rekonstruktion der Koeffizienten einer Potenzreihe über Grenzwertbildung). *Es sei $P(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k$ eine Potenzreihenfunktion mit komplexen Koeffizienten $\{a_k\}_{k \in \mathbb{N}_0}$, einem Entwicklungspunkt $z_0 \in \mathbb{C}$ und positivem Konvergenzradius $R > 0$. Dann gilt für jedes $n \in \mathbb{N}_0$*

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{P(z) - \sum_{k=0}^{n-1} a_k(z - z_0)^k}{(z - z_0)^n} = a_n.$$

Beweis. Um die ε - δ -Formulierung des Grenzwerts nachzuweisen, sei $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben. Für ein beliebiges, aber festes $r \in (0, R)$ kennen wir aufgrund des Abbruchfehlers für Potenzreihen aus Lemma 5.58 die Abschätzung

$$\left| P(z) - \sum_{k=0}^n a_k(z - z_0)^k \right| \leq C_n(r) |z - z_0|^{n+1}$$

für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z - z_0| \leq r$ und eine Konstante $C_n(r) \geq 0$. Für ein beliebiges $z \in \mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ mit $|z - z_0| < \delta := \min\{r, \frac{\varepsilon}{C_n(r)+1}\}$ folgern wir dann

$$\left| \frac{P(z) - \sum_{k=0}^{n-1} a_k(z - z_0)^k}{(z - z_0)^n} - a_n \right| = \left| \frac{P(z) - \sum_{k=0}^n a_k(z - z_0)^k}{(z - z_0)^n} \right| \leq C_n(r) |z - z_0| < \varepsilon.$$

Mit Lemma 6.8 folgt nun die Behauptung. □

Bemerkung 6.12. *Lemma 6.11 können wir nun insbesondere auf die Exponentialfunktion aus Beispiel 5.30 anwenden und bekommen dann (vgl. auch Beispiel 6.7 (iii))*

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\exp(z) - 1 - \frac{z}{1!} - \frac{z^2}{2!} - \dots - \frac{z^{n-1}}{(n-1)!}}{z^n} = \frac{1}{n!} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_0.$$

Aus den Rechenregeln für Grenzwerte von Folgen in Lemma 4.15 können wir die entsprechenden Rechenregeln für Grenzwerte von Funktionen ableiten.

Lemma 6.13 (Rechenregeln für Grenzwerte von Funktionen). *Es sei $D \subset \mathbb{C}$ eine Menge mit Häufungspunkt $z_0 \in \mathbb{C}$ und es seien $f, g: D \rightarrow \mathbb{C}$ zwei Funktionen, so dass die Grenzwerte von f und g bei $z \rightarrow z_0$ existieren. Dann gelten die folgenden Aussagen:*

- (i) *Die Funktion $f + g: D \rightarrow \mathbb{C}$, definiert durch $(f + g)(z) = f(z) + g(z)$ für alle $z \in D$, konvergiert bei $z \rightarrow z_0$, mit*

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (f + g)(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) + \lim_{z \rightarrow z_0} g(z).$$

- (ii) *Die Funktion $f \cdot g: D \rightarrow \mathbb{C}$, definiert durch $(f \cdot g)(z) = f(z) \cdot g(z)$ für alle $z \in D$, konvergiert bei*

$z \rightarrow z_0$, mit

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (f \cdot g)(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) \cdot \lim_{z \rightarrow z_0} g(z).$$

- (iii) Falls $\lim_{z \rightarrow z_0} g(z) \neq 0$ gilt, so konvergiert die Funktion $f/g: \{z \in D: g(z) \neq 0\} \rightarrow \mathbb{C}$, definiert durch $(f/g)(z) = \frac{f(z)}{g(z)}$ für alle $z \in D$ mit $g(z) \neq 0$, bei $z \rightarrow z_0$, mit

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f}{g}(z) = \frac{\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)}{\lim_{z \rightarrow z_0} g(z)}.$$

Beweis. Im Folgenden verwenden wir $a := \lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n)$ und $b := \lim_{n \rightarrow \infty} g(z_n)$ als Bezeichnungen für die Grenzwerte von f bzw. g bei $z \rightarrow z_0$.

- (i) Es sei $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine beliebige Folge von Punkten in $D \setminus \{z_0\}$ mit $z_n \rightarrow z_0$ bei $n \rightarrow \infty$. Dann folgt aus den Rechenregeln für Grenzwerte von Folgen in Lemma 4.15 (i)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (f + g)(z_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (f(z_n) + g(z_n)) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) + \lim_{n \rightarrow \infty} g(z_n) = a + b.$$

Da der Grenzwert der Folge $\{(f + g)(z_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ unabhängig von der Wahl der betrachteten Folge $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ in $D \setminus \{z_0\}$ mit $z_n \rightarrow z_0$ bei $n \rightarrow \infty$ ist, folgt die Behauptung, dass auch der Grenzwert von $f + g$ bei $z \rightarrow z_0$ existiert und $\lim_{z \rightarrow z_0} (f + g)(z) = a + b$ gilt.

- (ii) Es sei $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine beliebige Folge von Punkten in $D \setminus \{z_0\}$ mit $z_n \rightarrow z_0$ bei $n \rightarrow \infty$. Ähnlich wie im Beweis von (i) erhalten wir mit Lemma 4.15 (ii)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (f \cdot g)(z_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (f(z_n) \cdot g(z_n)) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} g(z_n) = a \cdot b.$$

Mit der Beliebigkeit der Folge $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ in $D \setminus \{z_0\}$ mit $z_n \rightarrow z_0$ bei $n \rightarrow \infty$ erhalten wir dann, dass auch der Grenzwert von $f \cdot g$ bei $z \rightarrow z_0$ existiert und $\lim_{z \rightarrow z_0} (f \cdot g)(z) = a \cdot b$ gilt.

- (iii) Wir überlegen uns zunächst, dass z_0 ein Häufungspunkt der Menge $\{z \in D: g(z) \neq 0\}$ ist, damit wir überhaupt der Frage nach dem Grenzwert der Funktion $f/g: \{z \in D: g(z) \neq 0\} \rightarrow \mathbb{C}$ bei $z \rightarrow z_0$ nachgehen können. Da z_0 nach Voraussetzung ein Häufungspunkt der Menge D ist, gibt es eine Folge $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ in $D \setminus \{z_0\}$ mit $z_n \rightarrow z_0$ bei $n \rightarrow \infty$. Wir begründen nun, dass höchstens endlich viele der Folgenglieder von $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ Nullstellen von g sind. Unter der Voraussetzung $b = \lim_{z \rightarrow z_0} g(z) \neq 0$ finden wir mithilfe von Lemma 6.8 mit der Wahl $\varepsilon = |b| > 0$ ein $\delta > 0$, so dass $|g(z) - b| < |b|$ und damit $g(z) \neq 0$ für alle $z \in D \setminus \{z_0\}$ mit $|z - z_0| < \delta$ gilt. Zu diesem $\delta > 0$ bestimmen wir dann ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|z_n - z_0| < \delta$ und damit auch mit $g(z_n) \neq 0$ für alle $n \geq n_0$. Für die Folge $\{z_n\}_{n \geq n_0}$ haben wir demnach $z_n \in \{z \in D: g(z) \neq 0\}$ für alle $n \geq n_0$ und $z_n \rightarrow z_0$ bei $n \rightarrow \infty$, womit z_0 tatsächlich ein Häufungspunkt des Definitionsbereichs $\{z \in D: g(z) \neq 0\}$ der Funktion f/g ist.

Mit Lemma 4.15 (iii) folgt nun

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f}{g}(z_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(z_n)}{g(z_n)} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n)}{\lim_{n \rightarrow \infty} g(z_n)} = \frac{a}{b}.$$

Mit der Beliebigkeit der Folge $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ in $D \setminus \{z_0\}$ mit $z_n \rightarrow z_0$ bei $n \rightarrow \infty$ erhalten wir, dass der Grenzwert von f/g bei $z \rightarrow z_0$ existiert und $\lim_{z \rightarrow z_0} (f/g)(z) = \frac{a}{b}$ gilt. $\square$

Übung 6.14. Berechnen Sie die Grenzwerte

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 3x + 2} \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x^2 + 3x - 3}{x^2 - 1}.$$

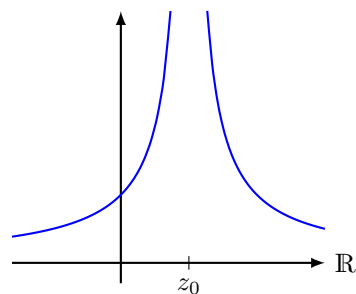
Zum Abschluss dieses Abschnitts definieren wir noch einige Grenzwertbegriffe für die besonderen Situationen, dass wir Funktionen betrachten, deren Wertebereich oder Definitionsbereich in $\mathbb{R}$ liegt. Im ersten Fall des Wertebereichs in $\mathbb{R}$ können wir die uneigentlichen Grenzwerte $\pm\infty$ in vollkommener Analogie zur Definition 6.5 des Grenzwertes einer Funktion einführen.

Definition 6.15 (uneigentlicher Grenzwert einer Funktion). *Es sei $D \subset \mathbb{C}$ eine Menge mit Häufungspunkt $z_0 \in \mathbb{C}$. Wir nennen $y \in \{\pm\infty\}$ den uneigentlichen Grenzwert einer Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ für $z \rightarrow z_0$, in Zeichen*

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = y \quad \text{oder} \quad f(z) \rightarrow y \quad \text{bei } z \rightarrow z_0,$$

falls für jede Folge $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ von Punkten in $D \setminus \{z_0\}$ mit $z_n \rightarrow z_0$ bei $n \rightarrow \infty$ gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = y.$$



Bemerkung 6.16 (Vergleichs- und Einschachtelungsprinzip für Grenzwerte). *Sind $f, g: D \rightarrow \mathbb{R}$ reellwertige Funktionen für eine Menge $D \subset \mathbb{C}$ mit Häufungspunkt $z_0 \in \mathbb{C}$, so dass die Grenzwerte von f und g (ggf. uneigentlich) bei $z \rightarrow z_0$ existieren, so kann man sich anhand von Übung 4.18 und Satz 4.28 leicht die folgenden Aussagen überlegen:*

- (1) Vergleichsprinzip: *Gilt $f(z) \leq g(z)$ für alle $z \in D \setminus \{z_0\}$ mit $|z - z_0| < r$ für ein $r > 0$, so gilt*

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) \leq \lim_{z \rightarrow z_0} g(z).$$

- (2) Einschachtelungsprinzip: *Ist $h: D \rightarrow \mathbb{R}$ eine weitere Funktion mit $f(z) \leq h(z) \leq g(z)$ für alle $z \in D \setminus \{z_0\}$ mit $|z - z_0| < r$ für ein $r > 0$ und gilt $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} g(z)$, so existiert der (ggf. uneigentliche) Grenzwert von h bei $z \rightarrow z_0$, mit*

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} h(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} g(z).$$

Im zweiten Fall des Definitionsbereichs in $\mathbb{R}$ gibt es einerseits entweder eine oder zwei ausgezeichnete Richtungen, aus denen eine Folge gegen einen Häufungspunkt der Definitionsmenge konvergieren kann, und andererseits kann das Definitionsgebiet auch den uneigentlichen Häufungspunkt $\pm\infty$ haben.

Definition 6.17 (einseitiger Grenzwert und Grenzwert bei $x \rightarrow \pm\infty$). *Es sei $D \subset \mathbb{R}$ eine Menge und $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ eine Funktion.*

- (i) *Ist $x_0 \in \mathbb{R}$ ein Häufungspunkt von $D \cap (-\infty, x_0)$ bzw. $D \cap (x_0, \infty)$, so nennen wir $y \in \mathbb{C}$ den linksseitigen bzw. rechtsseitigen Grenzwert von f bei $x \rightarrow x_0$, in Zeichen*

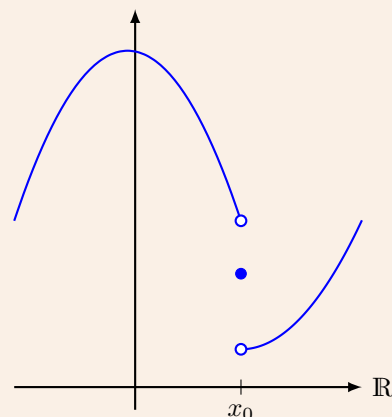
$$\lim_{x \nearrow x_0} f(x) = y \quad \text{oder} \quad f(x) \rightarrow y \quad \text{bei } x \nearrow x_0$$

bzw.

$$\lim_{x \searrow x_0} f(x) = y \quad \text{oder} \quad f(x) \rightarrow y \quad \text{bei } x \searrow x_0,$$

falls für jede Folge $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ von Punkten in $D \cap (-\infty, x_0)$ bzw. $D \cap (x_0, \infty)$ mit $x_n \rightarrow x_0$ bei $n \rightarrow \infty$ gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = y.$$



- (ii) *Ist D nach oben bzw. unten unbeschränkt, so nennen wir $y \in \mathbb{C}$ den Grenzwert von f bei $x \rightarrow \infty$ bzw. $x \rightarrow -\infty$, in Zeichen*

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = y \quad \text{oder} \quad f(x) \rightarrow y \quad \text{bei } x \rightarrow \infty$$

bzw.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = y \quad \text{oder} \quad f(x) \rightarrow y \quad \text{bei } x \rightarrow -\infty,$$

falls für jede Folge $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ von Punkten in D mit $x_n \rightarrow \infty$ bzw. $x_n \rightarrow -\infty$ bei $n \rightarrow \infty$ gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = y.$$

Bemerkungen 6.18. Es sei $D \subset \mathbb{R}$ eine Menge.

- (1) Es sei $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ eine Funktion, so dass $x_0 \in \mathbb{R}$ sowohl ein Häufungspunkt von $D \cap (-\infty, x_0)$ als auch von $D \cap (x_0, \infty)$ ist. Dann existiert der Grenzwert $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ genau dann, wenn sowohl der linksseitige Grenzwert $\lim_{x \nearrow x_0} f(x)$ als auch der rechtsseitige Grenzwert $\lim_{x \searrow x_0} f(x)$ existieren und diese übereinstimmen. In diesem Fall gilt dann

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \nearrow x_0} f(x) = \lim_{x \searrow x_0} f(x).$$

Relevant sind einseitige Grenzwerte aber vor allem in Situationen, in denen die einseitigen Grenzwerte zwar existieren, aber nicht übereinstimmen (wie im Bild oben in Definition 6.17), so dass der Grenzwert dann auch nicht existiert.

- (2) Ist $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ eine reellwertige Funktion, so können wir in Definition 6.17 bei den einseitigen Grenzwerten in (i) und bei den Grenzwerten bei $x \rightarrow \pm\infty$ in (ii) analog zu Definition 6.15 auch uneigentliche Grenzwerte $y \in \{\pm\infty\}$ zulassen.

Beispiele 6.19.

- (i) Die Signumsfunktion $\text{sign}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ aus Definition 2.32 hat im Ursprung $x_0 = 0$ die einseitigen Grenzwerte $\lim_{x \nearrow 0} f(x) = -1$ und $\lim_{x \searrow 0} f(x) = 1$.
- (ii) Die Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) := \lfloor x \rfloor$ für alle $x \in \mathbb{R}$ aus Beispiel 6.7 (v) hat bei $x_0 = m \in \mathbb{Z}$ die einseitigen Grenzwerte $\lim_{x \nearrow m} f(x) = m - 1$ und $\lim_{x \searrow m} f(x) = m$.
- (iii) Die Funktion $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ aus Beispiel 6.7 (vi) besitzt in keinem Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$ einen links- oder rechtsseitigen Grenzwert.
- (iv) Für die Funktion $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^{-1}$ für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gilt

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0, \quad \lim_{x \nearrow 0} f(x) = -\infty \quad \text{und} \quad \lim_{x \searrow 0} f(x) = \infty.$$

Gemäß Bemerkung 6.18 (1) existiert hier also der Grenzwert $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ nicht.

Übung 6.20 (Existenz einseitiger Grenzwerte für monotone Funktionen). Es sei $D \subset \mathbb{R}$ eine Menge und $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ monoton. Zeigen Sie, dass für jeden Häufungspunkt $x_0 \in \mathbb{R}$ von $D \cap (-\infty, x_0)$ bzw. $D \cap (x_0, \infty)$ die einseitigen Grenzwerte $\lim_{x \nearrow x_0} f(x)$ bzw. $\lim_{x \searrow x_0} f(x)$ (ggf. uneigentlich) existieren.

Übung 6.21 (Zusammenhang zwischen rechtsseitigem Grenzwert und Grenzwert bei $x \rightarrow \infty$). Es sei $D \subset \mathbb{R}$ eine nach oben unbeschränkte Menge und $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ eine Funktion. Wir definieren eine Funktion $g: \{\xi \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : \xi^{-1} \in D\} \rightarrow \mathbb{C}$ durch $g(\xi) = f(\xi^{-1})$ für $\xi \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ mit $\xi^{-1} \in D$. Zeigen Sie, dass f genau dann einen Grenzwert bei $x \rightarrow \infty$ besitzt, wenn g einen rechtsseitigen Grenzwert bei $\xi \rightarrow 0$ besitzt, mit

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{\xi \searrow 0} g(\xi).$$

6.2 Stetigkeit und elementare Eigenschaften

Wir beschäftigen uns in diesem Abschnitt mit stetigen Funktionen in einer (reellen oder komplexen) Variable. Bei solchen Funktionen führen kleine Änderungen der Variable nur zu kleinen Änderungen der Funktionswerte im folgenden Sinne:

Definition 6.22 (stetige Funktion). Es sei $D \subset \mathbb{C}$ eine Menge und $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ eine Funktion. Wir nennen f stetig in einem Punkt $z_0 \in D$, falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt mit

$$|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon \quad \text{für alle } z \in D \text{ mit } |z - z_0| < \delta.$$

Ferner nennen wir f stetig auf einer Teilmenge $D_0 \subset D$, falls f in jedem Punkt $z_0 \in D_0$ stetig ist, und wir nennen f stetig, falls f auf dem ganzen Definitionsbereich D stetig ist. Falls f nicht stetig ist, so bezeichnen wir f als unstetig.

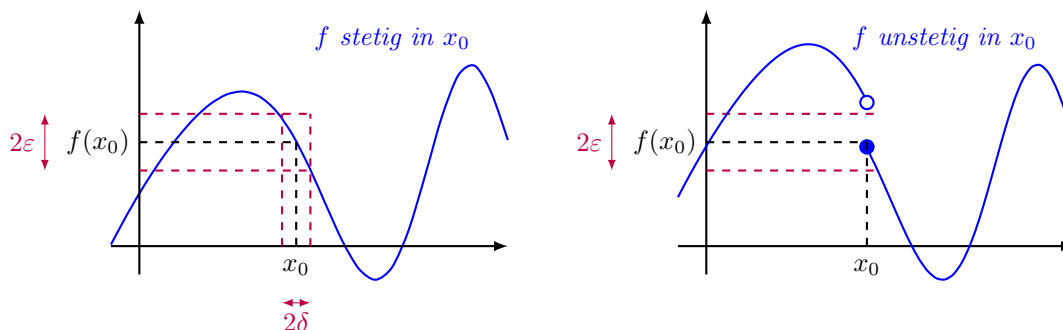
Bemerkungen 6.23. Es sei $D \subset \mathbb{C}$ eine Menge.

- (1) Vergleichen wir die Definition 6.22 der Stetigkeit mit der ε - δ -Formulierung von Grenzwerten aus Lemma 6.8 für eine Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{C}$, so gibt es zwei kleine (aber entscheidende) Unterschiede:
 - Die Existenz des Grenzwertes kann für alle Häufungspunkte von D untersucht werden, die Stetigkeit hingegen für alle Punkte aus D (beachte, dass ein Häufungspunkt von D nicht in D enthalten sein muss und dass ein Punkt aus D kein Häufungspunkt von D sein muss).
 - Ist $z_0 \in D$ ein Häufungspunkt von D , so wird für die Existenz eines Grenzwertes die Forderung $|f(z) - y| < \varepsilon$ für ein $y \in \mathbb{C}$ und alle $z \in D \setminus \{z_0\}$ mit $|z - z_0| < \delta$ gestellt, wohingegen diese Bedingung für Stetigkeit mit der konkreten Wahl $y = f(z_0)$ erfüllt sein muss.
- (2) Bei Stetigkeit handelt es sich wie bei der Existenz von Grenzwerten um eine lokale Eigenschaft (vgl. Bemerkung 6.9), d.h. die Stetigkeit oder Unstetigkeit einer Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ in einem Punkt $z_0 \in D$ hängt nur vom Verhalten von f in einer (beliebig kleinen) Kreisscheibe um z_0 ab.
- (3) Die Eigenschaft der Stetigkeit wird unter Einschränkung der Funktion erhalten, d.h. ist $D_0 \subset D$ eine Teilmenge und $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ stetig (in $z_0 \in D_0$), so ist auch die Einschränkung $f|_{D_0}: D_0 \rightarrow \mathbb{C}$, definiert über $f|_{D_0}(z) = f(z)$ für alle $z \in D_0$ (vgl. Definition 1.69), stetig (in z_0).
- (4) Eine Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ ist trivialerweise in jedem isolierten Punkt $z_0 \in D$ stetig. Wir bezeichnen $z_0 \in D$ dabei als einen isolierten Punkt in D , falls ein $\delta > 0$ mit

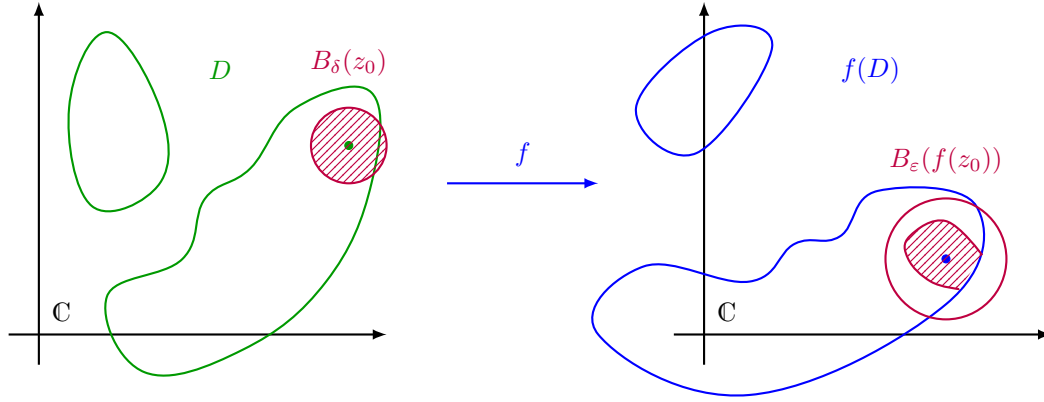
$$D \cap B_\delta(z_0) = \{z_0\}$$

existiert (oder, nach Übung 6.3 äquivalent dazu, falls z_0 kein Häufungspunkt von D ist).

- (5) Eine komplexwertige Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ ist genau dann stetig in $z_0 \in D$, wenn die beiden reellwertigen Funktionen $\operatorname{Re}(f), \operatorname{Im}(f): D \rightarrow \mathbb{R}$ des Real- und Imaginärteils von f in z_0 stetig sind.
- (6) Die Stetigkeit hat eine anschauliche geometrische Deutung: Ist $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ eine Funktion auf einem reellen Definitionsbereich $D \subset \mathbb{R}$, so muss es für Stetigkeit von f in $x_0 \in D$ für jede ε -Umgebung $\{y \in \mathbb{C}: |f(x_0) - y| < \varepsilon\}$ um den Funktionswert $f(x_0)$ ein $\delta > 0$ geben, so dass alle Funktionswerte von f für das offene Intervall $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ in dieser ε -Umgebung liegen. Für Unstetigkeit von f in $x_0 \in D$ dagegen muss es eine ε -Umgebung um $f(x_0)$ geben, die nicht alle Funktionswerte von f für $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ enthält, und zwar unabhängig davon, wie klein $\delta > 0$ gewählt wird.



Ist die Definitionsmenge $D \subset \mathbb{C}$ von f dagegen komplex, so muss es für Stetigkeit von f in $z_0 \in D$ entsprechend für jede ε -Umgebung $\{y \in \mathbb{C} : |f(z_0) - y| < \varepsilon\}$ um den Funktionswert $f(z_0)$ ein $\delta > 0$ geben, so dass alle Funktionswerte von f für die offene Kreisscheibe $B_\delta(z_0)$ in dieser ε -Umgebung liegen. Für Unstetigkeit von f in $z_0 \in D$ dagegen muss es wieder eine ε -Umgebung um $f(z_0)$ geben, die nicht alle Funktionswerte $f(B_\delta(z_0))$ enthält, unabhängig von der Wahl von $\delta > 0$.



- (7) Es sei $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ eine Funktion mit reellem Definitionsbereich $D \subset \mathbb{R}$. In diesem Fall können wir analog zur Definition 6.17 vom linksseitigen und rechtsseitigen Grenzwert auch linksseitige und rechtsseitige Stetigkeit in einem Punkt $x_0 \in D$ definieren, indem wir fordern, dass zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ für alle $x \in D \cap (-\infty, x_0)$ bzw. $x \in D \cap (x_0, \infty)$ mit $|x - x_0| < \delta$ gilt. Offensichtlich ist f genau dann stetig in $x_0 \in D$, falls f sowohl linksseitig als auch rechtsseitig stetig in x_0 ist.

Beispiele 6.24. Für einfache Funktionen $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ und einen gegebenen Punkt $z_0 \in D$ ist es möglich, direkt entweder die Stetigkeit in z_0 nachzuweisen, indem zu gegebenem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ (typischerweise in Abhängigkeit von ε und z_0) angegeben wird, so dass die Stetigkeitsbedingung aus Definition 6.22 gilt, oder die Unstetigkeit in z_0 nachzuweisen, indem ein $\varepsilon > 0$ angegeben wird, so dass die Stetigkeitsbedingung aus Definition 6.22 für alle $\delta > 0$ verletzt ist.

- (i) Jede konstante Funktion $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ mit $f(z) = y$ für alle $z \in \mathbb{C}$ und eine Konstante $y \in \mathbb{C}$ ist in jedem $z_0 \in \mathbb{C}$ stetig (für $\varepsilon > 0$ mit $\delta > 0$ beliebig).
- (ii) Die Funktion $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ mit $f(z) = z$ für alle $z \in \mathbb{C}$ ist für jedes $z_0 \in \mathbb{C}$ stetig (für $\varepsilon > 0$ mit $\delta := \varepsilon$).
- (iii) Allgemeiner ist jede Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{C}$, so dass eine Konstante $L \geq 0$ mit

$$|f(z) - f(\tilde{z})| \leq L|z - \tilde{z}| \quad \text{für alle } z, \tilde{z} \in D$$

existiert, in jedem $z_0 \in D$ stetig (für $\varepsilon > 0$ mit $\delta := \frac{\varepsilon}{L+1}$). Solche Funktionen bezeichnet man als *Lipschitz-stetig* und die Konstante L in diesem Fall als eine *Lipschitz-Konstante* von f .

- (iv) Die Funktion $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ mit $f(z) = z^2$ für $z \in \mathbb{C}$ erfüllt

$$|f(z) - f(z_0)| = |z^2 - z_0^2| = |z - z_0| \cdot |z + z_0| \leq |z - z_0| \cdot (|z - z_0| + 2|z_0|)$$

für alle $z, z_0 \in \mathbb{C}$ und ist daher in jedem $z_0 \in \mathbb{C}$ stetig (für $\varepsilon > 0$ mit $\delta = \min\{1, \frac{\varepsilon}{1+2|z_0|}\}$).

- (v) Die Wurzelfunktion $f: \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ mit $f(x) = \sqrt{x}$ für alle $x \in \mathbb{R}_0^+$ erfüllt

$$|f(x) - f(x_0)| = |\sqrt{x} - \sqrt{x_0}| \leq \sqrt{|x - x_0|}$$

für alle $x, x_0 \in \mathbb{R}_0^+$ und ist daher in jedem $x_0 \in \mathbb{R}_0^+$ stetig (für $\varepsilon > 0$ mit $\delta = \varepsilon^2$).

- (vi) Die Signumsfunktion $\text{sign}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ aus Definition 2.32 ist in jedem $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ stetig (für $\varepsilon > 0$ mit $\delta = |x_0|$), aber unstetig in $x_0 = 0$ (die Stetigkeitsbedingung ist für jedes $\varepsilon \in (0, 1)$ verletzt).
- (vii) Die Funktion $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ aus Beispiel 6.7 (vi) ist in jedem $x_0 \in \mathbb{R}$ unstetig (die Stetigkeitsbedingung ist für jedes $\varepsilon \in (0, 1)$ verletzt).

Wie für Grenzwerte von Funktionen gibt es auch für Stetigkeit mehrere äquivalente Formulierungen, von denen sich je nach Situation die eine oder die andere als nützlicher erweist.

Lemma 6.25 (äquivalente Formulierungen von Stetigkeit). *Es sei $D \subset \mathbb{C}$ eine Menge, $z_0 \in D$ und $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ eine Funktion. Dann sind äquivalent:*

- (i) ε - δ -Formulierung: f ist stetig in z_0 (gemäß Definition 6.22).
- (ii) Folgenformulierung: für jede Folge $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ in D mit $z_n \rightarrow z_0$ bei $n \rightarrow \infty$ gilt $f(z_n) \rightarrow f(z_0)$ in $\mathbb{C}$ bei $n \rightarrow \infty$.
- (iii) Grenzwertformulierung: z_0 ist ein isolierter Punkt von D oder, falls z_0 ein Häufungspunkt von D ist, der Grenzwert $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ existiert und stimmt mit $f(z_0)$ überein.

Beweis. Der Beweis des Lemmas nutzt die bereits gezeigte Äquivalenz der ε - δ -Formulierung und der Definition des Grenzwerts von Funktionen aus, siehe Lemma 6.8. Wir zeigen die Äquivalenzen über die Implikationen (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (i).

Implikation (i) $\Rightarrow$ (ii). Wir nehmen an, dass f stetig in z_0 gemäß Definition 6.22 ist. Falls z_0 kein Häufungspunkt von D ist, so gilt für eine Folge $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ in D mit $z_n \rightarrow z_0$ bei $n \rightarrow \infty$ automatisch $z_n = z_0$ für alle bis auf endlich viele $n \in \mathbb{N}$, so dass die Konvergenz $f(z_n) \rightarrow f(z_0)$ bei $n \rightarrow \infty$ trivialerweise folgt. Falls z_0 dagegen ein Häufungspunkt von D ist, so folgern wir aus der Stetigkeit von f in z_0 (in der ε - δ -Formulierung von Definition 6.22), Lemma 6.8 und Definition 6.5 des Grenzwerts einer Funktion, dass $\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n)$ in $\mathbb{C}$ existiert und gleich $f(z_0)$ ist.

Implikation (ii) $\Rightarrow$ (iii). Wir nehmen an, dass die Folgenformulierung (ii) gilt. Falls z_0 kein Häufungspunkt (also ein isolierter Punkt) von D ist, so ist nichts zu zeigen. Falls z_0 dagegen ein Häufungspunkt von D ist, so können wir uns insbesondere auf alle Folgen $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ in $D \setminus \{z_0\}$ mit $z_n \rightarrow z_0$ bei $n \rightarrow \infty$ beschränken und folgern dann aus der Definition 6.5 des Grenzwerts einer Funktion, dass $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ existiert und mit $f(z_0)$ übereinstimmt.

Implikation (iii) $\Rightarrow$ (i). Wir nehmen an, dass die Grenzwertformulierung (iii) gilt. Falls z_0 ein isolierter Punkt ist, so ist f stetig in z_0 , vgl. Bemerkung 6.23 (4). Falls z_0 dagegen ein Häufungspunkt von D ist, so folgt die ε - δ -Formulierung der Stetigkeit von f in z_0 gemäß Definition 6.22, indem wir den Grenzwert $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ mithilfe von Lemma 6.8 in die ε - δ -Formulierung (mit $y = f(z_0)$) bringen, vgl. auch Bemerkung 6.23 (1). $\square$

Bemerkung 6.26. Die Folgenformulierung der Stetigkeit bedeutet, dass bei einer stetigen Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ mit $D \subset \mathbb{C}$ die Grenzwertbildung mit der Funktionsvorschrift vertauscht werden darf, d.h. es gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} z_n\right)$$

für jede Folge $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ in D , deren Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n$ in D existiert (so dass die Funktion f dort wohldefiniert ist).

Beispiele 6.27. Der Vorteil der Folgen- und Grenzwertformulierung der Stetigkeit ist es, dass wir nur noch Grenzwerte von Folgen oder Funktionen berechnen müssen, was häufig einfacher ist, als die ε - δ -Formulierung konkret nachzuweisen.

- (i) Die Funktion $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ besitzt nach Beispiel 6.7 (vi) für kein $x_0 \in \mathbb{R}$ einen Grenzwert $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ und kann daher auch in keinem Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$ stetig sein.
- (ii) Die Exponentialreihe $\exp: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ erfüllt mit der Funktionalgleichung aus Beispiel 5.44 (ii) und

der Grenzwertberechnung aus Beispiel 6.7 (iii) für alle $z_0 \in \mathbb{C}$

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \exp(z) = \exp(z_0) \lim_{z \rightarrow z_0} \exp(z - z_0) = \exp(z_0) \lim_{z \rightarrow 0} \exp(z) = \exp(z_0).$$

Daher ist $\exp$ nach der Grenzwertformulierung der Stetigkeit in jedem $z_0 \in \mathbb{C}$ stetig.

Übung 6.28. Es sei $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ eine stetige Funktion mit der Eigenschaft $f(x^2) = f(x)$ für alle $x \in [0, 1]$. Zeigen Sie, dass f auf $[0, 1]$ konstant ist.

Für viele Funktionen braucht man die Stetigkeit nicht mithilfe der ε - δ -Formulierung gemäß Definition 6.22 oder den beiden Umformulierungen aus Lemma 6.25 nachzuweisen, sondern kann sie über die Stetigkeit elementarer Funktionen, Rechenregeln für stetige Funktionen und Stetigkeit erhaltende Operationen begründen.

Lemma 6.29 (Rechenregeln für stetige Funktionen). *Es sei $D \subset \mathbb{C}$ eine Menge, $z_0 \in D$ und es seien $f, g: D \rightarrow \mathbb{C}$ zwei Funktionen, die stetig in z_0 sind. Dann gelten die folgenden Aussagen:*

- (i) *Die Funktion $f + g: D \rightarrow \mathbb{C}$, definiert durch $(f + g)(z) := f(z) + g(z)$ für $z \in D$, ist stetig in z_0 .*
- (ii) *Die Funktion $f \cdot g: D \rightarrow \mathbb{C}$, definiert durch $(f \cdot g)(z) := f(z)g(z)$ für $z \in D$, ist stetig in z_0 .*
- (iii) *Falls $0 \notin g(D)$, so ist die Funktion $f/g: D \rightarrow \mathbb{C}$, definiert durch $f/g(z) := f(z)/g(z)$ für $z \in D$, stetig in z_0 .*

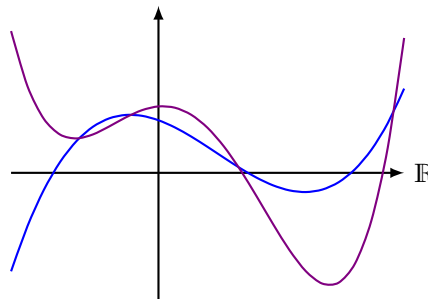
Beweis. Diese Aussagen folgen direkt aus den Rechenregeln für Grenzwerte aus Lemma 6.13 in Verbindung mit der Grenzwertformulierung der Stetigkeit aus Lemma 6.25. $\square$

Insbesondere können wir aus der Stetigkeit der konstanten Funktionen sowie der Funktion $z \mapsto z$ die Stetigkeit aller Polynomfunktionen ableiten.

Definition 6.30 (Polynomfunktion). *Eine Polynomfunktion (oder ein Polynom) ist eine Funktion $p: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ der Form*

$$p(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_N z^N \quad \text{für } z \in \mathbb{C}$$

mit Koeffizienten $a_0, a_1, \dots, a_N \in \mathbb{C}$ und ein $N \in \mathbb{N}_0$. Gilt $a_N \neq 0$, so nennen wir N den Grad der Polynomfunktion p .



Bemerkung 6.31. *Polynomfunktionen sind Potenzreihen (mit Konvergenzradius $R = \infty$), deren Koeffizienten ab einem endlichen Index verschwinden. Aus dem Identitätssatz für Potenzreihen (Korollar 5.60) folgt insbesondere, dass Polynomfunktionen eindeutig durch ihre Koeffizienten bestimmt sind. In Lemma 5.58 haben wir zudem gesehen, dass wir Potenzreihen in der Nähe des Entwicklungspunktes durch Polynomfunktionen (nämlich die Partialsummen der Potenzreihe) approximieren können.*

Wir diskutieren noch einige elementare Eigenschaften im Zusammenhang mit der Stetigkeit und Unstetigkeit von Funktionen. Manchmal ist man mit Funktionen konfrontiert, die stückweise auf einzelnen Definitionsbereichen (durch dort stetige Funktionen) definiert sind. Hier gibt es ein einfaches Kriterium dafür, ob eine solche zusammengesetzte Funktion wohldefiniert und auf dem *ganzen* Definitionsbereich stetig ist.

Lemma 6.32 (Verkleben von stetigen Funktionen). *Es seien $D_1, D_2 \subset \mathbb{C}$ zwei Mengen und $f_1: D_1 \rightarrow \mathbb{C}$, $f_2: D_2 \rightarrow \mathbb{C}$ zwei stetige Funktionen mit den Eigenschaften*

- $f_1(z) = f_2(z)$ für alle $z \in D_1 \cap D_2$,
- $\lim_{z \rightarrow z_0} f_1(z) = f_2(z_0)$ für alle Punkte $z_0 \in D_2$, die Häufungspunkte von D_1 sind,
- $\lim_{z \rightarrow z_0} f_2(z) = f_1(z_0)$ für alle Punkte $z_0 \in D_1$, die Häufungspunkte von D_2 sind.

Dann ist die zusammengesetzte Funktion $f: D_1 \cup D_2 \rightarrow \mathbb{C}$, definiert über

$$f(z) := \begin{cases} f_1(z) & \text{falls } z \in D_1, \\ f_2(z) & \text{falls } z \in D_2, \end{cases}$$

wohldefiniert und stetig auf der Menge $D_1 \cup D_2$.

Beweis. Wir überprüfen zuerst, dass die zusammengesetzte Funktion $f: D_1 \cup D_2 \rightarrow \mathbb{C}$ tatsächlich wohldefiniert ist. Für $z \in D_1 \setminus D_2$ haben wir $f(z) = f_1(z)$ und für $z \in D_2 \setminus D_1$ entsprechend $f(z) = f_2(z)$. Für die restlichen Punkte $z \in D_1 \cap D_2$ im Schnitt der Definitionsbereiche von f_1 und f_2 wird die Funktionsvorschrift für f durch die erste Annahme $f_1(z) = f_2(z)$ eindeutig.

Als Nächstes weisen wir die Stetigkeit der zusammengesetzten Funktion f in einem beliebig vorgegebenen Punkt aus $D_1 \cup D_2$ nach, und zwar ohne Einschränkung in einem Punkt $z_0 \in D_1$ (sonst vertauschen wir die Indizes bei den Definitionsbereichen und den Funktionen). Dazu verwenden wir die Folgenformulierung der Stetigkeit aus Lemma 6.25 (ii) und die Definition 6.5 des Grenzwertes einer Funktion. Es sei $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $D_1 \cup D_2$ mit $z_n \rightarrow z_0$ bei $n \rightarrow \infty$. Es können drei unterschiedliche Situationen auftreten:

- (a) Es gilt $z_n \in D_1$ und damit $f(z_n) = f_1(z_n)$ für alle $n \geq n_0$ und ein $n_0 \in \mathbb{N}$. Aus der (Folgenformulierung der) Stetigkeit von f_1 in D_1 folgt dann $\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = f_1(z_0) = f(z_0)$.
- (b) Es gilt $z_n \in D_2$ und damit $f(z_n) = f_2(z_n)$ für alle $n \geq n_0$ und ein $n_0 \in \mathbb{N}$. Entweder gilt auch $z_0 \in D_2$ und damit $\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = f_2(z_0) = f(z_0)$ gemäß der (Folgenformulierung der) Stetigkeit von f_2 in D_2 , oder aber es gilt $z_0 \notin D_2$ und damit nach der dritten Annahme des Lemmas (sowie der Definition des Grenzwertes) $\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = f_1(z_0) = f(z_0)$.
- (c) Die Folge $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ besteht aus einer Teilfolge von Punkten aus D_1 und einer Teilfolge von Punkten aus D_2 . Anhand der zuvor diskutierten Fälle (a) und (b) existiert auch in diesem Fall der Grenzwert von $\{f(z_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$, mit $\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = f(z_0)$.

Wir haben in jedem Fall also $\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = f(z_0)$. Damit ist die (Folgenformulierung der) Stetigkeit von f in z_0 nachgewiesen. $\square$

Bemerkung 6.33. Wir erläutern die Aussage des Verklebelemmas 6.32 in der einfachen Situation, dass die Funktion f aus zwei stetigen Funktionen $f_1: I_1 \rightarrow \mathbb{C}$, $f_2: I_2 \rightarrow \mathbb{C}$ zusammengesetzt ist, die jeweils auf Intervallen I_1, I_2 in $\mathbb{R}$ definiert sind. Die einzigen nicht-trivialen Situationen entstehen, wenn die Intervalle direkt aneinander stoßen (mit wahlweise offenen oder abgeschlossenen Intervallen, das mit geschweiften Klammern $\{$ bzw. $\}$ notiert wird, und Intervallgrenzen $a < m < b$):

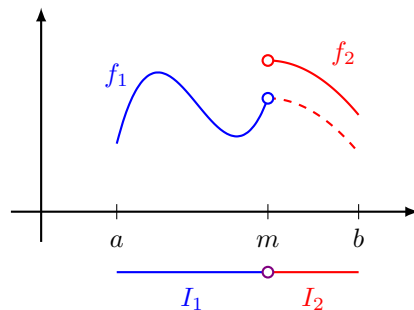
- (a) Im Fall $I_1 = \{a, m\}$ und $I_2 = [m, b\}$ brauchen wir für die Stetigkeit von f nur die Bedingung $f_1(m) = f_2(m)$ zu überprüfen, da die anderen beiden Bedingungen aus der Stetigkeit von f_1 auf I_1 bzw. von f_2 auf I_2 folgen.
- (b) Im Fall $I_1 = \{a, m)$ und $I_2 = [m, b\}$ ist der Schnitt $I_1 \cap I_2$ leer, $m \in I_2$ ist ein Häufungspunkt von I_1 und I_1 enthält keinen Häufungspunkt von I_2 . Daher gilt Stetigkeit von f genau dann, wenn $\lim_{x \nearrow m} f_1(x) = f_2(m)$ erfüllt ist.
- (c) Im Fall $I_1 = \{a, m\}$ und $I_2 = (m, b\}$ ist für die Stetigkeit von f analog zu (b) nur die Bedingung $\lim_{x \searrow m} f_2(x) = f_1(m)$ zu überprüfen.
- (d) Im Fall $I_1 = \{a, m)$ und $I_2 = (m, b\}$ stoßen zwar auch die beiden Intervalle aneinander, aber f ist wegen $m \notin I_1 \cup I_2$ unabhängig von der Existenz der Grenzwerte $\lim_{x \nearrow m} f_1(x)$ und $\lim_{x \searrow m} f_2(x)$ stetig.

Übung 6.34. Bestimmen Sie $a \in \mathbb{R}$, so dass die Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definiert durch

$$f(x) := \begin{cases} x^2 - 3 & \text{falls } x < 2, \\ -\frac{4}{x} + ax & \text{falls } x \geq 2, \end{cases}$$

stetig auf $\mathbb{R}$ ist.

Da eine Funktion in isolierten Punkten des Definitionsbereichs trivialerweise stetig ist, ist es für Stetigkeit keine notwendige Voraussetzung, dass man eine Funktion “durchzeichnen” kann. Wie auch im Fall (d) in Bemerkung 6.33 ersichtlich ist, kann es auch “Lücken” im Definitionsbereich geben, und insofern spielt es eine große Rolle, auf welchem Definitionsgebiet man eine Funktion betrachtet, um entscheiden zu können, ob eine Funktion stetig oder unstetig ist. Anders sieht es bei der Frage aus, ob man eine Funktion in einer solchen Lücke oder in einer Unstetigkeitsstelle so fortsetzen kann, dass die dadurch entstandene Funktion in diesem Punkt dann stetig ist.



Definition 6.35. Es sei $D \subset \mathbb{C}$ eine Menge und $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ eine Funktion. Wir nennen f stetig fortsetzbar in einen Punkt $z_0 \in \mathbb{C}$, falls eine Funktion $\tilde{f}: D \cup \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}$ (die stetige Fortsetzung) existiert, so dass $\tilde{f}$ stetig in z_0 ist und $f(z) = \tilde{f}(z)$ für alle $z \in D \setminus \{z_0\}$ erfüllt ist.

Bemerkung 6.36. Der Punkt $z_0 \in \mathbb{C}$ in der Definition der stetigen Fortsetzung ist ein beliebiger Punkt und muss kein Häufungspunkt von D sein.

Ist $z_0 \in \mathbb{C}$ kein Häufungspunkt des Definitionsbereichs D einer Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{C}$, so ist die Funktion $\tilde{f}: D \cup \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}$ definiert als $\tilde{f}(z) = f(z)$ für alle $z \in D \setminus \{z_0\}$ und $\tilde{f}(z_0) = y$ für ein beliebiges $y \in \mathbb{C}$ eine stetige Fortsetzung von f in den Punkt z_0 . Der interessante Fall ist daher, dass $z_0 \in \mathbb{C}$ ein Häufungspunkt von D ist, und in dieser Situation ist die stetige Fortsetzung in z_0 eindeutig, falls sie überhaupt existiert.

Satz 6.37 (Eindeutigkeit der stetigen Fortsetzung). Es sei $D \subset \mathbb{C}$ eine Menge, $z_0 \in \mathbb{C}$ ein Häufungspunkt von D und $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ eine Funktion. Dann existiert höchstens eine stetige Fortsetzung von f in den Punkt z_0 .

Beweis. Jede stetige Fortsetzung $\tilde{f}$ von f in den Punkt z_0 stimmt auf der Menge $D \setminus \{z_0\}$ mit der Funktion f überein. Aus diesem Grund hängt die (Existenz und) Eindeutigkeit der stetigen Fortsetzung nur von (der Möglichkeit) einer geeigneten Wahl von $\tilde{f}(z_0)$ ab. Da z_0 nach Voraussetzung ein Häufungspunkt von D ist, muss für die Existenz der stetigen Fortsetzung in den Punkt z_0 der Grenzwert $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ existieren (nach der Grenzwertformulierung von Stetigkeit aus Lemma 6.25). In diesem Fall muss für die stetige Fortsetzung dann notwendigerweise $\tilde{f}(z_0) := \lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ gewählt werden, so dass die Eindeutigkeit der stetigen Fortsetzung gezeigt ist. $\square$

Übung 6.38. Überprüfen Sie, ob die Funktion $f: \mathbb{R} \setminus \{3\} \rightarrow \mathbb{R}$, definiert durch

$$f(x) := \begin{cases} (x-1)^2 & \text{falls } x < 3, \\ 2x - \lfloor x \rfloor & \text{falls } x > 3, \end{cases}$$

in den Punkt $x_0 = 3$ stetig fortsetzbar ist.

Als Nächstes überlegen wir uns, dass die Stetigkeit von Funktionen unter der Operation der Verkettung erhalten bleibt.

Satz 6.39 (Verkettung stetiger Funktionen). Es seien $D, E \subset \mathbb{C}$ zwei Mengen und $f: D \rightarrow \mathbb{C}$, $g: E \rightarrow \mathbb{C}$ zwei Funktionen mit $f(D) \subset E$. Ist $z_0 \in D$ ein Punkt, so dass f stetig in z_0 und g stetig in $f(z_0) \in E$ ist, so ist auch die Verkettung $g \circ f: D \rightarrow \mathbb{C}$, definiert über $g \circ f(z) = g(f(z))$ für alle $z \in D$ (vgl. Definition 1.61), stetig in z_0 .

Beweis. Wir geben zwei Beweise dieser Aussage und nutzen dafür einmal die Definition der Stetigkeit mit der ε - δ -Formulierung und einmal die dazu äquivalente Folgenformulierung aus Lemma 6.25 (ii).

Beweis über die ε - δ -Formulierung der Stetigkeit. Es sei $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben. Wegen der Stetigkeit von g in $f(z_0)$ wählen wir zunächst ein $\tilde{\varepsilon} > 0$ mit

$$|g(y) - g(f(z_0))| < \varepsilon \quad \text{für alle } y \in E \text{ mit } |y - f(z_0)| < \tilde{\varepsilon}.$$

Wegen der Stetigkeit von f in z_0 wählen wir zu diesem $\tilde{\varepsilon} > 0$ dann ein $\delta > 0$ mit

$$|f(z) - f(z_0)| < \tilde{\varepsilon} \quad \text{für alle } z \in D \text{ mit } |z - z_0| < \delta.$$

Betrachten wir ein beliebiges $z \in D$ mit $|z - z_0| < \delta$, so haben wir $|f(z) - f(z_0)| < \tilde{\varepsilon}$ und folgern dann aus der oberen Bedingung mit $y = f(z)$

$$|g \circ f(z) - g \circ f(z_0)| = |g(f(z)) - g(f(z_0))| < \varepsilon.$$

Beweis über die Folgenformulierung der Stetigkeit. Es sei $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine beliebige Folge in D mit $z_n \rightarrow z_0$ bei $n \rightarrow \infty$. Wegen der Folgenformulierung der Stetigkeit von f in z_0 gilt dann

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = f(z_0).$$

Nutzen wir nun die Folgenformulierung der Stetigkeit von g in $f(z_0)$ für die Folge $\{f(z_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$, so erhalten wir insgesamt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g \circ f(z_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} g(f(z_n)) = g(f(z_0)) = g \circ f(z_0). \quad \square$$

Bemerkung 6.40 (Klassifikation von Unstetigkeitsstellen). *Es gibt unterschiedliche Arten von Unstetigkeitsstellen für reellwertige Funktionen $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ mit reellem Definitionsbereich $D \subset \mathbb{R}$. Im Wesentlichen unterscheidet man, ob die einseitigen Grenzwerte für einen Punkt $x_0 \in D$ (ggf. uneigentlich) existieren und ob sie in diesem Fall übereinstimmen.*

- (1) Hebbare Unstetigkeitsstelle: die Funktion f besitzt einen Grenzwert $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ und kann daher in die Unstetigkeitsstelle stetig fortgesetzt werden (wie etwa die Funktion f aus Beispiel 6.7 (iv) mit $f(0) = 0$ und $f(x) = 1$ für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ in $x_0 = 0$).
- (2) Endliche Sprungstelle: die Funktion f hat einseitige Grenzwerte $\lim_{x \nearrow x_0} f(x)$ und $\lim_{x \searrow x_0} f(x)$ in $\mathbb{R}$, jedoch stimmen diese nicht überein (wie etwa bei der Funktion $f = \text{sign}$ und $x_0 = 0$).
- (3) Unendlichkeitsstelle: die Funktion f hat einseitige Grenzwerte $\lim_{x \nearrow x_0} f(x)$ und $\lim_{x \searrow x_0} f(x)$, aber mindestens einer davon ist uneigentlich (wie etwa bei der Funktion f mit $f(x) = x^{-1}$ für $x > 0$, $f(x) = 0$ für $x \leq 0$ und $x_0 = 0$).
- (4) Oszillationsstelle: für die Funktion f existiert mindestens ein einseitiger Grenzwert $\lim_{x \nearrow x_0} f(x)$ oder $\lim_{x \searrow x_0} f(x)$ weder eigentlich noch uneigentlich (wie etwa für die Funktion $f = \mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ aus Beispiel 6.7 (vi) und jedes $x_0 \in \mathbb{R}$).

Mit der Funktion $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ haben wir eine Funktion auf $\mathbb{R}$ kennengelernt, die in jedem Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$ und damit auf einer überabzählbaren Menge unstetig ist. Für monotone Funktionen kann es dagegen höchstens abzählbar viele Unstetigkeitsstellen geben (und diese sind alle endliche Sprungstellen wie in Bemerkung 6.40 (2) beschrieben).

Satz 6.41 (Unstetigkeitsstellen für monotone Funktionen). *Es sei $D \subset \mathbb{R}$ eine Menge und $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ eine monotone Funktion. Dann ist f in höchstens abzählbar vielen Punkten in D unstetig.*

★ *Beweis.* Ohne Einschränkung dürfen wir annehmen, dass die Funktion f monoton wächst.

Wir halten fest, dass wegen der Annahme der Monotonie der linksseitige Grenzwert $\lim_{x \nearrow x_0} f(x)$ für jeden Häufungspunkt $x_0 \in \mathbb{R}$ von $D \cap (-\infty, x_0)$ und der rechtsseitige Grenzwert $\lim_{x \searrow x_0} f(x)$ für jeden Häufungspunkt von $D \cap (x_0, \infty)$ existiert (siehe Übung 4.63).

Nach der Grenzwertformulierung von Stetigkeit können nur die folgenden unterschiedlichen Situationen bei einer Unstetigkeitsstelle $x_0 \in D$ auftreten (die nach Bemerkung 6.23 (4) auf alle Fälle ein Häufungspunkt von D ist) und wir jeweils eine rationale Zahl $r(x_0) \in \mathbb{Q}$ mit der Unstetigkeitsstelle assoziieren:

- (a) x_0 ist ein Häufungspunkt von $D \cap (-\infty, x_0)$, aber nicht von $D \cap (x_0, \infty)$, mit

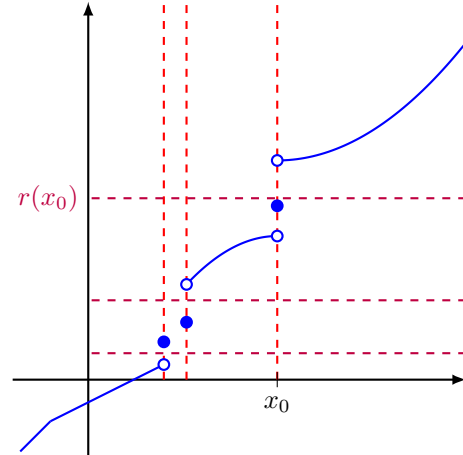
$$\lim_{x \nearrow x_0} f(x) < r(x_0) < f(x_0).$$

- (b) x_0 ist ein Häufungspunkt von $D \cap (x_0, \infty)$, aber nicht von $D \cap (-\infty, x_0)$, mit

$$f(x_0) < r(x_0) < \lim_{x \searrow x_0} f(x).$$

- (c) x_0 ist ein Häufungspunkt sowohl von $D \cap (-\infty, x_0)$ also auch von $D \cap (x_0, \infty)$, mit

$$\lim_{x \nearrow x_0} f(x) < r(x_0) < \lim_{x \searrow x_0} f(x).$$



Insgesamt erhalten wir durch diese Zuordnung eine Abbildung

$$r: \{x_0 \in D: x_0 \text{ ist eine Unstetigkeitsstelle}\} \rightarrow \mathbb{Q},$$

die nach Konstruktion injektiv und strikt monoton wachsend ist. Da die Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen abzählbar ist, folgt mit Bemerkung 2.71 (4) (angewandt auf die Umkehrfunktion r^{-1}), dass die Menge der Unstetigkeitsstellen von f in D endlich oder abzählbar, also höchstens abzählbar ist. $\square$

Übung 6.42. Geben Sie eine streng monotone Funktion mit abzählbar vielen Sprungstellen an.

6.3 Stetige Funktionen in Grenzprozessen

Viele Funktionen werden über Grenzprozesse definiert (wie etwa die Exponentialfunktion in Beispiel 5.30 über die Potenzreihendarstellung, also eine Folge von Polynomfunktionen). Daher betrachten wir nun Folgen von reell- oder komplexwertigen Funktionen (anstelle von Folgen von reellen oder komplexen Zahlen wie bisher) und führen hierfür zunächst zwei unterschiedliche Konvergenzbegriffe ein. Anschließend gehen wir der Frage nach, unter welcher dieser Konvergenzarten sich für eine Folge von Funktionen die Stetigkeit der Folgenglieder auf die Grenzfunktion überträgt. Die Anwendung dieser Erkenntnisse liefert schließlich insbesondere die Stetigkeit von Potenzreihenfunktionen auf dem (offenen) Konvergenzkreis.

Definition 6.43 (punktweise und gleichmäßige Konvergenz). *Es sei $D \subset \mathbb{C}$ eine Menge und $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Funktionen mit $f_n: D \rightarrow \mathbb{C}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.*

- (i) *Wir sagen, dass die Folge $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ punktweise (auf D) konvergiert, falls für jedes $z \in D$ der Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z)$ existiert. In diesem Fall nennen wir die durch*

$$f(z) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z) \quad \text{für } z \in D$$

definierte Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ den punktweisen Limes von $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ und schreiben auch

$$f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n \quad \text{oder } f_n \rightarrow f \text{ bei } n \rightarrow \infty \quad \text{punktweise auf } D.$$

- (ii) *Wir sagen, dass die Folge $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ gleichmäßig (auf D) gegen eine Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ konvergiert, falls*

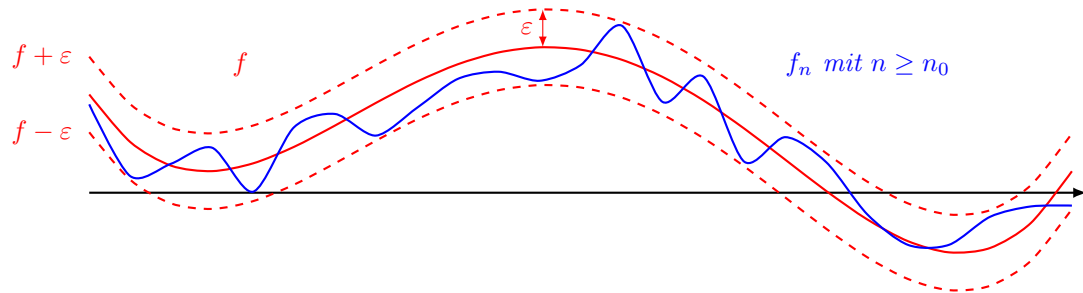
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sup_{z \in D} |f_n(z) - f(z)| \right) = 0$$

gilt. In diesem Fall nennen wir f den gleichmäßigen Limes von $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ und schreiben auch

$$f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n \text{ oder } f_n \rightarrow f \text{ bei } n \rightarrow \infty \text{ gleichmäßig auf } D.$$

Bemerkungen 6.44.

- (1) Bei *punktweiser Konvergenz* betrachtet man jeden Punkt $z \in D$ einzeln und fordert, dass die Folge $\{|f_n(z) - f(z)|\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine Nullfolge bildet. Damit ist insbesondere erlaubt, dass die Folgen $\{|f_n(z) - f(z)|\}_{n \in \mathbb{N}}$ und $\{|f_n(\tilde{z}) - f(\tilde{z})|\}_{n \in \mathbb{N}}$ für unterschiedliche Punkte $z, \tilde{z}$ unterschiedlich schnell gegen 0 konvergieren. Im Gegensatz dazu muss bei *gleichmäßiger Konvergenz* sogar die Folge $\{\sup_{z \in D} |f_n(z) - f(z)|\}_{n \in \mathbb{N}}$ der Suprema dieser Abstände über dem ganzen Definitionsbereich eine Nullfolge bilden. Damit impliziert gleichmäßige Konvergenz insbesondere auch punktweise Konvergenz, aber es gilt nicht die Umkehrung (siehe Beispiel 6.45), da für gleichmäßige Konvergenz die Folge $\{|f_n(z) - f(z)|\}_{n \in \mathbb{N}}$ für alle $z \in D$ durch eine (nicht vom Punkt z abhängige) Nullfolge als Majorante beschränkt werden muss. Dies bedeutet nichts anderes, als dass es zu jedem $\varepsilon > 0$ einen Folgenindex $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so dass die komplette Funktion f_n für $n \geq n_0$ in einem ε -Schlauch um die Grenzfunktion f liegt.



- (2) Wegen der Eindeutigkeit der Grenzwerte von Folgen ist klar, dass bei *punktweiser* und damit auch bei *gleichmäßiger Konvergenz* einer Folge $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ von Funktionen die Limesfunktion f eindeutig bestimmt ist, falls sie existiert.

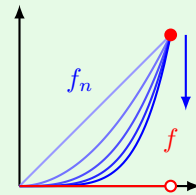
Beispiele 6.45.

- (i) Es sei $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ die Folge von Funktionen auf dem Intervall $[0, 1]$ mit

$$f_n(x) := x^n \quad \text{für alle } x \in [0, 1] \text{ und } n \in \mathbb{N}.$$

Da die Folge $\{x^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ für alle $x \in [0, 1)$ gegen 0 konvergiert und für $x = 1$ konstant gleich 1 ist, gilt *punktweise Konvergenz* der Folge $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ von Funktionen gegen die (unstetige) Funktion $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) := \begin{cases} 0 & \text{für } x \in [0, 1), \\ 1 & \text{für } x = 1. \end{cases}$$



Betrachten wir nun die Auswertung der Funktion f_n im Punkt $\sqrt[n]{2-1} \in (0, 1)$, erhalten wir

$$\sup_{x \in [0, 1]} |f_n(x) - f(x)| \geq f_n(\sqrt[n]{2-1}) = \frac{1}{2} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Folglich liegt *keine gleichmäßige Konvergenz* von $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ vor.

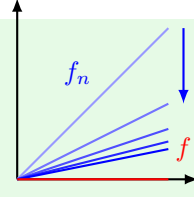
- (ii) Es sei $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ die Folge von Funktionen auf dem Intervall $[0, 1]$ mit

$$f_n(x) := \frac{x}{n} \quad \text{für alle } x \in [0, 1] \text{ und } n \in \mathbb{N}.$$

Wegen

$$\sup_{x \in [0, 1]} |f_n(x)| = |f_n(1)| = \frac{1}{n} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

gilt (punktweise und) *gleichmäßige Konvergenz* gegen die Funktion $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = 0$ für alle $x \in [0, 1]$.



- (iii) Betrachten wir die Folge $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ von Funktionen aus (ii) auf dem Definitionsbereich $\mathbb{R}$ anstelle von $[0, 1]$ so liegt immer noch *punktweise Konvergenz* gegen die Funktion $f \equiv 0$ vor, jedoch gilt hier *keine gleichmäßige Konvergenz*, da $\sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x)| \geq |f_n(n)| = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

- (iv) Es sei $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ die Folge von Funktionen auf dem Intervall $[0, 1]$ mit

$$f_n(x) := \begin{cases} 2nx & \text{für } x \in [0, \frac{1}{2n}), \\ 2 - 2nx & \text{für } x \in (\frac{1}{2n}, \frac{1}{n}], \\ 0 & \text{für } x \in (\frac{1}{n}, 1], \end{cases}$$

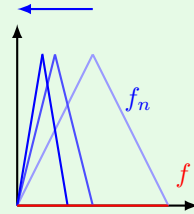
für $n \in \mathbb{N}$. Ist $x \in (0, 1]$ beliebig, so gilt für $n_0 := \lfloor x^{-1} \rfloor + 1$

$$f_n(x) = 0 \quad \text{für alle } n \geq n_0,$$

wohingegen $f_n(0) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Somit haben wir *punktweise Konvergenz* der Folge $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ von Funktionen gegen $f \equiv 0$. Werten wir die Funktion f_n im Punkt $\frac{1}{2n} \in (0, 1)$ aus, erhalten wir

$$\sup_{x \in [0, 1]} |f_n(x)| \geq f_n((2n)^{-1}) = 1 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N},$$

so dass *keine gleichmäßige Konvergenz* von $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ vorliegt.



Übung 6.46. Untersuchen Sie die Folgen $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ und $\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ von Funktionen auf dem Intervall $[0, 1]$ definiert über

$$f_n(x) := x \cdot (1 - x)^n \quad \text{und} \quad g_n(x) := x^n \cdot (1 - x^n) \quad \text{für alle } x \in [0, 1] \text{ und } n \in \mathbb{N}$$

auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz.

In der Definition der gleichmäßigen Konvergenz spielt das Supremum des Betrags einer Funktion die entscheidende Rolle, wofür wir einige einfache Eigenschaften festhalten.

Definition 6.47 (Supremumsnorm). *Es sei $D \subset \mathbb{C}$ eine nicht-leere Menge. Wir bezeichnen die Abbildung $\| \cdot \|_D$, die auf der Menge aller beschränkten Funktionen auf D über*

$$\|g\|_D := \sup_{z \in D} |g(z)| \quad \text{für jede beschränkte Funktion } g: D \rightarrow \mathbb{C}$$

definiert ist, als die Supremumsnorm auf D .

Lemma 6.48 (einfache Eigenschaften der Supremumsnorm). *Es sei $D \subset \mathbb{C}$ eine nicht-leere Menge. Die Supremumsnorm $\| \cdot \|_D$ erfüllt die folgenden Eigenschaften einer sogenannten Norm*

- (N1) Dreiecksungleichung: $\|g + \tilde{g}\|_D \leq \|g\|_D + \|\tilde{g}\|_D$ für alle beschränkten Funktionen $g, \tilde{g}: D \rightarrow \mathbb{C}$,
- (N2) absolute Homogenität: $\|\lambda g\|_D = |\lambda| \cdot \|g\|_D$ für alle beschränkten Funktionen $g: D \rightarrow \mathbb{C}$ und alle Konstanten $\lambda \in \mathbb{C}$,
- (N3) Positivität: $\|g\|_D \geq 0$ für alle beschränkten Funktionen $g: D \rightarrow \mathbb{C}$ mit $\|g\|_D = 0$ genau dann, wenn $g \equiv 0$ gilt.

Beweis. Im Folgenden seien $g, \tilde{g}: D \rightarrow \mathbb{C}$ beschränkte Funktionen. Für jedes $z \in D$ schließen wir aus der Dreiecksungleichung für komplexe Zahlen und der Definition der Supremumsnorm zunächst

$$|g(z) + \tilde{g}(z)| \leq |g(z)| + |\tilde{g}(z)| \leq \|g\|_D + \|\tilde{g}\|_D.$$

Bilden wir das Supremum über alle $z \in D$ auf der linken Seite, so ergibt sich die Dreiecksungleichung (N1).

Ähnlich sehen wir für $\lambda \in \mathbb{C}$

$$|\lambda g(z)| = |\lambda| \cdot |g(z)| \leq |\lambda| \cdot \|g\|_D$$

für jedes $z \in D$, so dass $\|g\|_D \leq |\lambda| \cdot \|g\|_D$ folgt. Ist $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben, so finden wir ein $z \in D$ mit $|g(z)| \geq \|g\|_D - \frac{\varepsilon}{1+|\lambda|}$ und folglich mit $|\lambda g(z)| \geq |\lambda| \|g\|_D - \varepsilon$. Damit folgt wegen der Beliebigkeit von $\varepsilon > 0$ auch die umgekehrte Ungleichung $\|g\|_D \geq |\lambda| \cdot \|g\|_D$ und schließlich die absolute Homogenität (N2).

Nach Definition der Supremumsnorm über den Betrag muss $\|g\|_D \geq 0$ gelten. Ist $\|g\|_D = 0$, so haben wir daher $|g(z)| = 0$ für alle $z \in D$, woraus wir über Lemma 2.33 (iv) sofort $g(z) = 0$ für alle $z \in D$ erhalten. Ist umgekehrt $g \equiv 0$, so folgt $|g(z)| = 0$ für alle $z \in D$ und damit $\|g\|_D = 0$. Damit ist auch die Positivität (N3) gezeigt. $\square$

Übung 6.49 (Rechenregeln für gleichmäßig konvergente Folgen von Funktionen). Es sei $D \subset \mathbb{C}$ eine nicht-leere Menge und es seien $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}, \{g_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ zwei Folgen von Funktionen mit $f_n, g_n: D \rightarrow \mathbb{C}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, die gleichmäßig gegen Funktionen f bzw. $g: D \rightarrow \mathbb{C}$ konvergieren.

- (i) Zeigen Sie, dass die Folge $\{f_n + g_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ von Funktionen gleichmäßig gegen $f + g$ konvergiert.
- (ii) Zeigen Sie, dass die Folge $\{f_n \cdot g_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ von Funktionen gleichmäßig gegen $f \cdot g$ konvergiert, falls f, g auf D beschränkt sind.
- (iii) Überlegen Sie sich anhand eines Beispiels, dass die Voraussetzung der Beschränktheit an f und g auf D für die Folgerung der gleichmäßigen Konvergenz in (ii) im Allgemeinen notwendig ist.

Da die gleichmäßige Konvergenz einer Folge von Funktionen über die Konvergenz einer Folge von Zahlen beschrieben ist und wir diese Konvergenz äquivalent über das Cauchy Kriterium (siehe Satz 4.69) ausdrücken können, erhalten wir:

Lemma 6.50 (äquivalente Formulierungen gleichmäßiger Konvergenz). *Es sei $D \subset \mathbb{C}$ eine nicht-leere Menge, $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Funktionen mit $f_n: D \rightarrow \mathbb{C}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ eine Funktion. Dann sind äquivalent:*

- (i) Folgenformulierung: $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert gleichmäßig gegen f (gemäß Definition 6.43), d.h. für jedes $\varepsilon > 0$ existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft

$$\|f_n - f\|_D = \sup_{z \in D} |f_n(z) - f(z)| < \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq n_0;$$

- (ii) Cauchy-Kriterium: $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ist eine gleichmäßige Cauchy-Folge auf D , d.h. für jedes $\varepsilon > 0$ existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft

$$\|f_n - f_m\|_D = \sup_{z \in D} |f_n(z) - f_m(z)| < \varepsilon \quad \text{für alle } m, n \geq n_0,$$

und der Grenzwert $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ ist gegeben durch $f(z) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z)$ für alle $z \in D$.

Beweis. Wir zeigen die Implikationen (i) $\Rightarrow$ (ii) und (ii) $\Rightarrow$ (i).

Implikation (i) $\Rightarrow$ (ii). Falls die Folge $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ von Funktionen gleichmäßig gegen f konvergiert, so können wir nach (i) zu einem beliebig vorgegebenen $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ wählen, so dass

$$\|f_n - f\|_D = \sup_{z \in D} |f_n(z) - f(z)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{für alle } n \geq n_0$$

gilt. Mit der Dreiecksungleichung für die Supremumsnorm aus Lemma 6.48 folgt dann die gewünschte Cauchy-Eigenschaft

$$\|f_n - f_m\|_D \leq \|f_n - f\|_D + \|f_m - f\|_D < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad \text{für alle } m, n \geq n_0.$$

Implikation (ii) $\Rightarrow$ (i). Aus der Cauchy-Eigenschaft in (ii) schließen wir zunächst, dass die Folge $\{f_n(z)\}_{n \in \mathbb{N}}$ für jedes $z \in D$ eine Cauchy-Folge in $\mathbb{C}$ ist und damit konvergiert. Zu einem beliebig vorgegebenen $\varepsilon > 0$ wählen wir dann entsprechend der Cauchy-Bedingung ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$\|f_n - f_m\|_D = \sup_{z \in D} |f_n(z) - f_m(z)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{für alle } m, n \geq n_0.$$

Mit dem Vergleichskriterium für konvergente Folge aus Übung 4.18 (ii) (angewandt auf die Folge $\{\sup_{z \in D} |f_n(z) - f_m(z)|\}_{m \in \mathbb{N}}$ für festes $n \in \mathbb{N}$ und den Grenzübergang $m \rightarrow \infty$) erhalten wir dann

$$\|f_n - f\|_D = \sup_{z \in D} |f_n(z) - f(z)| \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{für alle } n \geq n_0.$$

Das ist genau die gewünschte Folgenformulierung der gleichmäßigen Konvergenz aus (i). $\square$

Wir kehren nun zur Ausgangsfrage dieses Unterkapitels zurück, welche Voraussetzungen sicherstellen, dass sich die Stetigkeit einer konvergenten Folge von Funktionen auf die Grenzfunktion überträgt. Wir zeigen nun, dass gleichmäßige Konvergenz ausreichend ist:

Satz 6.51 (gleichmäßiger Limes stetiger Funktionen). *Es sei $D \subset \mathbb{C}$ eine nicht-leere Menge und $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von stetigen Funktionen mit $f_n: D \rightarrow \mathbb{C}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, die gleichmäßig gegen eine Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ konvergiert. Dann ist f stetig auf D .*

Beweis. Es sei $z_0 \in D$ ein beliebig vorgegebener Punkt. Um die Stetigkeit von f in z_0 in der ε - δ -Formulierung zu zeigen, sei nun $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben. Aufgrund der gleichmäßigen Konvergenz der Folge $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ von Funktionen auf D können wir ein $n_0 \in \mathbb{N}$ wählen mit

$$\|f_{n_0} - f\|_D = \sup_{z \in D} |f_{n_0}(z) - f(z)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

(was bedeutet, dass die Funktion f_{n_0} die Grenzfunktion f an *jeder* Stelle $z \in D$ bis auf einen Fehler von $\frac{\varepsilon}{3}$ approximiert). Da f_{n_0} nach Voraussetzung eine stetige Funktion auf D (und damit insbesondere in z_0) ist, bestimmen wir nun ein $\delta > 0$ mit

$$|f_{n_0}(z) - f_{n_0}(z_0)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{für alle } z \in D \text{ mit } |z - z_0| < \delta.$$

Mit der Dreiecksungleichung folgt aus diesen beiden Abschätzungen dann

$$\begin{aligned} |f(z) - f(z_0)| &\leq |f(z) - f_{n_0}(z)| + |f_{n_0}(z) - f_{n_0}(z_0)| + |f_{n_0}(z_0) - f(z_0)| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon, \end{aligned}$$

also die Stetigkeit von f in z_0 . Da $z_0 \in D$ beliebig war, haben wir somit die Stetigkeit der Grenzfunktion f auf D gezeigt. $\square$

Bemerkung 6.52.

- (1) Satz 6.51 zeigt also, dass die gleichmäßige Konvergenz einer Folge von stetigen Funktionen eine hinreichende Bedingung für die Stetigkeit der Limesfunktion ist. Es ist jedoch keine notwendige Bedingung, wie man sich anhand von Beispiel 6.45 (iv) klarmachen kann.
- (2) Insbesondere können wir damit aus der Unstetigkeit der Grenzfunktion einer Folge von stetigen Funktionen schließen, dass die Konvergenz nicht gleichmäßig sein kann.

- (3) *Punktweise Konvergenz ist im Allgemeinen nicht ausreichend für die Stetigkeit der Grenzfunktion, wie wir in Beispiel 6.45 (i) gesehen haben.*

Als direkte Folgerung von Satz 6.51 erhalten wir, dass der Raum aller beschränkten, stetigen Funktionen auf einer Menge D abgeschlossen ist unter gleichmäßiger Konvergenz, also dass die Limesfunktion einer gleichmäßig konvergenten Folge von beschränkten, stetigen Funktionen wieder beschränkt und stetig ist.

Korollar 6.53. *Es sei $D \subset \mathbb{C}$ eine nicht-leere Menge. Falls $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine gleichmäßige Cauchy-Folge auf D im Sinne von Lemma 6.50 darstellt und $f_n: D \rightarrow \mathbb{C}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ beschränkte, stetige Funktionen sind, so konvergiert $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen eine beschränkte, stetige Funktion.*

Beweis. Wir bemerken zunächst, dass nach dem Cauchy-Kriterium aus Lemma 6.50 gleichmäßige Konvergenz gegen eine Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ gilt. Daher finden wir für $\varepsilon = 1$ zunächst ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$\|f_{n_0} - f\|_D = \sup_{z \in D} |f_{n_0}(z) - f(z)| < 1.$$

Aus der Dreiecksungleichung für die Supremumsnorm ergibt sich dann

$$\|f\|_D \leq \|f_{n_0}\|_D + \|f_{n_0} - f\|_D < \|f_{n_0}\|_D + 1,$$

so dass die Beschränktheit von f direkt aus der Beschränktheit von f_{n_0} folgt. Des Weiteren schließen wir aus der Stetigkeit der Funktionen $f_n: D \rightarrow \mathbb{C}$ über Satz 6.51 und die gleichmäßige Konvergenz der Folge $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ direkt auf die Stetigkeit von f auf D . $\square$

Bemerkung 6.54. *Die Aussage von Korollar 6.53 zur Konvergenz aller gleichmäßigen Cauchy-Folgen im Raum der beschränkten, stetigen Funktionen kann man als Analogon zur Konvergenz aller Cauchy-Folgen in der Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen verstehen, was wiederum einen direkten Zusammenhang mit der Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ hat. Dementsprechend bezeichnet man das Resultat in Korollar 6.53 auch als die Vollständigkeit der beschränkten, stetigen Funktionen bzgl. der Konvergenz in der Supremumsnorm.*

Mithilfe von Satz 6.51 wollen wir als Nächstes zeigen, dass Potenzreihenfunktionen auf dem (offenen) Konvergenzkreis stetig sind. Als Vorbereitung zeigen wir, dass man Potenzreihen durch die Polynome, die durch ihre Partialsummen gegeben sind, gleichmäßig approximieren kann:

Satz 6.55 (Konvergenzkriterium von Weierstraß). *Es sei $D \subset \mathbb{C}$ eine nicht-leere Menge und $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}_0}$ eine Folge von beschränkten Funktionen mit $f_k: D \rightarrow \mathbb{C}$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$. Falls $\sum_{k=0}^{\infty} \|f_k\|_D < \infty$ gilt, dann konvergiert die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ (d.h. die Folge ihrer Partialsummen) gleichmäßig auf D .*

Beweis. Wir bemerken zunächst, dass die Konvergenz der Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(z)$ für jedes $z \in D$ bereits über das Majorantenkriterium sichergestellt ist und damit nur noch die Gleichmäßigkeit der Konvergenz zu zeigen ist. Es sei $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben. Wegen der Konvergenz von $\sum_{k=0}^{\infty} \|f_k\|_D$ finden wir ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$\left| \sum_{k=0}^{n_0} \|f_k\|_D - \sum_{k=0}^{\infty} \|f_k\|_D \right| = \sum_{k=n_0+1}^{\infty} \|f_k\|_D < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Damit gilt für jedes $z \in D$ und jedes $n \geq n_0$

$$\left| \sum_{k=0}^n f_k(z) - \sum_{k=0}^{\infty} f_k(z) \right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |f_k(z)| \leq \sum_{k=n_0+1}^{\infty} \|f_k\|_D < \frac{\varepsilon}{2},$$

woraus wir auf

$$\sup_{z \in D} \left| \sum_{k=0}^n f_k(z) - \sum_{k=0}^{\infty} f_k(z) \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq n_0$$

schließen. Damit haben wir die gleichmäßige Konvergenz der Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ auf D gezeigt. $\square$

Satz 6.56 (Stetigkeit der Potenzreihenfunktion). *Es sei $P(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k$ eine Potenzreihenfunktion mit komplexen Koeffizienten $\{a_k\}_{k \in \mathbb{N}_0}$, einem Entwicklungspunkt $z_0 \in \mathbb{C}$ und positivem Konvergenzradius $R \in (0, \infty]$. Dann gilt für die Potenzreihenfunktion P die gleichmäßige Konvergenz auf $B_r(z_0)$ für jedes $r \in (0, R)$ sowie die Stetigkeit auf $B_R(z_0)$.*

Beweis. Es sei $r \in (0, R)$ beliebig vorgegeben. Für jedes $k \in \mathbb{N}_0$ betrachten wir

$$f_k(z) := a_k(z - z_0)^k \quad \text{für } z \in B_r(z_0),$$

mit $\|f_k\|_{B_r(z_0)} \leq |a_k| r^k$. Aus der absoluten Konvergenz der Potenzreihe in $B_R(z_0)$ folgern wir

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|f_k\|_{B_r(z_0)} \leq \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| r^k < \infty$$

Die gleichmäßige Konvergenz von $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(z)$ auf $B_r(z_0)$ folgt nun unmittelbar aus Satz 6.55.

Wir bemerken als Nächstes, dass die Partialsummen $z \mapsto \sum_{k=0}^n a_k(z - z_0)^k$ für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ auf $\mathbb{C}$ stetig sind. Es sei $r \in (0, R)$ beliebig. Da die Partialsummen wie eben gezeigt auf $B_r(z_0)$ gleichmäßig konvergieren, folgt die Stetigkeit von P auf $B_r(z_0)$ aus Satz 6.51. Da $r \in (0, R)$ beliebig war, haben wir damit die Stetigkeit von P auf dem ganzen Konvergenzkreis $B_R(z_0)$ gezeigt. $\square$

Bemerkung 6.57. Satz 6.56 zeigt insbesondere, dass die Exponentialreihe $\exp$ aus Beispiel 5.30 auf ganz $\mathbb{C}$ stetig ist.

Abschließend stellen wir noch eine Aussage zum Verhalten von Potenzreihenfunktionen vor, die an einem Randpunkt des Konvergenzkreises konvergieren. In der einfachsten Situation (mit Entwicklungspunkt $z_0 = 0$, Konvergenzradius R und Konvergenz bei $z = R$) haben wir:

Satz 6.58 (Abelscher Grenzwertsatz). *Es sei $P(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ eine Potenzreihenfunktion mit komplexen Koeffizienten $\{a_k\}_{k \in \mathbb{N}_0}$ und Konvergenzradius $R \in (0, \infty)$, die für $z = R$ konvergiert. Dann stellt P auf dem Intervall $(-R, R]$ eine stetige Funktion dar.*

★ *Beweis.* Aufgrund von Satz 6.56 wissen wir bereits, dass P auf dem offenen Intervall $(-R, R)$ eine stetige Funktion darstellt, und wir müssen daher nach der Grenzwertformulierung der Stetigkeit nur noch

$$\lim_{r \nearrow R} P(r) = P(R) \tag{6.1}$$

zeigen. Dazu betrachten wir ein beliebiges $r \in [0, R)$ und schreiben die Reihe $P(r)$ zunächst über eine geometrische Reihe und Satz 5.42 zur Konvergenz des Cauchy-Produkts um zu

$$\begin{aligned} P(r) &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k r^k = \left(1 - \frac{r}{R}\right) \cdot \left(\sum_{\ell=0}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^{\ell}\right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k r^k\right) \\ &= \left(1 - \frac{r}{R}\right) \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\ell=0}^k a_{\ell} r^{\ell} \left(\frac{r}{R}\right)^{k-\ell} = \left(1 - \frac{r}{R}\right) \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^k \sum_{\ell=0}^k a_{\ell} R^{\ell}. \end{aligned}$$

Über eine geometrische Reihe können wir auch $P(R)$ darstellen als

$$P(R) = \left(1 - \frac{r}{R}\right) \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^k \sum_{\ell=0}^{\infty} a_{\ell} R^{\ell}$$

und folgern damit über die Dreiecksungleichung

$$|P(r) - P(R)| \leq \left(1 - \frac{r}{R}\right) \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^k \left| \sum_{\ell=k+1}^{\infty} a_{\ell} R^{\ell} \right|.$$

Um zu zeigen, dass dieser Ausdruck bei $r \nearrow R$ verschwindet, nutzen wir im Wesentlichen zwei Tatsachen: Einerseits wird der Folgenrest $\sum_{\ell=k+1}^{\infty} a_{\ell} R^{\ell}$ wegen der Konvergenz von $P(R)$ beliebig klein, wenn der Index $k \in \mathbb{N}$ hinreichend groß ist, und zwar unabhängig von $r \in (0, R)$. Andererseits wird der andere Faktor $(1 - \frac{r}{R}) \cdot \sum_{k=0}^{\infty} (\frac{r}{R})^k$ beliebig klein, wenn r nahe genug bei R ist. Für die rigorose Argumentation sei $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben. Mithilfe der Voraussetzung der Konvergenz und Beschränktheit der Reihe $P(R)$ bestimmen wir ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$\left| \sum_{\ell=n+1}^{\infty} a_{\ell} R^{\ell} \right| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{für alle } n \geq n_0$$

sowie eine Konstante $C \geq 0$ mit $|\sum_{\ell=0}^n a_{\ell} R^{\ell}| \leq C$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$, woraus wir insbesondere

$$\left| \sum_{\ell=k+1}^{\infty} a_{\ell} R^{\ell} \right| \leq 2C \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}_0$$

erhalten. Wählen wir $r_0 \in (0, R)$ mit

$$\left(1 - \left(\frac{r}{R}\right)^{n_0}\right) \cdot 2C < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{für alle } r \in [r_0, R),$$

so haben wir insgesamt

$$\begin{aligned} |P(r) - P(R)| &= \left(1 - \frac{r}{R}\right) \cdot \sum_{k=0}^{n_0-1} \left(\frac{r}{R}\right)^k \left| \sum_{\ell=k+1}^{\infty} a_{\ell} R^{\ell} \right| + \left(1 - \frac{r}{R}\right) \cdot \sum_{k=n_0}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^k \left| \sum_{\ell=k+1}^{\infty} a_{\ell} R^{\ell} \right| \\ &\leq \left(1 - \left(\frac{r}{R}\right)^{n_0}\right) \cdot 2C + 1 \cdot \sup_{n \geq n_0} \left| \sum_{\ell=k+1}^{\infty} a_{\ell} R^{\ell} \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

für alle $r \in [r_0, R)$. Dies zeigt (6.1) und damit die Stetigkeit von P auf dem ganzen Intervall $(-R, R]$. $\square$

6.4 Stetige Funktionen auf kompakten Intervallen

Wir beschäftigen uns in diesem Abschnitt vor allem mit wichtigen Aussagen über stetige Funktionen auf einem *kompakten* Intervall $[a, b] \subset \mathbb{R}$, mit $-\infty < a < b < \infty$. Für solche Intervalle wissen wir bereits, dass jede Folge $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ von Punkten in $[a, b]$ eine konvergente Teilfolge besitzt (Satz 4.58 von Bolzano–Weierstraß) und dass der zugehörige Häufungswert dann ebenfalls in $[a, b]$ liegt (Vergleichsprinzip für konvergente Folge aus Übung 4.18). Betrachten wir dann eine stetige Funktion $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, so wissen wir nach der Folgenformulierung der Stetigkeit (Lemma 6.25), dass $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_0)$ gilt.

Zwischenwerteigenschaft. Wir beginnen mit der Untersuchung der Funktionswerte und zeigen zuerst, dass eine stetige Funktion notwendigerweise jeden Wert zwischen zwei bekannten Funktionswerten annehmen muss.

Satz 6.59 (Zwischenwertsatz). *Es sei $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ein Intervall mit $a < b$ und $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann nimmt f jeden Wert aus dem Intervall $[\min\{f(a), f(b)\}, \max\{f(a), f(b)\}]$ an, d.h. für jedes $y_0 \in \mathbb{R}$ zwischen $f(a)$ und $f(b)$ gibt es (mindestens) ein $x_0 \in [a, b]$ mit der Eigenschaft $f(x_0) = y_0$.*

Beweis. Ohne Einschränkung dürfen wir $f(a) \leq f(b)$ annehmen (sonst betrachten wir die stetige Funktion $-f$ anstelle von f und den Zwischenwert $-y_0$ anstelle von y_0). Wir betrachten eine beliebige Zahl $y_0 \in [f(a), f(b)]$ und unterscheiden zwei Fälle. Gilt $y_0 \in \{f(a), f(b)\}$, so ist die Behauptung des Satzes trivialerweise für die Wahl $x_0 = a$ oder $x_0 = b$ erfüllt. Gilt stattdessen $y_0 \in (f(a), f(b))$, so bemerken wir zunächst, dass die Menge

$$M := \{x \in [a, b] : f(x) > y_0\}$$

wegen $f(b) > y_0$ nicht-leer und als Teilmenge des kompakten Intervalls $[a, b]$ beschränkt ist. Daher existiert gemäß des Vollständigkeitsaxioms der reellen Zahlen (vgl. Bemerkung 2.49 zur äquivalenten Infimumseigenschaft)

$$x_0 := \inf M \in [a, b],$$

und wir wollen nun die Behauptung des Satzes über $f(x_0) = y_0$ zeigen. Es sei dazu $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in M mit $x_n \rightarrow x_0$ bei $n \rightarrow \infty$. Nach der Folgenformulierung der Stetigkeit von f haben wir

$$f(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \geq y_0,$$

wobei wir hier auch ausgenutzt haben, dass die Ungleichung $f(x_n) > y_0$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ nach Definition von M erfüllt ist. Wegen $y_0 > f(a)$ muss also $x_0 \neq a$ und damit $x_0 \in (a, b]$ gelten. Wir untersuchen nun die Ungleichung $f(x_0) \geq y_0$ genauer. Würde die strikte Ungleichung $f(x_0) > y_0$ gelten, so gäbe es wegen einer elementaren Betragsabschätzung (siehe Lemma 2.33 (iii)) sowie der Stetigkeit von f in x_0 zu $\varepsilon := f(x_0) - y_0 > 0$ ein $\delta > 0$ mit

$$f(x) \geq f(x_0) - |f(x_0) - f(x)| > y_0 \quad \text{für alle } x \in [a, b] \text{ mit } |x - x_0| < \delta.$$

Insbesondere würde damit (wegen $x_0 \neq a$) ein $x < x_0$ mit $f(x) > y_0$ existieren. Dies würde aber $x \in M$ bedeuten und damit einen Widerspruch zu $x_0 = \inf M$ darstellen. Folglich muss $f(x_0) = y_0$ gelten, so dass die Aussage des Zwischenwertsatzes bewiesen ist. $\square$

Der Zwischenwertsatz 6.59 legt die Grundlage für viele Existenzaussagen in der Analysis. Beispielsweise können wir in einigen (speziellen) Situationen auf die Existenz von Nullstellen oder von Fixpunkten schließen.

Korollar 6.60 (Nullstellensatz). *Es sei $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ein Intervall mit $a < b$ und $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $f(a) \cdot f(b) < 0$ (also mit $f(a) < 0 < f(b)$ oder $f(a) > 0 > f(b)$). Dann hat f eine Nullstelle in (a, b) , d.h. es existiert ein $x_0 \in (a, b)$ mit $f(x_0) = 0$.*

Beweis. Die Aussage folgt direkt aus dem Zwischenwertsatz 6.59, angewandt mit $y_0 = 0$. $\square$

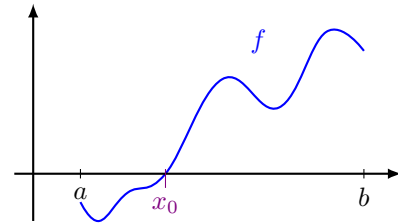
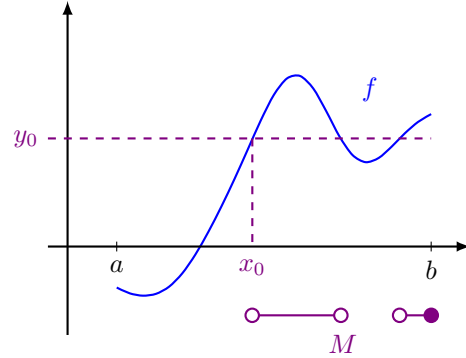
Bemerkung 6.61 (Existenz k -ter Wurzeln). *Betrachten wir die Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) := x^k - y_0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, ein $y_0 \in \mathbb{R}^+$ und $k \in \mathbb{N}$, so haben wir $f(0) = -y_0 < 0$ und $f(y_0 + 1) = (y_0 + 1)^k - y_0 > 0$. Aus dem Nullstellensatz aus Korollar 6.60 können wir dann auf die Existenz eines $x_0 \in (0, y_0 + 1)$ mit $f(x_0) = 0$ schließen. Damit ist x_0 eine k -te Wurzel von y_0 , deren Existenz und Eindeutigkeit wir bereits in Satz 2.64 konstruktiv über ein Intervallschachtelungsprinzip gezeigt hatten.*

Korollar 6.62 (Nullstellensatz für reelle Polynome ungeraden Grades). *Es sei $k \in \mathbb{N}$ und $p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ein Polynom vom Grad $2k - 1$ mit*

$$p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_{2k-1}x^{2k-1} \quad \text{für } x \in \mathbb{R}$$

für reelle Koeffizienten $a_0, a_1, \dots, a_{2k-1} \in \mathbb{R}$ (mit $a_{2k-1} \neq 0$). Dann hat p eine Nullstelle auf $\mathbb{R}$, d.h. es existiert ein $x_0 \in \mathbb{R}$ mit $p(x_0) = 0$.

Beweis. Ohne Einschränkung können wir für den führenden Koeffizienten $a_{2k-1} > 0$ annehmen (andernfalls betrachten wir das Polynom $-p$ anstelle von p). Offensichtlich geht $|x|^{2k-1}$ schneller gegen



unendlich als $|x^\ell|$ für $\ell \in \{0, 1, \dots, 2k-2\}$. Über diese Tatsache überlegt man sich leicht, dass ein $x_0 > 0$ (in Abhängigkeit von den Koeffizienten $a_0, a_1, \dots, a_{2k-1}$) existiert mit

$$p(x) \geq \frac{a_{2k-1}}{2} x^{2k-1} \quad \text{für } x \geq x_0 \quad \text{und} \quad p(x) \leq \frac{a_{2k-1}}{2} x^{2k-1} \quad \text{für } x \leq -x_0.$$

Damit haben wir als Grenzwerte bei $x \rightarrow \pm\infty$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} p(x) = +\infty \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} p(x) = -\infty.$$

Also existiert ein Intervall $[a, b] \subset \mathbb{R}$ mit $p(a) < 0 < p(b)$ und die Existenz einer Nullstelle von p folgt dann aus dem Nullstellensatz in Korollar 6.60. $\square$

Bemerkung 6.63. Für reelle Polynome geraden Grades ist die Existenz einer Nullstelle in $\mathbb{R}$ im Allgemeinen falsch. Beispielsweise hat das Polynom $p(x) = 1 + x^2$ keine Nullstelle in $\mathbb{R}$ (jedoch die Nullstellen $\pm i$ in $\mathbb{C}$).

Korollar 6.64 (Fixpunktsatz). Es sei $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ein Intervall mit $a < b$ und $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $f([a, b]) \subset [a, b]$. Dann hat f einen Fixpunkt in $[a, b]$, d.h. es existiert ein $x_0 \in [a, b]$ mit $f(x_0) = x_0$.

Beweis. Wir betrachten die stetige Funktion $h: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definiert über

$$h(x) := x - f(x) \quad \text{für alle } x \in [a, b].$$

Offensichtlich gilt wegen der Voraussetzung $f([a, b]) \subset [a, b]$

$$h(a) = a - f(a) \leq 0 \quad \text{und} \quad h(b) = b - f(b) \geq 0.$$

Damit hat h eine Nullstelle x_0 in einem Randpunkt $\{a, b\}$ oder nach dem Nullstellensatz in Korollar 6.60 im offenen Intervall (a, b) . Wegen der Äquivalenz

$$h(x_0) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f(x_0) = x_0$$

nach Definition von h folgt, dass x_0 ein Fixpunkt von f ist. $\square$

Übung 6.65. Ein buddhistischer Mönch verlässt sein Kloster eines Morgens um 7 Uhr und steigt auf einen benachbarten Berg, den er um 7 Uhr abends erreicht. Nach einer Nacht der Meditation am Berggipfel steigt er am nächsten Morgen um 7 Uhr wieder ab und erreicht sein Kloster um 7 Uhr abends. Zeigen Sie, dass es einen Zeitpunkt gibt, an dem der Mönch an beiden Tagen auf der gleichen Höhe war.

Übung 6.66. Es sei $f: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $f(0) = f(2)$. Zeigen Sie, dass ein $x_0 \in [0, 1]$ existiert, so dass $f(x_0) = f(x_0 + 1)$ gilt.

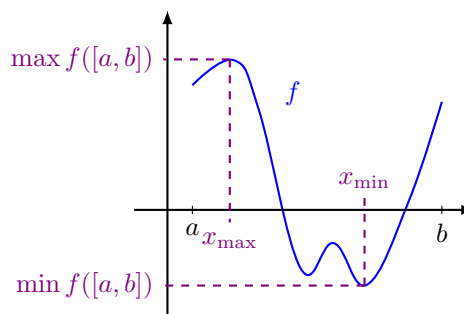
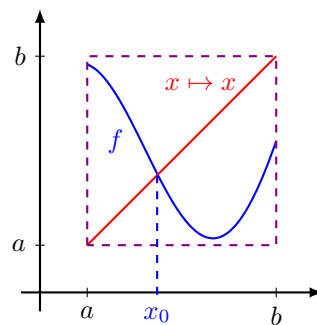
Existenz von Minimum und Maximum. Wir setzen die Untersuchung der Funktionswerte einer stetigen Funktion auf einem kompakten Intervall fort und zeigen als Nächstes, dass sie stets ihr Minimum und Maximum annimmt.

Satz 6.67 (vom Minimum und Maximum). Es sei $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ein Intervall mit $a < b$ und $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann ist die Funktion f beschränkt und nimmt ihr Minimum und Maximum an, d.h. es existieren Punkte $x_{\min}, x_{\max} \in [a, b]$ mit

$$f(x_{\min}) = \min f([a, b]) = \min_{x \in [a, b]} f(x)$$

und

$$f(x_{\max}) = \max f([a, b]) = \max_{x \in [a, b]} f(x).$$



Beweis. Es reicht aus, nur die Beschränktheit nach oben und die Annahme des Maximums zu zeigen, da die Beschränktheit nach unten und die Annahme des Minimums dann über die Betrachtung der Funktion $-f$ anstelle von f folgt.

Wir wählen mithilfe von Lemma 2.52 zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $x_n \in [a, b]$ mit

$$f(x_n) \geq \begin{cases} \sup f([a, b]) - \frac{1}{n} & \text{für } \sup f([a, b]) < \infty, \\ n & \text{für } \sup f([a, b]) = \infty, \end{cases}$$

so dass nach Konstruktion die (ggf. uneigentliche) Konvergenz $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \sup f([a, b])$ gilt. Da die Folge $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ nur Punkte aus dem kompakten Intervall $[a, b]$ enthält, gibt es nach Satz 4.58 von Bolzano–Weierstraß eine konvergente Teilfolge $\{x_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$, mit Grenzwert

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = x_{\max} \in [a, b]$$

(siehe Übung 4.18). Aus der Stetigkeit von f in der Folgenformulierung aus Lemma 6.25 (sowie unter Ausnutzung von Lemma 4.49) schließen wir

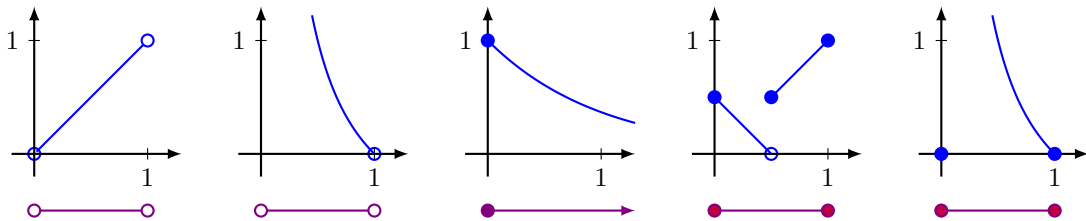
$$f(x_{\max}) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = \sup f([a, b]) < \infty,$$

so dass für f sowohl die Annahme des Maximums als auch die Beschränktheit nach oben gezeigt ist. $\square$

Bemerkungen 6.68.

- (1) Der Satz 6.67 vom Minimum und Maximum ist eine reine Existenzaussage und gibt kein konstruktives Verfahren an, wie man die Extremalstellen $x_{\min}$ und $x_{\max}$ findet.
- (2) Die Extremalstellen $x_{\min}$ und $x_{\max}$ müssen nicht eindeutig sein.
- (3) Beide Voraussetzungen der Stetigkeit der Funktion und der Kompaktheit des Intervalls sind wesentlich sowohl für die Beschränktheit als auch für die Annahme des Minimums und Maximums:

- Die Funktion $f: (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = x$ für $x \in (0, 1)$ ist stetig und beschränkt, sie nimmt aber weder Maximum noch Minimum an.
- Die Funktion $f: (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^{-1} - 1$ für $x \in (0, 1)$ ist stetig und nach unten beschränkt, sie ist aber nach oben unbeschränkt und nimmt auch kein Minimum an.
- Die Funktion $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = \exp(-x)$ für $x \in [0, \infty)$ ist stetig und beschränkt mit Maximum 1 bei $x_{\max} = 0$, sie nimmt aber nirgends den Wert $0 = \inf \exp((-\infty, 0])$ an.
- Die Funktion $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = \frac{1}{2} - x$ für $x \in [0, \frac{1}{2})$ und $f(x) = x$ für $x \in [\frac{1}{2}, 1]$ ist unstetig in $\frac{1}{2}$ und beschränkt mit Maximum 1 bei $x_{\max} = 1$, sie nimmt aber nirgends den Wert $0 = \inf f([0, 1])$ an.
- Die Funktion $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(0) = 0$ und $f(x) = x^{-1} - 1$ für $x \in (0, 1]$ ist unstetig in 0 und nach unten beschränkt mit Minimum 0 bei $x_{\min} = 0$ oder $x_{\min} = 1$, sie ist aber nach oben unbeschränkt.



Betrachten wir nun allgemeiner stetige Funktionen auf einem beliebigen (und nicht notwendigerweise kompakten) Intervall, so ist das Bild ebenfalls ein Intervall.

Lemma 6.69. *Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein nicht-leeres Intervall und $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann ist das Bild $f(I)$ ein Intervall mit (ggf. uneigentlichen) Intervallgrenzen $\inf f(I)$ und $\sup f(I)$.*

Beweis. Nach Definition des Infimums und Supremums ist die Inklusion

$$f(I) \subset [\inf f(I), \sup f(I)] \quad (6.2)$$

offensichtlich. Um als Nächstes die Inklusion

$$(\inf f(I), \sup f(I)) \subset f(I) \quad (6.3)$$

zu zeigen, betrachten wir ein beliebiges $y_0 \in (\inf f(I), \sup f(I))$ und wollen $y_0 \in f(I)$ zeigen. Mithilfe von Lemma 2.52 finden wir zwei Punkte $x_i, x_s \in I$ mit

$$\inf f(I) < f(x_i) < y_0 < f(x_s) < \sup f(I).$$

Setzen wir nun $a := \min\{x_i, x_s\}$ und $b := \max\{x_i, x_s\}$, so gilt $[a, b] \subset I$, da I nach Annahme ein Intervall ist. Somit existiert nach dem Zwischenwertsatz 6.59 ein $x_0 \in I$ mit $f(x_0) = y_0$, womit $y_0 \in f(I)$ und folglich auch (6.3) gezeigt ist. Aufgrund der beiden Inklusionen (6.2) und (6.3) ist nun klar, dass $f(I)$ ein Intervall mit Intervallgrenzen $\inf f(I)$ und $\sup f(I)$ ist. $\square$

Bemerkung 6.70. *Das Intervall I kann offen, halboffen oder abgeschlossen und beschränkt oder unbeschränkt sein. Gleiches gilt für das Intervall $f(I)$, wobei die Intervallgrenzen $\inf f(I)$ und $\sup f(I)$ genau dann zum Intervall $f(I)$ gehören, wenn f ein Minimum bzw. Maximum auf I besitzt.*

Falls $I = [a, b]$ ein kompaktes Intervall mit $a < b$ ist, so nimmt f nach Satz 6.67 sein Minimum und Maximum auf $[a, b]$ an. Folglich erhalten wir in diesem Fall, dass $f([a, b])$ das kompakte Intervall $[\min f([a, b]), \max f([a, b])]$ ist. Falls I dagegen nicht kompakt ist, so kann über die Art des Intervalls $f(I)$ keine allgemeingültige Aussage getroffen werden.

Stetigkeit der Umkehrfunktion. Als Nächstes spezialisieren wir uns auf injektive, stetige Funktionen auf allgemeinen Intervallen und wollen die Stetigkeit der Umkehrabbildung zeigen. Als Vorbereitung überlegen wir uns, dass die Injektivität in diesem Fall bereits äquivalent zur strengen Monotonie ist.

Lemma 6.71 (strenge Monotonie stetiger, injektiver Funktionen). *Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann ist f genau dann injektiv, wenn f streng monoton ist.*

Beweis. Falls f streng monoton auf I ist, so gilt für zwei beliebige Punkte $x, \tilde{x} \in I$ mit $x < \tilde{x}$ entweder $f(x) < f(\tilde{x})$ oder $f(x) > f(\tilde{x})$. Folglich ist f injektiv auf I .

Für den Beweis der umgekehrten Implikation nehmen wir für einen Widerspruchsbeweis an, dass f injektiv, aber nicht streng monoton auf I ist. Dann gibt es vier Zahlen $a_1, a_2, b_1, b_2 \in I$ mit $a_1 < b_1$ und $a_2 < b_2$, so dass für die Funktionswerte die Ungleichungen

$$f(a_1) > f(b_1) \quad \text{und} \quad f(a_2) < f(b_2) \quad (6.4)$$

gelten (man beachte, dass $f(a_1) \neq f(b_1)$ und $f(a_2) \neq f(b_2)$ jeweils aus der Injektivität folgen). Wir definieren nun eine Hilfsfunktion $h: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ über

$$h(t) := f(ta_1 + (1-t)a_2) - f(tb_1 + (1-t)b_2) \quad \text{für } t \in [0, 1],$$

die als Komposition stetiger Funktionen nach Satz 6.39 wiederum stetig ist. Wegen (6.4) gilt dann

$$h(0) = f(a_2) - f(b_2) < 0 < f(a_1) - f(b_1) = h(1),$$

so dass über den Nullstellensatz aus Korollar 6.60 die Existenz einer Zwischenstelle $t_0 \in [0, 1]$ folgt mit

$$h(t_0) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f(t_0a_1 + (1-t_0)a_2) = f(t_0b_1 + (1-t_0)b_2).$$

Da wegen $a_1 < b_1$ und $a_2 < b_2$ die strikte Ungleichung $t_0a_1 + (1-t_0)a_2 < t_0b_1 + (1-t_0)b_2$ für die Funktionsargumente gelten muss, steht dies aber im Widerspruch zur Injektivität von f . Folglich impliziert die Injektivität von f wie behauptet die strenge Monotonie. $\square$

★ **Übung 6.72.** Es sei $n \geq 2$ beliebig. Zeigen Sie, dass es keine stetige Funktion $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ gibt, die jeden ihrer Funktionswerte genau n -mal annimmt.

Übung 6.73. Es sei $D \subset \mathbb{R}$ beliebig und $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ eine injektive und streng monotone Funktion. Überlegen Sie sich, dass die Umkehrfunktion $f^{-1}: f(D) \rightarrow D$ das gleiche Monotonieverhalten wie f aufweist.

Satz 6.74 (Stetigkeit der Umkehrfunktion). *Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Ist f injektiv, so ist die Umkehrabbildung $f^{-1}: f(I) \rightarrow I$ stetig.*

Beweis. Wir haben uns in Bemerkung 1.65 bereits überlegt, dass die Umkehrfunktion f^{-1} für eine injektive Funktion f auf dem Bild $f(I)$ wohldefiniert ist.

Für den Nachweis der Stetigkeit von f^{-1} verwenden wir die Folgenformulierung aus Lemma 6.25 (ii) und betrachten eine beliebige Folge $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ in $f(I)$, die gegen einen Punkt $y_0 \in f(I)$ konvergiert. Setzen wir $x_n = f^{-1}(y_n) \in I$ für $n \in \mathbb{N}_0$, so müssen wir also die Konvergenz

$$x_n = f^{-1}(y_n) \rightarrow f^{-1}(y_0) = x_0 \quad \text{bei } n \rightarrow \infty$$

zeigen. Wir beweisen dies über Widerspruch und nehmen daher an, dass keine Konvergenz $x_n \rightarrow x_0$ bei $n \rightarrow \infty$ gilt. Wegen der Konvergenz der Folge $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ mit Grenzwert aus $f(I)$ bemerken wir zunächst, dass

$$\min\{y_n : n \in \mathbb{N}_0\} \quad \text{und} \quad \max\{y_n : n \in \mathbb{N}_0\}$$

in $f(I)$ existieren, also Werte unter der Abbildung f von Punkten $a, b \in I$ mit $a \leq b$ sind. Wegen der Monotonie von f gemäß Lemma 6.71 (oder alternativ der von f^{-1} , vgl. Übung 6.73) sowie $y_n \in f([a, b])$ folgt dann $x_n \in [a, b]$, für alle $n \in \mathbb{N}$. Da die Folge $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ damit insbesondere beschränkt ist, muss nach dem Satz 4.58 von Bolzano–Weierstraß (unter Berücksichtigung des Vergleichsprinzips aus Übung 4.18) eine Teilfolge $\{x_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ mit

$$x_{n_k} \rightarrow \tilde{x}_0 \in [a, b] \setminus \{x_0\} \quad \text{bei } k \rightarrow \infty$$

existieren. Aus der Stetigkeit von f (wiederum in der Folgenformulierung) schließen wir dann auf

$$f(\tilde{x}_0) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = \lim_{k \rightarrow \infty} y_{n_k} = y_0 = f(x_0),$$

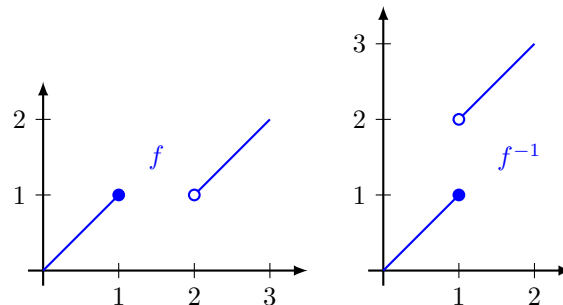
was wegen $x_0 \neq \tilde{x}_0$ im Widerspruch zur vorausgesetzten Injektivität von f steht. $\square$

Bemerkung 6.75. *Es ist notwendig, dass f auf einem Intervall definiert ist, um die Stetigkeit von f^{-1} aus der Stetigkeit von f zu folgern. Beispielsweise hat die stetige Funktion $f: [0, 1] \cup (2, 3] \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch*

$$f(x) := \begin{cases} x & \text{für } x \in [0, 1], \\ x - 1 & \text{für } x \in (2, 3], \end{cases}$$

die unstetige Umkehrfunktion $f^{-1}: [0, 2] \rightarrow [0, 1] \cup (2, 3]$, die gegeben ist durch

$$f^{-1}(y) := \begin{cases} y & \text{für } y \in [0, 1], \\ y + 1 & \text{für } y \in (1, 2]. \end{cases}$$



Beispiele 6.76.

- (i) Die Funktion $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^k$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und ein $k \in \mathbb{N}$ ist stetig mit Bild $f([0, \infty)) = [0, \infty)$. Wegen $x^k < \tilde{x}^k$ für $0 \leq x < \tilde{x}$ ist f auf $[0, \infty)$ auch injektiv, so dass die Umkehrabbildung $f^{-1}: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ existiert, nämlich gerade die k -te Wurzel $f^{-1}(y) = \sqrt[k]{y}$ für $y \in [0, \infty)$. Die Anwendung von Satz 6.74 zeigt dann die Stetigkeit von f^{-1} auf $[0, \infty)$.
- (ii) Die Exponentialfunktion $\exp: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist nach Bemerkung 6.57 stetig. Anhand der Funktionalgleichung

chung (siehe Beispiel 5.44 (ii)) und $\exp > 1$ auf $(0, \infty)$ sehen wir sofort

$$\exp(x) < \exp(\tilde{x} - x) \cdot \exp(x) = \exp(\tilde{x} - x + x) = \exp(\tilde{x})$$

für $x < \tilde{x}$, so dass $\exp$ streng monoton wachsend auf $\mathbb{R}$ ist. Beachten wir außerdem die Identität $\exp(-x) \cdot \exp(x) = 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$, schließen wir mit $\lim_{x \rightarrow \infty} \exp(x) = \infty$ auch auf $\lim_{x \rightarrow -\infty} \exp(-x) = 0$. Über Lemma 6.69 ergibt sich als Bild damit $\exp(\mathbb{R}) = (0, \infty)$. Die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion ist daher auf $(0, \infty)$ definiert und dort nach Satz 6.74 stetig.

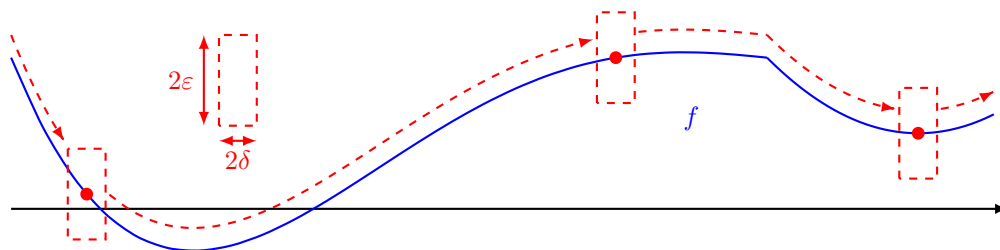
Definition 6.77 (Logarithmusfunktion). Wir bezeichnen die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion $\exp: \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$ als den (natürlichen) Logarithmus und schreiben dafür auch $\log: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ (oder $\ln: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$).

Gleichmäßige Stetigkeit. Abschließend überlegen wir uns, dass stetige Funktionen auf kompakten Intervallen tatsächlich eine besondere (und etwas stärkere) Form der Stetigkeit erfüllen, und zwar die der gleichmäßigen Stetigkeit.

Definition 6.78 (gleichmäßige Stetigkeit). Es sei $D \subset \mathbb{C}$ eine Menge und $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ eine Funktion. Wir nennen f gleichmäßig stetig auf D , falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt mit

$$|f(z) - f(\tilde{z})| < \varepsilon \quad \text{für alle } z, \tilde{z} \in D \text{ mit } |z - \tilde{z}| < \delta.$$

Bemerkung 6.79. Vergleicht man die Definition 6.22 der Stetigkeit auf D mit der Definition 6.78 der gleichmäßigen Stetigkeit auf D , so ist der Unterschied, dass zu einem gegebenen $\varepsilon > 0$ bei Stetigkeit die Wahl von $\delta > 0$ für jeden einzelnen Punkt $z_0 \in D$ unterschiedlich getroffen werden kann, so dass die ε - δ -Bedingung erfüllt ist, wohingegen bei gleichmäßiger Stetigkeit eine Wahl von $\delta > 0$ möglich sein muss, so dass die ε - δ -Bedingung gleichzeitig für alle Punkte $z_0 \in D$ erfüllt ist. Gleichmäßige Stetigkeit auf D impliziert daher insbesondere auch die Stetigkeit auf D , es gilt im Allgemeinen jedoch nicht die Umkehrung (siehe Beispiel 6.80 (iii)).



Im reellen Fall kann man sich die gleichmäßige Stetigkeit einer Funktion graphisch so vorstellen, dass man die Funktion mit einem im Funktionswert $f(x)$ zentrierten Rechteck der (gegebenen) Höhe 2ε und der (entsprechend bestimmten und x -unabhängigen) Breite 2δ "abfahren" kann, so dass jeweils alle Funktionswerte von f über dem Intervall $(x - \delta, x + \delta)$ innerhalb dieses Rechtecks liegen.

Beispiele 6.80.

- (i) Die Funktion $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ mit $f(z) = z$ für alle $z \in \mathbb{C}$ ist gleichmäßig stetig (für $\varepsilon > 0$ mit $\delta := \varepsilon$).
- (ii) Allgemeiner ist jede Lipschitz-stetige Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ mit Lipschitz-Konstante $L \geq 0$ (vgl. Beispiel 6.24 (iii)) gleichmäßig stetig (für $\varepsilon > 0$ mit $\delta := \frac{\varepsilon}{L+1}$).
- (iii) Die (stetige) Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^2$ für alle $x \in \mathbb{R}$ erfüllt für jedes $\delta > 0$ bei Auswertung in den Punkten $x = \frac{1}{\delta}$ und $\tilde{x} = \frac{1}{\delta} + \frac{\delta}{2}$ die Ungleichungen

$$|x - \tilde{x}| = \frac{\delta}{2} < \delta \quad \text{und} \quad |f(x) - f(\tilde{x})| = \left(\frac{1}{\delta} + \frac{\delta}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{\delta}\right)^2 = 1 + \frac{\delta^2}{4} \geq 1,$$

so dass f nicht gleichmäßig stetig ist (die gleichmäßige Stetigkeitsbedingung ist damit insbesondere für $\varepsilon = 1$ verletzt).

Satz 6.81 (Heine). *Es sei $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ein Intervall mit $a < b$ und $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann ist f auf $[a, b]$ gleichmäßig stetig.*

Beweis. Wir zeigen die Aussage des Satz über Widerspruch und nehmen dafür an, dass die Funktion f stetig, aber nicht gleichmäßig stetig auf $[a, b]$ ist. In diesem Fall gibt es ein $\varepsilon > 0$, so dass für jedes $\delta > 0$ Punkte $x, \tilde{x} \in [a, b]$ existieren mit

$$|f(x) - f(\tilde{x})| \geq \varepsilon \quad \text{und} \quad |x - \tilde{x}| < \delta.$$

Wenden wir dies mit $\delta = \frac{1}{n}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ an, so finden wir zwei Folgen $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ und $\{\tilde{x}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ von Punkten in $[a, b]$ mit

$$|f(x_n) - f(\tilde{x}_n)| \geq \varepsilon \quad \text{und} \quad |x_n - \tilde{x}_n| < \frac{1}{n} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Nach dem Satz 4.58 von Bolzano–Weierstraß besitzt $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge $\{x_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ mit Grenzwert $x \in [a, b]$. Mit der Dreiecksungleichung und der Wahl der beiden Folgen $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ und $\{\tilde{x}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ haben wir

$$|\tilde{x}_{n_k} - x| \leq |\tilde{x}_{n_k} - x_{n_k}| + |x_{n_k} - x| \rightarrow 0 \quad \text{bei } k \rightarrow \infty,$$

so dass auch die Teilfolge $\{\tilde{x}_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ gegen x konvergiert. Aus der Folgenformulierung der Stetigkeit (Lemma 6.25) folgt nun

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = f(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(\tilde{x}_{n_k}),$$

im Widerspruch zu $|f(x_n) - f(\tilde{x}_n)| \geq \varepsilon$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Damit ist die gleichmäßige Stetigkeit von f auf $[a, b]$ gezeigt. $\square$

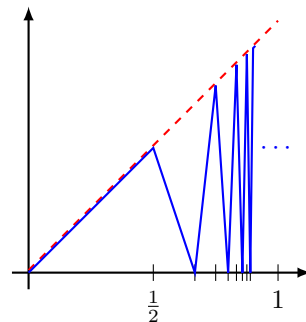
Bemerkung 6.82. *Es ist wesentlich für die Aussage von Satz 6.81, dass das Intervall kompakt – also abgeschlossen und beschränkt – ist. Eine beschränkte, stetige, aber nicht gleichmäßig stetige Funktion $f: [0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ auf dem halboffenen Intervall $[0, 1)$ kann folgendermaßen konstruiert werden: Wir betrachten die Punkte $x_n := 1 - \frac{1}{n} \in [0, 1)$ für $n \in \mathbb{N}$, wählen die Funktionswerte $f(x_n)$ abwechselnd auf der konstanten Funktion $x \mapsto 0$ und der linearen Funktion $x \mapsto x$ und verbinden diese Werte dann linear. Dies führt (unter Berücksichtigung von $x_{n+1} - x_n = (n(n+1))^{-1}$) auf die Vorschrift*

$$f(x) := \begin{cases} (2k-1)^2(x - x_{2k-1}) & \text{für } x \in [x_{2k-1}, x_{2k}] \text{ mit } k \in \mathbb{N}, \\ (4k^2-1)(x_{2k+1} - x) & \text{für } x \in (x_{2k}, x_{2k+1}] \text{ mit } k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Wegen $x_n \rightarrow 1$ bei $n \rightarrow \infty$ ist $f: [0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ wohldefiniert und nach Konstruktion beschränkt und stetig (vgl. Lemma 6.32). Da zugleich

$$|f(x_{n+1}) - f(x_n)| \geq x_n \geq \frac{1}{2} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

gilt, ist f wie behauptet nicht gleichmäßig stetig auf $[0, 1)$.



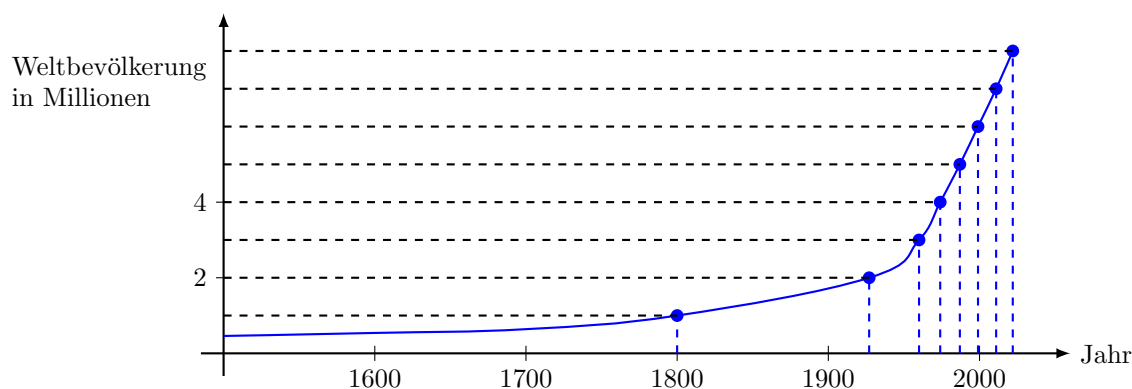
Mindmap. Überlegen Sie sich anhand der Mindmap, wie die wichtigsten Begriffe und Konzepte aus diesem Kapitel zusammenhängen und ob Sie diese verstanden haben!



Kapitel 7

Die Exponentialfunktion und die trigonometrischen Funktionen

In diesem Kapitel beschäftigen wir uns mit einigen klassischen Funktionen der Analysis, die mit der Exponentialfunktion in Zusammenhang stehen. Wir stellen zunächst die wichtigsten Eigenschaften der Exponentialfunktion zusammen. Wir werden später noch sehen, dass die Exponentialfunktion (bis auf Normierung) die einzige Funktion ist, die sich unter Differentiation selbst reproduziert (vgl. Übung 8.39). Wegen dieser Eigenschaft spielt sie in der mathematischen Modellierung natürlicher Prozesse wie dem Wachstum von Populationen oder dem radioaktiven Zerfall eine wichtige Rolle.



Anschließend leiten wir für die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion, die Logarithmusfunktion, die wichtigsten Eigenschaften ab und definieren dann auch allgemeine Potenzen. Schließen führen wir über die Exponentialfunktion auch die trigonometrischen sowie hyperbolischen Funktionen ein und untersuchen ihre wichtigsten Eigenschaften sowie ihre geometrische Bedeutung. Insbesondere beweisen wir dabei auch die eindeutige Darstellung komplexer Zahlen in Polardarstellung, die bereits in Bemerkung 3.18 erwähnt wurde.

7.1 Die Exponentialfunktion

Die Grundlage für alle Funktionen in diesem Kapitel bildet die Exponentialreihe aus Beispiel 5.30. Wir sammeln zunächst einige wichtige Eigenschaften, wenn man die Exponentialreihe als Funktion auf den reellen Zahlen betrachtet.

Lemma 7.1 (wichtige Eigenschaften der Exponentialfunktion). *Für die Exponentialfunktion $\exp: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gelten die folgenden Eigenschaften:*

- (i) $\exp$ erfüllt die Funktionalgleichung

$$\exp(x + \tilde{x}) = \exp(x) \cdot \exp(\tilde{x}) \quad \text{für alle } x, \tilde{x} \in \mathbb{R}$$

und es gilt insbesondere

$$\exp(0) = 1, \quad \exp(-x) = (\exp(x))^{-1} \quad \text{und} \quad \exp(x) > 0 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R},$$

- (ii) es gelten die fundamentalen Ungleichungen

$$1 + x \leq \exp(x) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R},$$

$$(1 - x)^{-1} \geq \exp(x) \quad \text{für alle } x \in (-\infty, 1)$$

(mit Gleichheit jeweils nur für $x = 0$),

- (iii) $\exp$ ist streng monoton wachsend,

- (iv) $\exp$ ist stetig auf $\mathbb{R}$,

- (v) es gilt

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\exp(x) - 1}{x} = 1,$$

- (vi) $\exp: \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$ ist bijektiv mit

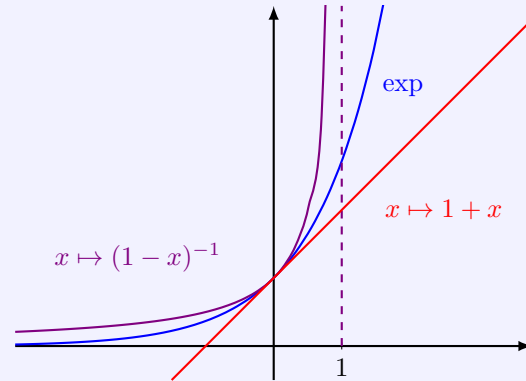
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \exp(x) = \infty \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \exp(x) = 0,$$

- (vii) $\exp$ wächst schneller als jede Potenz, d.h. für jedes $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\exp(x)}{x^k} = \infty,$$

und entsprechend gelten dann

$$\lim_{x \searrow 0} x^k \exp(x^{-1}) = \infty \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^k \exp(x) = 0.$$



Beweis. Die meisten Eigenschaften der Exponentialfunktion wurden bereits bewiesen, wir wiederholen hier dennoch kurz die Argumente, um aufzuzeigen, wie die unterschiedlichen, bisher vorgestellten Konzepte eingehen. Wir stellen zunächst fest, dass $\exp(x) \in \mathbb{R}$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt, da $\exp(x)$ in diesem Fall eine Reihe mit reellen Gliedern darstellt.

- (i) Die Funktionalgleichung der Exponentialfunktion wurde mithilfe des Cauchy-Produkts in Beispiel 5.44 bewiesen. Setzen wir in die Exponentialreihe $x = 0$ ein, so erhalten wir

$$\exp(0) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{0^k}{k!} = \frac{0^0}{0!} = 1.$$

Für beliebige $x \in \mathbb{R}$ folgern wir aus der Funktionalgleichung mit $\tilde{x} = -x$ aus der Eindeutigkeit des Inversen bezüglich der Multiplikation (vgl. Lemma 2.6 (ii))

$$1 = \exp(0) = \exp(x) \cdot \exp(-x) \quad \Rightarrow \quad \exp(-x) = (\exp(x))^{-1},$$

womit wir insbesondere auch $\exp(x) \neq 0$ erhalten. Schließlich ergibt sich mit der Positivität der Quadrate nicht-verschwindender reeller Zahlen (vgl. Lemma 2.17 (vi)) auch

$$\exp(x) = \exp(x/2) \cdot \exp(x/2) \quad \Rightarrow \quad \exp(x) > 0.$$

- (ii) Wir betrachten zunächst $x \geq 0$ und schließen hier aus der Tatsache, dass die Reihe nur aus nicht-negativen Gliedern besteht, direkt auf

$$\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \geq \frac{x^0}{0!} + \frac{x^1}{1!} = 1 + x$$

(wobei die Ungleichung nur für $x = 0$ zur Gleichung wird). Für $x \in [-1, 0)$ schreiben wir die Exponentialreihe zuerst um und schätzen dann nach unten ab. Dadurch erhalten wir

$$\begin{aligned} \exp(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \sum_{\ell=1}^{\infty} \left(\frac{x^{2\ell}}{(2\ell)!} + \frac{x^{2\ell+1}}{(2\ell+1)!} \right) \\ &= 1 + x + \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{x^{2\ell}}{(2\ell)!} \left(1 + \frac{x}{2\ell+1} \right) > 1 + x, \end{aligned}$$

wobei wir für die letzte Ungleichung $1 + \frac{x}{2\ell+1} \geq 1 - \frac{1}{2\ell+1} > 0$ und die Positivität von $\frac{x^{2\ell}}{(2\ell)!}$ für alle $\ell \geq 1$ ausgenutzt haben. Für $x < -1$ gilt trivialerweise wegen (i)

$$\exp(x) > 0 > 1 + x.$$

Insgesamt haben wir damit die erste fundamentale Ungleichung $\exp(x) \geq 1 + x$ für alle $x \in \mathbb{R}$ bewiesen, mit Gleichheit nur für $x = 0$. Unter Berücksichtigung von (i) ergibt sich dann direkt die zweite fundamentale Ungleichung

$$\exp(x) = (\exp(-x))^{-1} \leq (1 - x)^{-1} \quad \text{für alle } x < 1,$$

mit Gleichheit wieder nur für $x = 0$.

- (iii) Da $\exp > 1$ auf $(0, \infty)$ gilt, haben wir mit der Funktionalgleichung aus (i) für alle $x, \tilde{x} \in \mathbb{R}$ mit $x < \tilde{x}$

$$\exp(x) < \exp(\tilde{x} - x) \cdot \exp(x) = \exp(\tilde{x} - x + x) = \exp(\tilde{x}).$$

Folglich ist die Exponentialfunktion auf $\mathbb{R}$ streng monoton wachsend.

- (iv) Die Exponentialreihe ist nach Beispiel 5.54 (ii) eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $R = \infty$. Damit ist die Exponentialfunktion nach Satz 6.56 auf ganz $\mathbb{R}$ stetig, vgl. Bemerkung 6.57.
- (v) Der zu berechnende Grenzwert ist von der Form, dass im Zähler gerade die Differenz aus der Exponentialreihe und der 0-ten Partialsumme steht, im Nenner x^1 und der Grenzwert gegen den Entwicklungspunkt betrachtet wird. Die Grenzwertberechnung ergibt nach Lemma 6.11 gerade den Koeffizienten vor x^1 in der Potenzreihe, also

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\exp(x) - 1}{x} = \frac{1}{1!} = 1,$$

vgl. Bemerkung 6.12.

- (vi) Da die Exponentialfunktion nach (iii) streng monoton wachsend ist, gilt für alle $x, \tilde{x} \in \mathbb{R}$ mit $x \neq \tilde{x}$ auch $\exp(x) \neq \exp(\tilde{x})$, so dass die Injektivität der Exponentialfunktion auf $\mathbb{R}$ klar ist. Um zu zeigen, dass $\exp(\mathbb{R}) = (0, \infty)$ gilt und damit $\exp: \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$ surjektiv ist, betrachten wir ein beliebiges $y_0 \in (0, \infty)$ und erhalten über (i) und die fundamentalen Ungleichungen aus (ii)

$$0 \leq \exp(-y_0^{-1}) \leq (1 + y_0^{-1})^{-1} \leq y_0 \leq \exp(y_0).$$

Damit existiert nach dem Zwischenwertsatz 6.59 ein $x_0 \in [-y_0^{-1}, y_0]$ mit $\exp(x_0) = y_0$ und es ist insgesamt gezeigt, dass $\exp: \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$ bijektiv ist. Es bleiben noch die Grenzwerte der Exponentialfunktion bei $x \rightarrow \pm\infty$ zu zeigen. Ist $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine beliebige Folge in $\mathbb{R}$ mit $x_n \rightarrow \infty$

bei $n \rightarrow \infty$, so folgt aus der ersten fundamentalen Ungleichung in (ii) mit dem Minorantenkriterium aus Satz 4.28 (ii)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \exp(x_n) \geq \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + x_n) = \infty,$$

so dass wir $\lim_{x \rightarrow \infty} \exp(x) = \infty$ haben. Ist $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine beliebige Folge in $(-\infty, 0)$ mit $x_n \rightarrow -\infty$ bei $n \rightarrow \infty$, so haben wir mit (i) und der zweiten fundamentalen Ungleichung in (ii)

$$0 \leq \exp(x_n) \leq (1 - x_n)^{-1} \leq (-x_n)^{-1} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N},$$

so dass nach dem Einschachtelungsprinzip aus Satz 4.28 (iii) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \exp(x) = 0$ folgt.

- (vii) Ist $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine beliebige Folge in $\mathbb{R}$ mit $x_n \rightarrow \infty$ bei $n \rightarrow \infty$, so folgern wir aus $\exp(x) \geq \frac{x^{k+1}}{(k+1)!}$ für $x \geq 0$ und dem Minorantenkriterium aus Satz 4.28 (ii)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\exp(x_n)}{x_n^k} \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{(k+1)!} = \infty,$$

so dass wir $\lim_{x \rightarrow \infty} \exp(x)x^{-k} = \infty$ gezeigt haben. Die anderen beiden Grenzwerte folgen dann durch einen Variablenwechsel. Die Ersetzung von x durch $\tilde{x}^{-1}$ (rigoros auf den entsprechenden Folgen, vgl. Übung 6.21) führt zu

$$\lim_{x \searrow 0} x^k \exp(x^{-1}) = \lim_{\tilde{x} \rightarrow \infty} \frac{\exp(\tilde{x})}{\tilde{x}^k} = \infty,$$

und die Ersetzung von x durch $-\tilde{x}$ (unter Ausnutzung von (i)) zu

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^k \exp(x) = \lim_{\tilde{x} \rightarrow \infty} (-\tilde{x})^k \exp(-\tilde{x}) = \lim_{\tilde{x} \rightarrow \infty} \frac{(-\tilde{x})^k}{\exp(\tilde{x})} = 0. \quad \square$$

Bemerkungen 7.2.

- (1) Aus der Funktionalgleichung in Lemma 7.1 (i) erhalten wir über vollständige Induktion $\exp(n \cdot x) = (\exp(x))^n$ und damit auch $\exp(-n \cdot x) = (\exp(-x))^n = ((\exp(x))^{-1})^n = \exp(x)^{-n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $x \in \mathbb{R}$. Insgesamt haben wir daher

$$\exp(m \cdot x) = (\exp(x))^m \quad \text{für alle } m \in \mathbb{Z} \text{ und } x \in \mathbb{R}.$$

Wegen der Eindeutigkeit der n -ten Wurzeln haben wir damit auch

$$\exp\left(\frac{x}{n}\right) = \sqrt[n]{\exp(x)} = (\exp(x))^{\frac{1}{n}} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N} \text{ und } x \in \mathbb{R}.$$

Nutzen wir nun die Definition $e := \exp(1)$ der Eulerschen Zahl, erhalten wir

$$\exp\left(\frac{m}{n}\right) = (\exp(m))^{\frac{1}{n}} = (e^m)^{\frac{1}{n}} \quad \text{für alle } m \in \mathbb{Z} \text{ und } n \in \mathbb{N}.$$

Später werden wir sehen, dass man die Auswertung der Exponentialfunktion nicht nur in rationalen Punkten als eine (verallgemeinerte) Potenzfunktion verstehen kann.

- (2) Die Funktionalgleichung in Lemma 7.1 (i) repräsentiert die Eigenschaft des natürlichen Wachstums. Es gibt viele Prozesse, bei denen sich die relevante Größe in jeweils gleichen Zeitabständen immer um denselben Faktor vervielfacht (oder dies zumindest approximativ oder für begrenzte Zeit zutrifft). Beispiele hierfür sind etwa das Wachstum von Populationen, die Zunahme von Kapital bei konstanter Verzinsung oder der Zerfall radioaktiver Stoffe. Bezeichnet man die "Menge" bei einem solchen Prozess zu einem beliebigen, aber festen Zeitpunkt mit $n_0 > 0$, so verändert sich diese (unabhängig von n_0) nach einer Zeit $t \in \mathbb{R}$ mit einem Faktor $f(t) > 0$. Betrachtet man die Größe nach einer Zeit $s+t$, so kann man entweder die gesamte Zeit $s+t$ auf einmal verstreichen

lassen und hat danach $n_0 f(s+t)$, oder man unterbricht nach Zeit s , hat dann $n_0 f(s)$, und lässt den Prozess danach eine Zeit t weiterlaufen, so dass man insgesamt bei $(n_0 f(s))f(t)$ landet. Da die Endgröße gleich sein muss und die Zeitpunkte der Unterbrechungen beliebig sein können, muss für den Entwicklungsfaktor

$$f(s+t) = f(s) \cdot f(t) \quad \text{für alle } s, t \in \mathbb{R}$$

gelten, was genau der Form der Funktionalgleichung der Exponentialfunktion entspricht.

Wegen der Bijektivität der Exponentialfunktion $\exp: \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$ ist ihre Umkehrfunktion, der (natürliche) Logarithmus $\log: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ aus Definition 6.77, wohldefiniert und erfüllt nach Definition der Umkehrfunktion die Äquivalenz

$$\exp(x) = y \quad \Leftrightarrow \quad x = \log(y)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ und $y \in (0, \infty)$. Aus Lemma 7.1 können wir nun auch einige wichtige Eigenschaften des Logarithmus herleiten.

Lemma 7.3 (wichtige Eigenschaften der Logarithmusfunktion). Für die (natürliche) Logarithmusfunktion $\log: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ gelten die folgenden Eigenschaften:

- (i) $\log$ erfüllt die Funktionalgleichung

$$\log(y \cdot \tilde{y}) = \log(y) + \log(\tilde{y}) \quad \text{für alle } y, \tilde{y} \in (0, \infty)$$

und es gilt insbesondere

$$\log(1) = 0 \quad \text{und} \quad \log(y) = -\log(y^{-1}) \quad \text{für alle } y \in (0, \infty),$$

- (ii) es gelten die fundamentalen Ungleichungen

$$\frac{y}{1+y} \leq \log(1+y) \leq y \quad \text{für alle } y \in (-1, \infty)$$

(mit Gleichheit nur im Fall $y = 0$),

- (iii) $\log$ ist streng monoton wachsend,

- (iv) $\log$ ist stetig auf $(0, \infty)$,

- (v) es gilt

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\log(1+y)}{y} = 1,$$

- (vi) $\log: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ist bijektiv mit

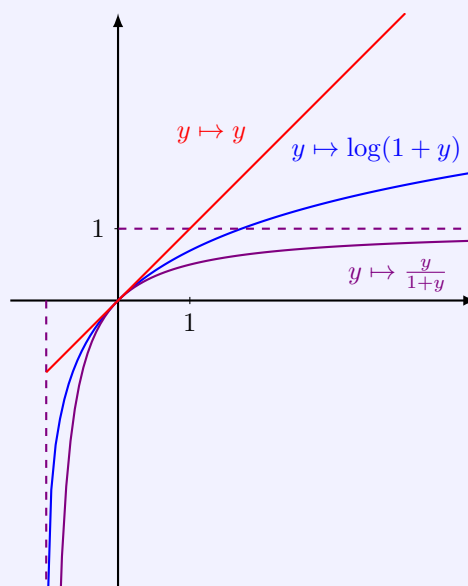
$$\lim_{y \searrow 0} \log(y) = -\infty \quad \text{und} \quad \lim_{y \rightarrow \infty} \log(y) = \infty,$$

- (vii) $\log$ wächst langsamer als jede Wurzel, d.h. für jedes $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \frac{\log(y)}{\sqrt[k]{y}} = 0,$$

und entsprechend gilt dann

$$\lim_{y \searrow 0} \sqrt[k]{y} \log(y) = 0.$$



Beweis. Wir nutzen im Wesentlichen die Eigenschaften der Exponentialfunktion aus Lemma 7.1 und die Tatsache, dass die Logarithmusfunktion die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion ist. Damit stehen uns insbesondere die Identitäten $\exp \circ \log(y) = y$ für alle $y \in (0, \infty)$ und $\log \circ \exp(x) = x$ für alle $x \in \mathbb{R}$ zur Verfügung (vgl. Lemma 1.67).

- (i) Zu $y, \tilde{y} \in (0, \infty)$ betrachten wir $x, \tilde{x} \in \mathbb{R}$ mit $\exp(x) = y$ und $\exp(\tilde{x}) = \tilde{y}$. Mit der Funktionalgleichung der Exponentialfunktion aus Lemma 7.1 (i) haben wir

$$\log(y \cdot \tilde{y}) = \log(\exp(\log(y)) \cdot \exp(\log(\tilde{y}))) = \log(\exp(\log(y) + \log(\tilde{y}))) = \log(y) + \log(\tilde{y}).$$

Wenden wir die Funktionalgleichung des Logarithmus mit $y = \tilde{y} = 1$ an, so erhalten wir

$$\log(1) = \log(1) + \log(1) \quad \Leftrightarrow \quad \log(1) = 0.$$

Für beliebige $y \in (0, \infty)$ folgt aus der Eindeutigkeit des Inversen bezüglich der Addition außerdem

$$0 = \log(1) = \log(y) + \log(y^{-1}) \quad \Rightarrow \quad \log(y) = -\log(y^{-1}).$$

- (ii) Es sei $y \in (-1, \infty)$ beliebig. Wenden wir die erste fundamentale Ungleichung der Exponentialfunktion aus Lemma 7.1 (ii) auf $x = \log(1 + y) \in \mathbb{R}$ an, so folgt

$$1 + \log(1 + y) \leq \exp(\log(1 + y)) = 1 + y,$$

womit wir dann die zweite Ungleichung $\log(1 + y) \leq y$ gezeigt haben. Wenden wir dann die zweite fundamentale Ungleichung der Exponentialfunktion auf $x = \frac{y}{y+1} \in (-\infty, 1)$ an, so haben wir

$$\exp\left(\frac{y}{y+1}\right) \leq \left(1 - \frac{y}{y+1}\right)^{-1} = y + 1 = \exp(\log(1 + y)),$$

woraus wir aus der Tatsache, dass die Exponentialfunktion nach Lemma 7.1 (iii) monoton wachsend ist, auf die erste Ungleichung $\frac{y}{y+1} \leq \log(1 + y)$ schließen.

- (iii) Es seien $y, \tilde{y} \in (0, \infty)$ beliebig und $x, \tilde{x} \in \mathbb{R}$, so dass $\exp(x) = y$ und $\exp(\tilde{x}) = \tilde{y}$ gilt. Da die Exponentialfunktion nach Lemma 7.1 (iii) streng monoton wachsend ist, haben wir die Äquivalenz

$$x < \tilde{x} \quad \Leftrightarrow \quad \exp(x) < \exp(\tilde{x}),$$

die ausgedrückt in $y, \tilde{y}$ gerade

$$\log(y) < \log(\tilde{y}) \quad \Leftrightarrow \quad y < \tilde{y}$$

bedeutet, so dass $\log$ auf $(0, \infty)$ ebenfalls streng monoton wachsend ist.

- (iv) Die Stetigkeit der Logarithmusfunktion auf $(0, \infty)$ folgt direkt aus Satz 6.74 zur Stetigkeit der Umkehrfunktion, vgl. Beispiel 6.76 (ii).
- (v) Es sei $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine beliebige Folge in $(-1, \infty)$ mit $y_n \rightarrow 0$ bei $n \rightarrow \infty$. Die Folge $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ mit $x_n := \log(1 + y_n) \in \mathbb{R}$ für $n \in \mathbb{N}$ ist dann wegen $\log(1) = 0$ und der Stetigkeit von $\log$ aus (iv) (in der Folgenformulierung) eine Nullfolge. Wir erhalten dann über Lemma 7.1 (v)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(1 + y_n)}{y_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{\exp(x_n) - 1} = 1.$$

Damit folgt $\lim_{y \rightarrow 0} \log(1 + y)y^{-1} = 1$.

- (vi) Sind $y, \tilde{y} \in (0, \infty)$ beliebig mit $\log(y) = \log(\tilde{y})$, so folgt durch Anwendung der Exponentialfunktion auf beiden Seiten $y = \tilde{y}$ und damit die Injektivität. Ist $x \in \mathbb{R}$ beliebig, so gilt für $y = \exp(x) \in (0, \infty)$ die Identität $\log(y) = \log(\exp(x)) = x$, also ist $\log: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ bijektiv. Es bleiben noch die Grenzwerte der Logarithmusfunktion bei $y \searrow 0$ und $y \rightarrow \infty$ zu zeigen. Es sei $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine beliebige Folge in $(0, \infty)$ und $\{x_n\}_{n \rightarrow \infty}$ die Folge mit $x_n := \log(y_n)$ für $n \in \mathbb{N}$. Falls $y_n \rightarrow 0$ bei $n \rightarrow \infty$ gilt, so muss wegen Lemma 7.1 (vi) $x_n \rightarrow -\infty$ bei $n \rightarrow \infty$ und damit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \log(y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$$

gelten. Dies zeigt $\lim_{y \searrow 0} \log(y) = -\infty$. Falls dagegen $y_n \rightarrow \infty$ bei $n \rightarrow \infty$ gilt, so muss entsprechend $x_n \rightarrow \infty$ bei $n \rightarrow \infty$ und damit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \log(y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$$

gelten. Dies zeigt $\lim_{y \rightarrow \infty} \log(y) = \infty$.

- (vii) Es sei $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine beliebige Folge in $(0, \infty)$ mit $y_n \rightarrow \infty$ bei $n \rightarrow \infty$, $k \in \mathbb{N}$ und $\{x_n\}_{n \rightarrow \infty}$ die Folge mit $x_n := k^{-1} \log(y_n)$ für $n \in \mathbb{N}$. Mit Bemerkung 7.2 (1) haben wir dann

$$\sqrt[k]{y_n} = \sqrt[k]{\exp(kx_n)} = \exp(x_n),$$

so dass wir über Lemma 7.1 (vii)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(y_n)}{\sqrt[k]{y_n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{kx_n}{\exp(x_n)} = 0$$

erhalten. Dies zeigt $\lim_{y \rightarrow \infty} \log(y) (\sqrt[k]{y})^{-1} = 0$. Der zweite Grenzwert folgt dann durch Ersetzung von y durch $\tilde{y}^{-1}$ (vgl. Übung 6.21) und mit (i) als

$$\lim_{y \searrow 0} \sqrt[k]{y} \log(y) = \lim_{\tilde{y} \rightarrow \infty} \sqrt[k]{\tilde{y}^{-1}} \log(\tilde{y}^{-1}) = - \lim_{\tilde{y} \rightarrow \infty} \frac{\log(\tilde{y})}{\sqrt[k]{\tilde{y}}} = 0. \quad \square$$

Bemerkungen 7.4.

- (1) In Beispiel 8.67 werden wir sehen, dass die Logarithmusfunktion eine Darstellung als Potenzreihe

$$\log(1+y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} y^k = y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} \pm \dots$$

für alle $y \in \mathbb{R}$ mit $|y| < 1$ besitzt. Diese Reihe hat den Konvergenzradius $R = 1$. Im Randpunkt $y = 1$ erkennen wir die alternierende harmonische Reihe wieder, die nach dem Leibniz-Kriterium aus Satz 5.18 konvergiert. Mithilfe des Abelschen Grenzwertsatzes 6.58 identifiziert man den Wert der alternierenden harmonischen Reihe dann mit $\log(2)$.

- (2) Aus der Funktionalgleichung in Lemma 7.3 (i) erhalten wir über vollständige Induktion $\log(y^n) = n \cdot \log(y)$ und damit auch $\log(y^{-n}) = n \cdot \log(y^{-1}) = (-n) \cdot \log(y)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $y \in (0, \infty)$. Insgesamt haben wir daher

$$\log(y^m) = m \cdot \log(y) \quad \text{für alle } m \in \mathbb{Z} \text{ und } y \in (0, \infty)$$

und nach Übergang von y auf $\sqrt[n]{y}$ auch

$$\log(\sqrt[n]{y}) = \log(y^{\frac{1}{n}}) = \frac{1}{n} \cdot \log(y) \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N} \text{ und } y \in (0, \infty).$$

Insgesamt erhalten wir dann

$$\log(\sqrt[n]{y^m}) = \frac{1}{n} \cdot \log(y^m) = \frac{m}{n} \cdot \log(y) \quad \text{für alle } m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \text{ und } y \in (0, \infty).$$

Übung 7.5. Escherichia coli ist ein Darmbakterium, das seine Anzahl unter optimalen Bedingungen innerhalb von 20 Minuten verdoppeln kann. Bezeichnen wir die Bakterienanzahl zum Zeitpunkt $t = 0$ mit n_0 , so ist die Bakterienanzahl zum Zeitpunkt $t \geq 0$ (in Minuten) durch eine Gleichung der Form

$$n(t) = n_0 \exp(kt)$$

mit einer Wachstumsrate k beschrieben. Bestimmen Sie k und geben Sie eine Formel an, nach wie vielen Minuten sich die anfängliche Bakterienanzahl verzehnfacht hat.

7.2 Allgemeine Potenzen

Wir beschäftigen uns in diesem Abschnitt mit allgemeinen Potenzen und wollen dabei insbesondere komplexe Potenzen einer positiven Zahl einführen. Bisher haben wir definiert:

- Potenzen z^k für nicht-negative ganzzahlige Exponenten $k \in \mathbb{N}_0$ und komplexe Zahlen $z \in \mathbb{C}$, über die induktive Definition $z^0 := 1$ für alle $z \in \mathbb{C}$ und $z^{n+1} := z^n \cdot z$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$,
- Potenzen z^{-k} für negative ganzzahlige Exponenten $-k \in -\mathbb{N}$ und komplexe, nicht-verschwindende Zahlen $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, über $z^{-k} := (z^{-1})^k$,
- Potenzen $x^{\frac{1}{k}}$ für multiplikative Inverse k^{-1} natürlicher Zahlen $k \in \mathbb{N}$ als Exponent und nicht-negative Zahlen $x \in [0, \infty)$, über die eindeutige k -te Wurzel $x^{\frac{1}{k}} := \sqrt[k]{x}$ von x .

Dies erlaubt uns, die Potenz b^a für eine rationale Potenz $a \in \mathbb{Q}$ und eine positive Zahl $b \in (0, \infty)$ zu definieren. Dazu schreiben wir $a = \frac{m}{n}$ für geeignete Zahlen $m \in \mathbb{Z}$ und $n \in \mathbb{N}$ und setzen dann

$$b^a := (b^m)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{b^m}.$$

Bemerkungen 7.6.

- (1) Ist $a \in \mathbb{Q}$, also $a = \frac{m}{n}$ für Zahlen $m \in \mathbb{Z}$ und $n \in \mathbb{N}$, so können wir die Potenz b^a für jede positive Zahl $b \in (0, \infty)$ mithilfe von Bemerkung 7.4 (2) auch ausdrücken als

$$b^a = \exp(\log(b^a)) = \exp(a \log(b)).$$

Dies zeigt insbesondere, dass die Definition der Potenz b^a wohldefiniert ist, d.h. nicht von der Wahl der Zahlen $m \in \mathbb{Z}$ und $n \in \mathbb{N}$ mit $a = \frac{m}{n}$ abhängt.

- (2) Für rationale Potenzen gelten die entsprechenden Potenzgesetze wie in Übung 2.14 und wir werden diese in verallgemeinerter Form in Lemma 7.9 formulieren und beweisen.

Über die Formel in Bemerkung 7.6 (1) können wir nun auch Potenzen positiver Zahlen mit einem beliebigen komplexen Exponenten einführen.

Definition 7.7 (allgemeine Potenz). Für $a \in \mathbb{C}$ und $b \in (0, \infty)$ definieren wir die Potenz b^a als die komplexe Zahl

$$b^a := \exp(a \log(b)).$$

Dabei bezeichnen wir b als die Basis und a als den Exponenten.

Bemerkungen 7.8.

- (1) Allgemeine Potenzen sind im Sinne von Definition 7.7 nur für eine positive Basis $b \in (0, \infty)$ definiert (auch wenn wir ganzzahlige nicht-negative bzw. negative Potenzen sogar für alle komplexen Zahlen $z \in \mathbb{C}$ bzw. $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ bilden können).
- (2) Im Spezialfall $b = \exp(1) = e$ erhalten wir für $a \in \mathbb{C}$ die Identifikation der Exponentialreihe $\exp(a)$ mit der Potenz e^a .

- (3) Die Definition 7.7 der allgemeinen Potenz b^a stimmt für $a \in \mathbb{Q}$ aufgrund von Bemerkung 7.6 (1) mit der ursprünglichen Definition von b^a überein.
- (4) Aus der Definition der allgemeinen Potenz ist offensichtlich, dass die Potenz b^a für $b \in (0, \infty)$ (reell und) positiv ist, falls der Exponent $a \in \mathbb{R}$ reell ist.

Wir halten nun die wichtigsten Regeln für das Rechnen mit allgemeinen Potenzen fest.

Lemma 7.9 (Rechenregeln für Potenzen). Für $a, \tilde{a} \in \mathbb{C}$ und $b, \tilde{b} \in (0, \infty)$ gelten die folgenden Regeln:

- (i) $\log(b^a) = a \log(b)$,
- (ii) $b^{a+\tilde{a}} = b^a \cdot b^{\tilde{a}}$,
- (iii) $(b^a)^{\tilde{a}} = b^{a \cdot \tilde{a}}$, falls $b^a > 0$,
- (iv) $(b^a)^{-1} = b^{-a} = (b^{-1})^a$,
- (v) $(b \cdot \tilde{b})^a = b^a \cdot \tilde{b}^a$.

Beweis. Im Folgenden verwenden wir die Definition 7.7 der allgemeinen Potenzen und rechnen damit mithilfe der Eigenschaften der Exponential- und der Logarithmusfunktion aus Lemma 7.1 und Lemma 7.3 die einzelnen Rechenregeln nach.

- (i) Über die Tatsache, dass die Logarithmusfunktion die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion ist, sehen wir

$$\log(b^a) = \log(\exp(a \log(b))) = a \log(b).$$

- (ii) Mit der Funktionalgleichung der Exponentialfunktion aus Lemma 7.1 (i) erhalten wir

$$b^{a+\tilde{a}} = \exp((a + \tilde{a}) \log(b)) = \exp(a \log(b)) \cdot \exp(\tilde{a} \log(b)) = b^a \cdot b^{\tilde{a}}.$$

- (iii) Mit (i) ergibt sich

$$(b^a)^{\tilde{a}} = \exp(\tilde{a} \log(b^a)) = \exp(a \cdot \tilde{a} \log(b)) = b^{a \cdot \tilde{a}}.$$

- (iv) Wegen $(\exp(z))^{-1} = \exp(-z)$ nach der Funktionalgleichung sowie mit der Anwendung von (i) folgen

$$(b^a)^{-1} = (\exp(a \log(b)))^{-1} = \exp(-a \log(b)) = b^{-a} = \exp(-a \log(b)) = \exp(a \log(b^{-1})) = (b^{-1})^a.$$

- (v) Mit den Funktionalgleichungen der Logarithmusfunktion aus Lemma 7.3 (i) und der Exponentialfunktion aus Lemma 7.1 (i) schließen wir auf

$$\begin{aligned} (b \cdot \tilde{b})^a &= \exp(a \log(b \cdot \tilde{b})) = \exp(a \log(b) + a \log(\tilde{b})) \\ &= \exp(a \log(b)) \cdot \exp(a \log(\tilde{b})) = b^a \cdot \tilde{b}^a. \end{aligned} \quad \square$$

Übung 7.10. Untersuchen Sie mit dem Verdichtungskriterium von Cauchy aus Satz 5.12, für welche Exponenten $s \in \mathbb{R}$ die Reihe

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(\log(k))^s}$$

konvergiert.

Übung 7.11. Es seien $a \in \mathbb{R}$ und $b \in (0, \infty)$ mit $b^{a^2} = 4$ und $2b^{3a} = 54$. Berechnen Sie $(3b)^a$.

Wir können nun die allgemeinen Potenzen einerseits für einen festen Exponenten a als Funktion in der Basis auffassen und so eine allgemeine Potenzfunktion definieren, oder andererseits für eine feste Basis b als Funktion im Exponenten auffassen und so eine allgemeine Exponentialfunktion einführen. Schränken wir uns dabei auf reelle Basen und reelle Exponenten ein, so erhalten wir reellwertige Funktionen und können elementare Eigenschaften dieser allgemeinen Potenz- bzw. Exponentialfunktionen dann direkt aus den entsprechenden, zuvor hergeleiteten Eigenschaften der Exponential- und der Logarithmusfunktion ableiten.

Definition 7.12 (allgemeine Potenz- und Exponentialfunktion).

- (i) Es sei $a \in \mathbb{C}$. Wir definieren die allgemeine Potenzfunktion zum Exponenten a als die Funktion $p_a: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$ mit

$$p_a(x) := x^a \quad \text{für alle } x \in (0, \infty).$$

- (ii) Es sei $b \in (0, \infty)$. Wir definieren die allgemeine Exponentialfunktion zur Basis b als die Funktion $\exp_b: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ mit

$$\exp_b(z) := b^z \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C}.$$

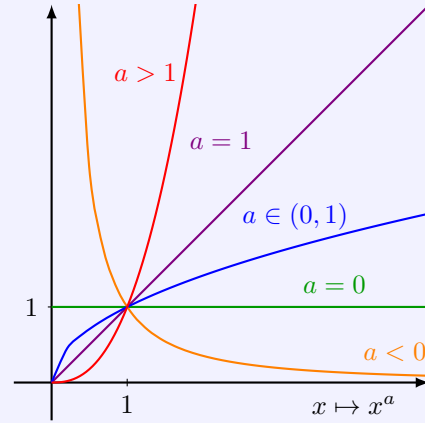
Lemma 7.13 (elementare Eigenschaften allgemeiner Potenzfunktionen). Es sei $a \in \mathbb{R}$. Für die allgemeine Potenzfunktion $p_a: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ gelten die folgenden Eigenschaften:

- (i) p_a ist für $a > 0$ streng monoton wachsend, für $a = 0$ konstant und für $a < 0$ streng monoton fallend,
(ii) p_a ist stetig auf $(0, \infty)$,
(iii) $p_a: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ ist für $a \neq 0$ bijektiv mit

$$\lim_{x \rightarrow \infty} p_a(x) = \begin{cases} \infty & \text{für } a > 0, \\ 0 & \text{für } a < 0, \end{cases}$$

und

$$\lim_{x \rightarrow 0} p_a(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } a > 0, \\ \infty & \text{für } a < 0. \end{cases}$$



Beweis. Für den Beweis der einzelnen Eigenschaften verwenden wir die Definitionen 7.7 und 7.12, um die allgemeine Potenzfunktion p_a als $p_a(x) = x^a = \exp(a \log(x))$ für $x \in (0, \infty)$ zu schreiben, und die jeweiligen Eigenschaften der Exponential- und Logarithmusfunktion aus Lemma 7.1 und Lemma 7.3. Dazu stellen wir zunächst fest, dass $p_a(x)$ für $x \in (0, \infty)$ als Exponential eines reellen Arguments positiv ist und somit tatsächlich zu $(0, \infty)$ gehört.

- (i) Für $a = 0$ gilt $p_a \equiv 1$ auf $(0, \infty)$ und daher ist in diesem Fall nichts zu zeigen. Da die Logarithmusfunktion auf $(0, \infty)$ nach Lemma 7.3 (iii) streng monoton wachsend ist, ist die Abbildung $(0, \infty) \ni x \mapsto a \log(x)$ für $a > 0$ streng monoton wachsend und für $a < 0$ streng monoton fallend. Da die Exponentialfunktion auf $\mathbb{R}$ nach Lemma 7.1 (iii) ebenfalls streng monoton wachsend ist, erhalten wir insgesamt für $x, \tilde{x} \in (0, \infty)$

$$x < \tilde{x} \quad \Rightarrow \quad a \log(x) < a \log(\tilde{x}) \quad \Rightarrow \quad x^a = \exp(a \log(x)) < \exp(a \log(\tilde{x})) = \tilde{x}^a$$

für $a > 0$ und

$$x < \tilde{x} \quad \Rightarrow \quad a \log(x) > a \log(\tilde{x}) \quad \Rightarrow \quad x^a = \exp(a \log(x)) > \exp(a \log(\tilde{x})) = \tilde{x}^a$$

für $a < 0$. Damit ist das behauptete Monotonieverhalten von p_a auf $(0, \infty)$ bewiesen.

- (ii) Da die Exponential- und Logarithmusfunktion nach Lemma 7.1 (iv) bzw. Lemma 7.3 (iv) beide stetig sind, ist die Potenzfunktion p_a auf $(0, \infty)$ als Verkettung stetiger Funktionen nach Satz 6.39 stetig.
(iii) Da die Logarithmusfunktion $\log: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ nach Lemma 7.3 (vi) bijektiv ist, bildet auch die Abbildung $(0, \infty) \ni x \mapsto a \log(x)$ für $a \neq 0$ bijektiv nach $\mathbb{R}$ ab. Da die Exponentialfunktion $\exp: \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$ nach Lemma 7.1 (vi) bijektiv ist, ist auch $p_a: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ als Verkettung bijektiver Funktionen gemäß Lemma 1.63 wieder bijektiv (alternativ können wir auch über die

Stetigkeit von p_a , die nachfolgenden Grenzwerte und den Zwischenwertsatz 6.59 argumentieren). Aus Lemma 7.3 (vi) folgern wir außerdem

$$\lim_{x \rightarrow \infty} a \log(x) = \begin{cases} \infty & \text{für } a > 0, \\ -\infty & \text{für } a < 0, \end{cases} \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow 0} a \log(x) = \begin{cases} -\infty & \text{für } a > 0, \\ \infty & \text{für } a < 0. \end{cases}$$

Damit folgt die Behauptung über die Grenzwerte von p_a bei $x \rightarrow \infty$ bzw. bei $x \rightarrow 0$ aus den Grenzwerten der Exponentialfunktion bei $x \rightarrow \pm\infty$ aus Lemma 7.1 (vi). $\square$

Bemerkung 7.14. Da die allgemeine Potenzfunktion $p_a: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ für $a \neq 0$ bijektiv ist, hat sie eine Umkehrfunktion. Diese ist nach Lemma 7.9 (iv) gerade durch $p_{a^{-1}}$ gegeben.

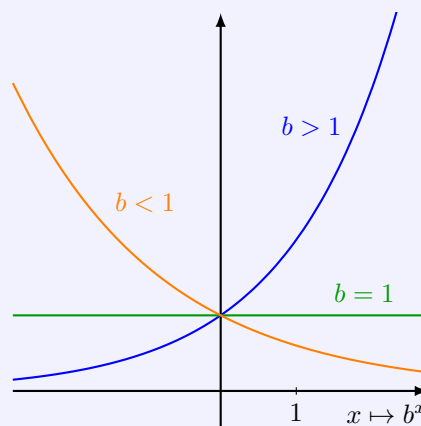
Lemma 7.15 (elementare Eigenschaften allgemeiner Exponentialfunktionen). Es sei $b \in (0, \infty)$. Für die allgemeine Exponentialfunktion $\exp_b: \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$ gelten die folgenden Eigenschaften:

- (i) $\exp_b$ ist für $b > 1$ streng monoton wachsend, für $b = 1$ konstant und für $b \in (0, 1)$ streng monoton fallend,
- (ii) $\exp_b$ ist stetig auf $\mathbb{R}$,
- (iii) $\exp_b: \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$ ist für $b \neq 1$ bijektiv mit

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \exp_b(x) = \begin{cases} \infty & \text{für } b > 1, \\ 0 & \text{für } b \in (0, 1), \end{cases}$$

und

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \exp_b(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } b > 1, \\ \infty & \text{für } b \in (0, 1). \end{cases}$$



Beweis. Der Beweis geht vollkommen analog zum Beweis von Lemma 7.13. $\square$

Bemerkung 7.16. Da die Funktion $\exp_b: \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$ für $b \in (0, \infty) \setminus \{1\}$ bijektiv ist, hat sie eine Umkehrfunktion, die wir als die Logarithmusfunktion zur Basis b bezeichnen und mit $\log_b: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ notieren. Über die Definition der allgemeinen Exponentialfunktion sehen wir die Äquivalenzen

$$\log_b(y) = x \Leftrightarrow \exp(x \log(b)) = \exp_b(x) = y \Leftrightarrow x \log(b) = \log(y)$$

für $x \in \mathbb{R}$ und $y \in (0, \infty)$, so dass sich sofort die Darstellungsformel

$$\log_b(y) = \frac{\log(y)}{\log(b)} \quad \text{für alle } y \in (0, \infty)$$

ergibt. Folglich kann man über die Eigenschaften der natürlichen Logarithmusfunktion sofort auf die der Logarithmusfunktion zu einer beliebigen Basis b schließen.

Übung 7.17. Es sei $a > 0$ beliebig. Zeigen Sie

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log(x)}{x^a} = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow 0} x^a \log(x) = 0.$$

★ **Übung 7.18** (Charakterisierung der allgemeinen Exponentialfunktion über die Funktionalgleichung). Es sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, die in $x_0 = 0$ stetig ist und die die Funktionalgleichung

$$f(x + \tilde{x}) = f(x) \cdot f(\tilde{x}) \quad \text{für alle } x, \tilde{x} \in \mathbb{R}$$

erfüllt. Zeigen Sie, dass dann entweder $b := f(1) > 0$ und $f = \exp_b$ oder aber $f \equiv 0$ gilt.

7.3 Die trigonometrischen Funktionen

Mithilfe der Exponentialfunktion lassen sich die sogenannten trigonometrischen Funktionen (oder auch Winkelfunktionen) erzeugen. In diesem Kapitel beschäftigen wir uns in erster Linie mit der Cosinus- und Sinusfunktion, deren wichtigsten Eigenschaften wir nun mithilfe der in den Kapitel 5 und 6 zur Verfügung gestellten Techniken diskutieren.

Definition und einfache Eigenschaften. Für die Cosinus- und Sinusfunktion auf der reellen Achse $\mathbb{R}$ gibt es eine einfache geometrische Interpretation. Dazu betrachten wir ein beliebiges $x \in \mathbb{R}$ und berechnen mithilfe der Übung 5.10 sowie der Funktionalgleichung der Exponentialfunktion

$$\begin{aligned} |\exp(x i)|^2 &= \exp(x i) \cdot \overline{\exp(x i)} \\ &= \exp(x i) \cdot \exp(-x i) = \exp(0) = 1, \end{aligned} \quad (7.1)$$

was nichts anderes bedeutet, als dass $\exp(x i)$ auf dem Rand des Kreises $B_1(0) \subset \mathbb{C}$ liegt. Der Cosinus $\cos(x)$ und der Sinus $\sin(x)$ stellen dann den Real- bzw. Imaginärteil von $\exp(x i)$ dar, also

$$\cos(x) = \operatorname{Re}(\exp(x i)) = \frac{\exp(x i) + \exp(-x i)}{2}$$

und

$$\sin(x) = \operatorname{Im}(\exp(x i)) = \frac{\exp(x i) - \exp(-x i)}{2 i}$$

nach Lemma 3.7 (iv). Wir definieren nun den Cosinus und Sinus auf $\mathbb{C}$, indem wir auf der rechten Seite der beiden Gleichungen komplexe Argumente zulassen.

Definition 7.19 (Cosinus und Sinus). Wir definieren die Cosinusfunktion $\cos: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ und die Sinusfunktion $\sin: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ über

$$\cos(z) := \frac{\exp(z i) + \exp(-z i)}{2} \quad \text{und} \quad \sin(z) := \frac{\exp(z i) - \exp(-z i)}{2 i} \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C}.$$

Bemerkungen 7.20.

- (1) Nach der Definition des Cosinus und Sinus gilt die Eulersche Formel

$$\exp(z i) = \cos(z) + \sin(z) i \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C}.$$

Im Fall $z = x \in \mathbb{R}$ haben $\cos(x)$ und $\sin(x)$ wie oben dargestellt die Bedeutung des Real- und Imaginärteils der komplexen Zahl $\exp(x i)$. Für komplexe Zahlen $z \in \mathbb{C}$ sind $\cos(z)$ und $\sin(z)$ im Allgemeinen keine reellen Zahlen und haben damit auch nicht mehr die Bedeutung des Real- und Imaginärteils der komplexen Zahl $\exp(z i)$ (beispielsweise ist $\sin(i)$ rein komplex).

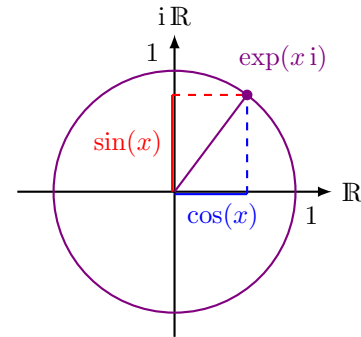
- (2) Es kommen häufig Potenzen von Cosinus und Sinus vor. Hierbei verwenden wir die Schreibweise $\cos^k(z)$ und $\sin^k(z)$ anstelle von $(\cos(z))^k$ bzw. $(\sin(z))^k$, für $k \in \mathbb{N}$ und $z \in \mathbb{C}$.

Lemma 7.21 (Rechenregeln für Cosinus und Sinus). Für beliebige $z, w \in \mathbb{C}$ gelten die folgenden Aussagen:

- (i) Es gilt der trigonometrische Pythagoras $\cos^2(z) + \sin^2(z) = 1$.
(ii) Die Funktion $\cos$ ist gerade und die Funktion $\sin$ ist ungerade, d.h. es gilt

$$\cos(-z) = \cos(z) \quad \text{und} \quad \sin(-z) = -\sin(z).$$

- (iii) Die Werte von $\cos$ und $\sin$ in 0 sind $\cos(0) = 1$ und $\sin(0) = 0$.



(iv) *Es gelten die Additionstheoreme*

$$\begin{aligned}\cos(z+w) &= \cos(z)\cos(w) - \sin(z)\sin(w), \\ \sin(z+w) &= \sin(z)\cos(w) + \cos(z)\sin(w).\end{aligned}$$

Beweis. Alle Aussagen werden im Wesentlichen anhand der Definition 7.19 von Cosinus und Sinus und der Funktionalgleichung der Exponentialfunktion aus Lemma 7.1 (i) (oder Beispiel 5.44 (ii)) einfach nachgerechnet.

(i) Mit den binomischen Formeln und der Funktionalgleichung für die Exponentialfunktion sehen wir

$$\begin{aligned}\cos^2(z) + \sin^2(z) &= \frac{1}{4}(\exp(zi) + \exp(-zi))^2 + \frac{1}{4i^2}(\exp(zi) - \exp(-zi))^2 \\ &= \frac{1}{4}(\exp(zi) + \exp(-zi))^2 - \frac{1}{4}(\exp(zi) - \exp(-zi))^2 \\ &= \exp(zi) \cdot \exp(-zi) = \exp(0) = 1.\end{aligned}$$

(ii) Dass der Cosinus eine gerade und der Sinus eine ungerade Funktion auf $\mathbb{C}$ ist, ergibt sich direkt aus

$$\cos(z) = \frac{\exp(zi) + \exp(-zi)}{2} = \frac{\exp(-zi) + \exp(-(-z)i)}{2} = \cos(-z)$$

sowie

$$\sin(z) = \frac{\exp(zi) - \exp(-zi)}{2i} = -\frac{\exp(-zi) - \exp(-(-z)i)}{2i} = -\sin(-z).$$

(iii) Mit $\exp(0) = 1$ erhalten wir sofort $\cos(0) = 1$ und $\sin(0) = 0$.

(iv) Mit der Funktionalgleichung für die Exponentialfunktion, der Eulerschen Formel aus Bemerkung 7.20 (1) und (ii) berechnen wir

$$\begin{aligned}\cos(z+w) &= \frac{1}{2}\exp((z+w)i) + \frac{1}{2}\exp(-(z+w)i) \\ &= \frac{1}{2}\exp(zi) \cdot \exp(wi) + \frac{1}{2}\exp(-zi) \cdot \exp(-wi) \\ &= \frac{1}{2}(\cos(z) + \sin(z)i) \cdot (\cos(w) + \sin(w)i) + \frac{1}{2}(\cos(-z) + \sin(-z)i) \cdot (\cos(-w) + \sin(-w)i) \\ &= \frac{1}{2}(\cos(z) + \sin(z)i) \cdot (\cos(w) + \sin(w)i) + \frac{1}{2}(\cos(z) - \sin(z)i) \cdot (\cos(w) - \sin(w)i) \\ &= \cos(z)\cos(w) - \sin(z)\sin(w),\end{aligned}$$

wobei sich in der letzten Zeile gerade alle Terme mit Faktor i kürzen. Analog berechnen wir

$$\begin{aligned}\sin(z+w) &= \frac{1}{2i}\exp((z+w)i) - \frac{1}{2i}\exp(-(z+w)i) \\ &= \frac{1}{2i}\exp(zi) \cdot \exp(wi) - \frac{1}{2i}\exp(-zi) \cdot \exp(-wi) \\ &= \frac{1}{2i}(\cos(z) + \sin(z)i) \cdot (\cos(w) + \sin(w)i) - \frac{1}{2i}(\cos(-z) + \sin(-z)i) \cdot (\cos(-w) + \sin(-w)i) \\ &= \frac{1}{2i}(\cos(z) + \sin(z)i) \cdot (\cos(w) + \sin(w)i) - \frac{1}{2i}(\cos(z) - \sin(z)i) \cdot (\cos(w) - \sin(w)i) \\ &= \sin(z)\cos(w) + \cos(z)\sin(w),\end{aligned}$$

wobei sich hier wegen des anderen Vorzeichens beim Sinus genau die anderen Terme im Vergleich zur obigen Rechnung kürzen. $\square$

Übung 7.22. Zeigen Sie für beliebige $z, w \in \mathbb{C}$ die folgenden Aussagen:

- $\cos(2z) = \cos^2(z) - \sin^2(z)$,
- $\sin(2z) = 2 \sin(z) \cos(z)$,
- $\cos(z) - \cos(w) = -2 \sin\left(\frac{z+w}{2}\right) \sin\left(\frac{z-w}{2}\right)$,
- $\sin(z) - \sin(w) = 2 \cos\left(\frac{z+w}{2}\right) \sin\left(\frac{z-w}{2}\right)$.

Als nächstes leiten wir aus der Potenzreihendarstellung der Exponentialfunktion die entsprechenden Darstellungen für die Cosinus- und Sinusfunktion her, die sich für deren genauere Untersuchung als nützlich erweisen werden.

Lemma 7.23 (Potenzreihendarstellung von Cosinus und Sinus). *Die Cosinusfunktion $\cos: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ und die Sinusfunktion $\sin: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ sind stetig. Sie haben die Potenzreihendarstellungen*

$$\begin{aligned}\cos(z) &= \sum_{\ell=0}^{\infty} (-1)^\ell \frac{z^{2\ell}}{(2\ell)!} = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} \pm \dots, \\ \sin(z) &= \sum_{\ell=0}^{\infty} (-1)^\ell \frac{z^{2\ell+1}}{(2\ell+1)!} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} \pm \dots,\end{aligned}$$

für $z \in \mathbb{C}$, und der Konvergenzradius ist jeweils $R = \infty$.

Beweis. Die Stetigkeit der Cosinus- und Sinusfunktion folgt unmittelbar aus der Stetigkeit der Exponentialfunktion aus Lemma 7.1 (iv). Da die Reihen $\exp(zi)$ und $\exp(-zi)$ für jedes $z \in \mathbb{C}$ konvergieren, dürfen wir die entsprechenden Reihen nach Lemma 5.8 gliedweise addieren und erhalten

$$\begin{aligned}\cos(z) &= \frac{1}{2} (\exp(zi) + \exp(-zi)) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(zi)^k}{k!} + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-zi)^k}{k!} = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(zi)^k + (-1)^k (zi)^k}{k!}\end{aligned}$$

Der Term $(zi)^k + (-1)^k (zi)^k$ verschwindet für ungerade $k \in \mathbb{N}$ und gibt $2(zi)^k$ für gerade $k \in \mathbb{N}_0$. Somit erhalten wir insgesamt

$$\cos(z) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(zi)^{2\ell}}{(2\ell)!} = \sum_{\ell=0}^{\infty} (-1)^\ell \frac{z^{2\ell}}{(2\ell)!}.$$

Für die Sinusfunktion gehen wir analog vor. Hier verschwinden die Glieder mit allen geraden Indizes $k \in \mathbb{N}_0$ und wir bekommen

$$\begin{aligned}\sin(z) &= \frac{1}{2i} (\exp(zi) - \exp(-zi)) \\ &= \frac{1}{2i} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(zi)^k}{k!} - \frac{1}{2i} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-zi)^k}{k!} \\ &= \frac{1}{2i} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(zi)^k - (-1)^k (zi)^k}{k!} = \frac{1}{i} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(zi)^{2\ell+1}}{(2\ell+1)!} = \sum_{\ell=0}^{\infty} (-1)^\ell \frac{z^{2\ell+1}}{(2\ell+1)!}.\end{aligned}$$

Da die Exponentialreihe für alle $z \in \mathbb{C}$ konvergiert, konvergieren auch die Potenzreihendarstellungen der Cosinus- und Sinusfunktion für alle $z \in \mathbb{C}$ und wir haben daher Konvergenzradius $R = \infty$. $\square$

Bemerkung 7.24. Da wir nun die Potenzreihendarstellungen der Cosinus- und Sinusfunktion kennen, können wir Lemma 6.11 anwenden und erhalten insbesondere die beiden Grenzwerte

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin(z)}{z} = 1 \quad \text{und} \quad \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\cos(z) - 1}{z^2} = -\frac{1}{2}.$$

Weitere wichtige trigonometrische Funktionen sind die Tangens- und Cotangensfunktion, die man direkt mithilfe der Cosinus- und Sinusfunktion definiert.

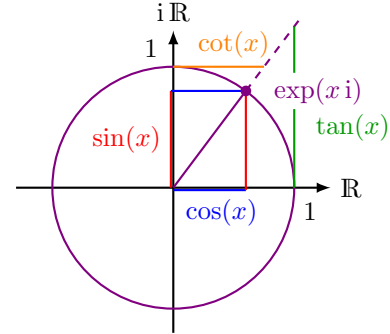
Definition 7.25 (Tangens und Cotangens). Wir definieren die Tangensfunktion $\tan: \mathbb{C} \setminus \cos^{-1}(0) \rightarrow \mathbb{C}$ über

$$\tan(z) := \frac{\sin(z)}{\cos(z)} \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C} \text{ mit } \cos(z) \neq 0$$

und die Cotangensfunktion $\cot: \mathbb{C} \setminus \sin^{-1}(0) \rightarrow \mathbb{C}$ über

$$\cot(z) := \frac{\cos(z)}{\sin(z)} \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C} \text{ mit } \sin(z) \neq 0.$$

Bemerkung 7.26 (geometrische Bedeutung von Tangens und Cotangens). Auch die Tangens- und Cotangensfunktion haben auf der reellen Achse $\mathbb{R}$ eine einfache geometrische Interpretation. Für ein beliebiges $x \in \mathbb{R}$ haben wir in (7.1) nachgerechnet, dass der Punkt $\exp(xi)$ auf dem Rand des Kreises $B_1(0) \subset \mathbb{C}$ liegt. Der Tangens $\tan(x)$ ist für $\operatorname{Re}(\exp(xi)) = \cos(x) \neq 0$ definiert und in diesem Fall nach dem Strahlensatz gerade so bestimmt, dass der Punkt $\operatorname{sign}(\cos(x)) + \tan(x)i$ auf der Gerade durch den Ursprung und den Punkt $\exp(xi)$ liegt. Entsprechend ist der Cotangens $\cot(x)$ für $\operatorname{Im}(\exp(xi)) = \sin(x) \neq 0$ definiert und in diesem Fall so bestimmt, dass der Punkt $\cot(x) + \operatorname{sign}(\sin(x))i$ auf dieser Gerade liegt.



Übung 7.27 (Eigenschaften von Tangens und Cotangens). Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

- (i) Die Funktionen $\tan$ und $\cot$ sind ungerade, d.h. es gilt

$$\tan(-z) = -\tan(z) \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C} \setminus \cos^{-1}(0)$$

und

$$\cot(-z) = -\cot(z) \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C} \setminus \sin^{-1}(0).$$

- (ii) Es gelten die Additionstheoreme

$$\tan(z+w) = \frac{\tan(z) + \tan(w)}{1 - \tan(z)\tan(w)} \quad \text{für alle } z, w \in \mathbb{C} \setminus \cos^{-1}(0) \text{ mit } z+w \in \mathbb{C} \setminus \cos^{-1}(0),$$

$$\cot(z+w) = \frac{\cot(z)\cot(w) - 1}{\cot(z) + \cot(w)} \quad \text{für alle } z, w \in \mathbb{C} \setminus \sin^{-1}(0) \text{ mit } z+w \in \mathbb{C} \setminus \sin^{-1}(0).$$

- (iii) Die Funktionen $\tan$ und $\cot$ sind auf ihren Definitionsbereichen stetig.

Nullstellen und Periodizität. Als Nächstes betrachten wir die trigonometrischen Funktionen auf $\mathbb{R}$ und interessieren uns hierbei für die angenommenen Werte, die Nullstellen sowie die Monotonieeigenschaften. Ausgangspunkt für diese Untersuchungen ist das folgende Lemma über die Cosinus- und Sinusfunktion:

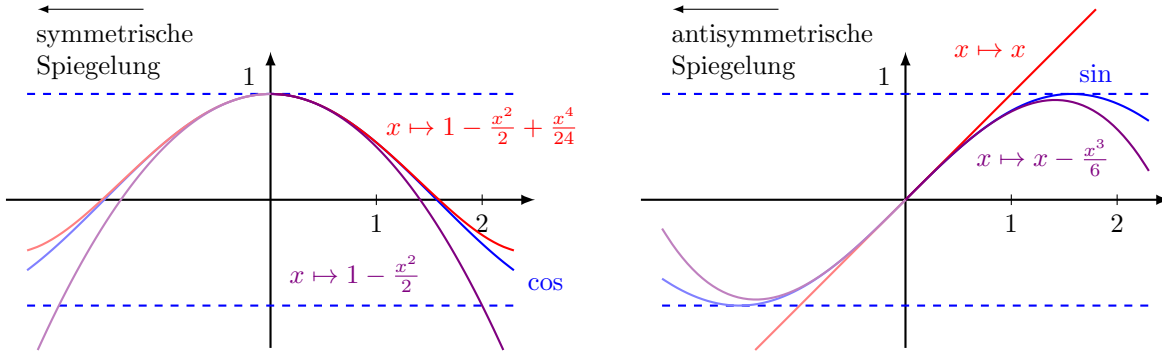
Lemma 7.28.

- (i) Es gilt $\cos(\mathbb{R}), \sin(\mathbb{R}) \subset [-1, 1] \subset \mathbb{R}$.

- (ii) Für $x \in [0, 2]$ gelten die Einschließungseigenschaften

$$1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos(x) \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} \quad \text{und} \quad x - \frac{x^3}{6} \leq \sin(x) \leq x.$$

- (iii) Die Cosinusfunktion ist auf dem Intervall $[0, 2]$ streng monoton fallend und besitzt dort genau eine Nullstelle $x^* \in (0, 2)$.



Beweis.

- (i) Aus Lemma 7.23 wissen wir, dass $\cos(x)$ und $\sin(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ reelle Zahlen sind. Wegen des trigonometrischen Pythagoras $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$ aus Lemma 7.21 (i) haben wir dann $|\cos(x)| \leq 1$ und $|\sin(x)| \leq 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$, so dass die Behauptung $\cos(\mathbb{R}), \sin(\mathbb{R}) \subset [-1, 1]$ folgt.
- (ii) Ist $\sum_{\ell=0}^{\infty} (-1)^\ell a_\ell$ eine alternierende Reihe, bei der die Glieder $\{a_\ell\}_{\ell \in \mathbb{N}}$ eine monotone Nullfolge bilden, so haben wir im Beweis des Leibniz-Kriteriums aus Satz 5.18 (siehe auch Bemerkung 5.19) gezeigt, dass die Partialsummen bis zu einem ungeraden Index eine untere Schranke und bis zu einem geraden Index eine obere Schranke an den Reihenwert darstellen (beachte, dass der Wert von a_0 dabei keine Rolle spielt). Damit gilt

$$\sum_{\ell=0}^{2k+1} (-1)^\ell a_\ell \leq \sum_{\ell=0}^{\infty} (-1)^\ell a_\ell \leq \sum_{\ell=0}^{2k} (-1)^\ell a_\ell \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}_0 \quad (7.2)$$

(und die Ungleichungen sind sogar strikt, wenn $a_\ell > 0$ für alle $\ell \in \mathbb{N}$ gilt). Bei den Potenzreihendarstellungen der Cosinus- und Sinusfunktion aus Lemma 7.23 handelt es sich um solche Reihen: sie sind beide offensichtlich alternierend, und für alle $\ell \in \mathbb{N}$ und alle $x \in [0, 2]$ gilt

$$\frac{a_{\ell+1}}{a_\ell} = \frac{x^{2\ell+2}}{(2\ell+2)!} \cdot \frac{(2\ell)!}{x^{2\ell}} \leq \frac{x^2}{(2\ell+2)(2\ell+1)} \leq \frac{2^2}{4 \cdot 3} < 1$$

für die Glieder der Reihe $\cos(x)$ sowie

$$\frac{a_{\ell+1}}{a_\ell} = \frac{x^{2\ell+3}}{(2\ell+3)!} \cdot \frac{(2\ell+1)!}{x^{2\ell+1}} \leq \frac{x^2}{(2\ell+3)(2\ell+2)} \leq \frac{2^2}{5 \cdot 4} < 1$$

für die Glieder der Reihe $\sin(x)$. Die Einschließungseigenschaften ergeben sich nun direkt aus (7.2) mit der Beobachtung, dass auf der linken bzw. rechten Seite der angegebenen Ungleichungen für $\cos(x)$ und $\sin(x)$ jeweils Partialsummen bis zu einem ungeraden bzw. geraden Index stehen.

- (iii) Wir betrachten zunächst $x, \tilde{x} \in [0, 2]$ mit $x < \tilde{x}$. Anhand von Übung 7.22 haben wir

$$\cos(\tilde{x}) - \cos(x) = -2 \sin\left(\frac{\tilde{x} + x}{2}\right) \sin\left(\frac{\tilde{x} - x}{2}\right) < 0,$$

wobei wir hier ausgenutzt haben, dass $\frac{\tilde{x}+x}{2}, \frac{\tilde{x}-x}{2} \in (0, 2)$ gilt und die Sinusfunktion aufgrund der Einschließungseigenschaft aus (ii) auf dem offenen Intervall $(0, 2)$ positiv ist. Damit ist die Cosinusfunktion auf dem Intervall $[0, 2]$ streng monoton fallend und insbesondere injektiv.

Für die Auswertung der Cosinusfunktion bei $x = 0$ und $x = 2$ wissen wir nach Lemma 7.21 (iii) und der Einschließungseigenschaft aus (ii)

$$\cos(0) = 1 > 0 \quad \text{und} \quad \cos(2) \leq 1 - \frac{2^2}{2} + \frac{2^4}{24} = -\frac{1}{3} < 0.$$

Da $\cos: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ nach Lemma 7.23 stetig ist, folgt die Existenz einer Nullstelle $x^* \in (0, 2)$ der Cosinusfunktion aus dem Nullstellensatz von Korollar 6.60. Wegen der Injektivität der Cosinusfunktion auf $[0, 2]$ ist diese Nullstelle zudem eindeutig. $\square$

Die (klassische) Definition der Kreiszahl π in der Geometrie ist es zwar, das Verhältnis aus dem Umfang eines (zwei-dimensionalen) Kreises und dem zugehörigen Durchmesser zu nehmen, in der Analysis verwenden wir jedoch die (äquivalente) Definition über das Doppelte der zuvor bestimmten (kleinsten positiven) Nullstelle der Cosinusfunktion.

Definition 7.29 (Kreiszahl π). *Wie definieren die Kreiszahl π als $2x^*$ mit $x^* = \min\{x > 0: \cos(x) = 0\}$ aus Lemma 7.28 (iii), also das Doppelte der kleinsten positiven Nullstelle der Cosinusfunktion.*

Bemerkungen 7.30.

- (1) *Es gibt verschiedene Verfahren, mit denen man den Wert von π approximieren kann. Die Näherung als Bruch $\frac{22}{7}$ oder über die ersten paar Nachkommastellen $3,1415926\dots$ ¹ ist für die meisten Anwendungen völlig ausreichend².*
- (2) *Wir können uns nun sehr einfach einige Werte der Cosinus- und Sinusfunktion überlegen. Nach Definition von π gilt $\cos(\frac{\pi}{2}) = 0$, und damit muss $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$ nach dem trigonometrischen Pythagoras aus Lemma 7.21 (i) und wegen der Positivität der Sinusfunktion auf $[0, 2]$ aus Lemma 7.28 (ii) gelten. Folglich gilt nach der Eulerschen Formel aus Bemerkung 7.20 (1)*

$$\exp\left(\frac{\pi}{2}i\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)i = i.$$

Mit der Funktionalgleichung für die Exponentialfunktion aus Beispiel 5.44 (ii) erhalten wir dann

$$\exp\left(m \cdot \frac{\pi}{2}i\right) = \left(\exp\left(\frac{\pi}{2}i\right)\right)^m = i^m \quad \text{für alle } m \in \mathbb{Z},$$

so dass wir wiederum über die Eulersche Formel die Werte der Cosinus- und Sinusfunktion für ganzzahlige Vielfache von $\frac{\pi}{2}$ erhalten:

x	$\dots$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π	$\dots$
$\exp(xi)$	$\dots$	1	i	-1	$-i$	1	$\dots$
$\cos(x)$	$\dots$	1	0	-1	0	1	$\dots$
$\sin(x)$	$\dots$	0	1	0	-1	0	$\dots$

Insbesondere haben wir nach Definition 7.7 der allgemeinen Potenzen die Gültigkeit der Eulerschen Identität

$$e^{\pi i} + 1 = 0$$

gezeigt. Diese Identität wird als eine der schönsten Gleichungen der Mathematik angesehen, da sie die drei wichtigen Konstanten der Eulerschen Zahl e , der Kreiszahl π und der imaginären Einheit i mit den neutralen Elementen 0 der Addition und 1 der Multiplikation in Beziehung setzt.

Lemma 7.31. *Für die Cosinus- und Sinusfunktion gelten die folgenden Aussagen:*

- (i) *Es gilt $\cos(z) = \sin(z + \frac{\pi}{2}) = -\cos(z + \pi) = -\sin(z + \frac{3\pi}{2}) = \cos(z + 2\pi)$ für alle $z \in \mathbb{C}$.*

¹Merksatz: How I wish I could enumerate Pi easily ...

²Mit dem sogenannten *Indiana Pi Bill* wurde im Jahr 1897 ein Gesetzentwurf im Bundesstaat Indiana vorgelegt, das eine einfache Methode zur Quadratur des Kreises enthält. Wendet man diese Methode an, so ergibt sich für π als Verhältnis des Umfangs eines Kreises zu seinem Durchmesser oder äquivalent dazu als Fläche eines Kreises mit dem Radius 1 ein falscher Wert. Der Gesetzentwurf wurde vom Repräsentantenhaus ohne Gegenstimme angenommen, nach Intervention durch den zufällig als Gast anwesenden Mathematikprofessor Clarence A. Waldo wurde die endgültige Verabschiedung aber auf unbestimmte Zeit vertagt.

(ii) Die Nullstellenmengen sind gegeben durch

$$\begin{aligned}\{z \in \mathbb{C}: \cos(z) = 0\} &= \frac{\pi}{2} + \mathbb{Z} \cdot \pi = \{z \in \mathbb{C}: z = \frac{\pi}{2} + m \cdot \pi \text{ für ein } m \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{R}, \\ \{z \in \mathbb{C}: \sin(z) = 0\} &= \mathbb{Z} \cdot \pi = \{z \in \mathbb{C}: z = m \cdot \pi \text{ für ein } m \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Beweis.

- (i) Alle Identitäten folgen aus den Additionstheoremen für die Cosinus- und Sinusfunktion aus Lemma 7.21 (iv), wenn wir $w \in \{\frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi\}$ wählen und die Wertetabelle aus Bemerkung 7.30 (2) ausnutzen. So erhalten wir für alle $z \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned}\cos(z + \pi) &= \cos(z) \cos(\pi) - \sin(z) \sin(\pi) = -\cos(z), \\ \cos(z + 2\pi) &= \cos(z) \cos(2\pi) - \sin(z) \sin(2\pi) = \cos(z)\end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}\sin(z + \frac{\pi}{2}) &= \sin(z) \cos(\frac{\pi}{2}) + \cos(z) \sin(\frac{\pi}{2}) = \cos(z), \\ \sin(z + \frac{3\pi}{2}) &= \sin(z) \cos(\frac{3\pi}{2}) + \cos(z) \sin(\frac{3\pi}{2}) = -\cos(z).\end{aligned}$$

- (ii) Wir untersuchen zunächst die Nullstellen der Cosinusfunktion. Anhand von (i) und vollständiger Induktion sehen wir, dass

$$\cos(z + m \cdot \pi) = (-1)^m \cos(z) \quad \text{für alle } m \in \mathbb{Z} \text{ und } z \in \mathbb{C} \quad (7.3)$$

gilt. Mit $\cos(\frac{\pi}{2}) = 0$ folgt, dass $\frac{\pi}{2} + m \cdot \pi$ für jedes $m \in \mathbb{Z}$ eine Nullstelle der Cosinusfunktion ist. Um weitere Nullstellen auszuschließen, betrachten wir die Cosinusfunktion zunächst auf der reellen Achse $\mathbb{R}$. Da $\frac{\pi}{2}$ nach Definition 7.29 von π die kleinste positive Nullstelle der Cosinusfunktion auf $\mathbb{R}$ ist und die Cosinusfunktion nach Lemma 7.21 (ii) gerade ist, gilt $\cos(x) \neq 0$ für alle $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Wegen (7.3) ist $\frac{\pi}{2} + \mathbb{Z} \cdot \pi$ damit die Menge aller Nullstellen der Cosinusfunktion auf $\mathbb{R}$. Schließlich zeigen wir, dass der Imaginärteil aller Nullstellen $z \in \mathbb{C}$ der Cosinusfunktion verschwindet und es daher keine weiteren Nullstellen der Cosinusfunktion auf $\mathbb{C}$ gibt. Mit der Funktionalgleichung der Exponentialfunktion aus Beispiel 5.44 (ii) haben wir für $z \in \mathbb{C}$ die Äquivalenzen

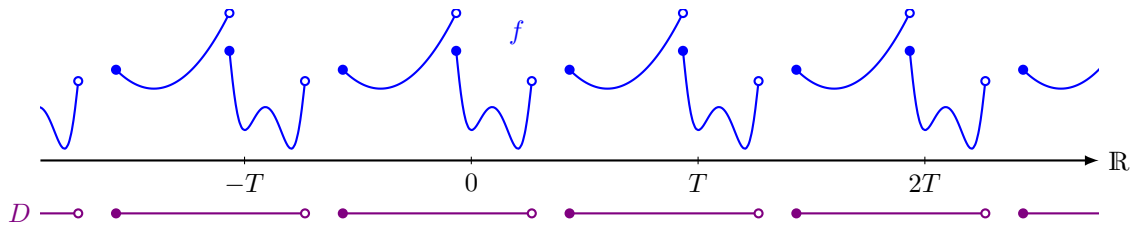
$$\begin{aligned}\cos(z) = 0 &\Leftrightarrow \exp(zi) = -\exp(-zi) \Leftrightarrow \exp(2zi) = -1 \\ &\Leftrightarrow \exp(2\operatorname{Re}(z)i) \cdot \exp(-2\operatorname{Im}(z)) = -1.\end{aligned}$$

Wegen (7.1) wissen wir bereits $|\exp(2\operatorname{Re}(z)i)| = 1$ und nach Lemma 7.1 (vi) gilt $\exp(\mathbb{R}) = (0, \infty)$. Im Fall $\cos(z) = 0$ muss folglich $\exp(-2\operatorname{Im}(z)) = 1$ gelten, was gerade $\operatorname{Im}(z) = 0$ bedeutet. Damit haben wir insgesamt gezeigt, dass die Nullstellenmenge der Cosinusfunktion eine Teilmenge von $\mathbb{R}$ ist und wie behauptet durch $\frac{\pi}{2} + \mathbb{Z} \cdot \pi$ gegeben ist. Mit $\cos(z) = \sin(z + \frac{\pi}{2})$ für alle $z \in \mathbb{C}$ gemäß (i) ergibt sich dann unmittelbar die Nullstellenmenge der Sinusfunktion als $\mathbb{Z} \cdot \pi$. $\square$

Definition 7.32 (periodische Funktion und Minimalperiode). *Es sei $D \subset \mathbb{R}$ eine Menge. Wir nennen eine Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ periodisch mit Periode $T \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, falls*

$$x + T \in D \quad \text{und} \quad f(x) = f(x + T) \quad \text{für alle } x \in D$$

gilt. Falls f nicht konstant ist, so bezeichnen wir in diesem Fall die kleinste Periode $T > 0$ als die Minimalperiode oder primitive Periode von f .



Satz 7.33 (Periodizität der trigonometrischen Funktionen).

- (i) Die Cosinusfunktion $\cos: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und die Sinusfunktion $\sin: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sind periodisch mit Minimalperiode 2π .
- (ii) Die Tangensfunktion $\tan: \mathbb{R} \setminus (\frac{\pi}{2} + \mathbb{Z} \cdot \pi) \rightarrow \mathbb{R}$ und die Cotangensfunktion $\cot: \mathbb{R} \setminus (\mathbb{Z} \cdot \pi) \rightarrow \mathbb{R}$ sind periodisch mit Minimalperiode π .

Beweis.

- (i) Dass die Cosinus- und Sinusfunktion auf $\mathbb{R}$ periodisch mit Periode 2π sind, erkennen wir direkt anhand der Aussage von Lemma 7.31 (i). Da alle Nullstellen der Cosinus- und Sinusfunktion jeweils ein ganzzahliges Vielfaches von π als Abstand haben, muss jede Periode ein ganzzahliges Vielfaches von π sein. Wegen $\cos(0) = 1 = -\cos(\pi)$ ist π keine Periode. Somit ist 2π tatsächlich die Minimalperiode der Cosinus- und Sinusfunktion.
- (ii) Für $z \in \mathbb{C} \setminus (\frac{\pi}{2} + \mathbb{Z} \cdot \pi)$ erhalten wir über Lemma 7.31 (i) zunächst

$$\tan(z + \pi) = \frac{\sin(z + \pi)}{\cos(z + \pi)} = \frac{-\sin(z)}{-\cos(z)} = \tan(z)$$

sowie

$$\cot(z + \frac{\pi}{2}) = \frac{\cos(z + \frac{\pi}{2})}{\sin(z + \frac{\pi}{2})} = \frac{-\sin(z)}{\cos(z)} = -\tan(z).$$

Damit haben wir insgesamt

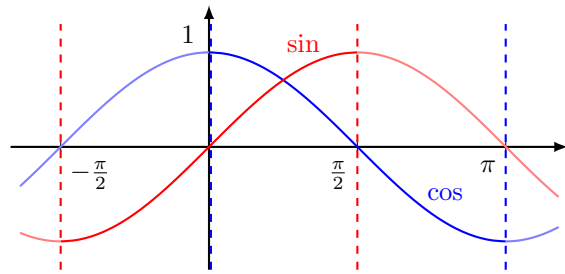
$$\tan(z) = -\cot(z + \frac{\pi}{2}) = \tan(z + \pi) \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C} \setminus (\frac{\pi}{2} + \mathbb{Z} \cdot \pi). \quad (7.4)$$

Daraus folgt, dass die Tangens- und Cotangensfunktion auf ihren Definitionsmengen periodisch mit Periode π sind. Da die Definitionslücken immer ein ganzzahliges Vielfaches von π als Abstand haben, ist π die Minimalperiode der Tangens- und Cotangensfunktion. $\square$

Umkehrfunktionen trigonometrischer Funktionen. Wir interessieren uns nun für Umkehrfunktionen trigonometrischer Funktionen. Dafür müssen wir diese Funktionen zunächst auf Mengen einschränken, so dass sie bijektiv auf ihren jeweiligen Wertebereich abbilden.

Lemma 7.34.

- (i) Die Cosinusfunktion $\cos: [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$ ist streng monoton fallend und bijektiv.
- (ii) Die Sinusfunktion $\sin: [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [-1, 1]$ ist streng monoton wachsend und bijektiv.
- (iii) Die Tangensfunktion $\tan: (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}$ ist streng monoton wachsend und bijektiv.
- (iv) Die Cotangensfunktion $\cot: (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$ ist streng monoton fallend und bijektiv.

*Beweis.*

- (i) Aus Lemma 7.28 (iii) und der Definition 7.29 von π wissen wir bereits, dass $\cos: [0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [-1, 1]$ streng monoton fallend ist. Mit Lemma 7.21 (ii) und Lemma 7.31 (i) haben wir außerdem

$$\cos(z) = \cos(-z) = -\cos(-z + \pi) \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C},$$

so dass $\cos: [\frac{\pi}{2}, \pi] \rightarrow [-1, 1]$ ebenfalls streng monoton fallend ist. Damit ist die Cosinusfunktion auf dem Intervall $[0, \pi]$ insgesamt streng monoton fallend. Nach Lemma 6.71 ist sie als stetige

Funktion auf diesem Intervall $[0, \pi]$ injektiv, und wegen $\cos(0) = 1$ und $\cos(\pi) = -1$ bildet sie nach Lemma 6.69 auch surjektiv nach $[-1, 1]$ ab.

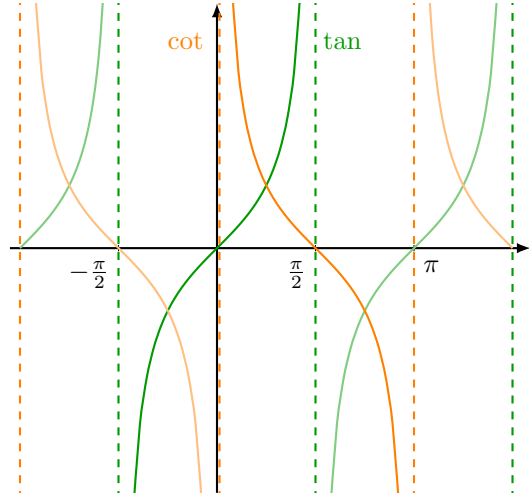
- (ii) Mit Lemma 7.31 (i) und Lemma 7.21 (ii) sehen wir zunächst $\sin(z) = \cos(z - \frac{\pi}{2}) = \cos(\frac{\pi}{2} - z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Mithilfe von (i) folgt dann unmittelbar, dass die Sinusfunktion $\sin: [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [-1, 1]$ streng monoton wachsend und bijektiv ist.

- (iii) Wir betrachten zunächst das Intervall $[0, \frac{\pi}{2})$. Hier ist die Cosinusfunktion streng monoton fallend und positiv und damit $x \mapsto (\cos(x))^{-1}$ streng monoton wachsend und positiv. Da die Sinusfunktion auf $[0, \frac{\pi}{2})$ ebenfalls streng monoton wachsend und nicht-negativ ist, ist die Tangensfunktion $\tan: [0, \frac{\pi}{2}) \rightarrow [0, \infty)$ als Produkt zweier streng monoton wachsender, nicht-negativer Funktionen ebenfalls streng monoton wachsend und nicht-negativ. Da der Tangens ungerade ist, folgern wir schließlich, dass $\tan: (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}$ streng monoton wachsend und damit auch injektiv ist. Berücksichtigen wir noch $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1 = -\sin(-\frac{\pi}{2})$, $\cos(-\frac{\pi}{2}) = 0 = \cos(\frac{\pi}{2})$ und die Positivität der Cosinusfunktion auf $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, so ergeben sich die einseitigen Grenzwerte

$$\lim_{x \searrow -\frac{\pi}{2}} \tan(x) = \lim_{x \searrow -\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = -\infty \quad \text{und} \quad \lim_{x \nearrow \frac{\pi}{2}} \tan(x) = \lim_{x \nearrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \infty.$$

Mit Lemma 6.69 folgt dann, dass die Tangensfunktion bijektiv nach $\mathbb{R}$ abbildet.

- (iv) Mit (7.4) gilt insbesondere $\cot(z) = -\tan(z - \frac{\pi}{2})$ für alle $z \in \mathbb{C} \setminus (\mathbb{Z} \cdot \pi)$. Mit dieser Identität schließen wir aus (iii), dass die Cotangensfunktion $\cot: (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$ streng monoton fallend und bijektiv ist. $\square$



Definition 7.35 (Arkusfunktionen). *Wir bezeichnen*

- (i) die Umkehrfunktion von $\cos: [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$ als den Arkuscosinus $\arccos: [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$,
- (ii) die Umkehrfunktion von $\sin: [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [-1, 1]$ als den Arkussinus $\arcsin: [-1, 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$,
- (iii) die Umkehrfunktion von $\tan: (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}$ als den Arcustangens $\arctan: \mathbb{R} \rightarrow (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$,
- (iv) die Umkehrfunktion von $\cot: (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$ als den Arcuscotangens $\operatorname{arccot}: \mathbb{R} \rightarrow (0, \pi)$.

Bemerkungen 7.36.

- (1) Die Bezeichnung “Arkus” kommt aus dem Lateinischen und bedeutet Bogen. Dies kommt daher, dass die Bogenlänge (entlang des Einheitskreises in mathematisch positiver Orientierung) zwischen $\cos(0) + \sin(0)i = 1$ und $\cos(x) + \sin(x)i$ gerade $x \in [0, 2\pi)$ ist.
- (2) Die Arkusfunktionen sind nach Satz 6.74 auf ihrem Definitionsbereich jeweils stetig.

Polardarstellung komplexer Zahlen. Wir können nun die Bemerkung 3.18 zur Polardarstellung komplexer Zahlen präzisieren.

Satz 7.37 (Polardarstellung komplexer Zahlen). *Für jedes $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ gibt es eindeutige Zahlen $r \in (0, \infty)$ und $\varphi \in (-\pi, \pi]$ mit*

$$z = r \exp(\varphi i).$$

Beweis. Existenz: Wir betrachten zunächst $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ mit $\operatorname{Im}(z) \geq 0$ und setzen

$$r := |z| \in (0, \infty) \quad \text{und} \quad \varphi := \arccos\left(\frac{\operatorname{Re}(z)}{|z|}\right) \in [0, \pi].$$

Um die behauptete Darstellung in diesem Fall nachzuweisen, bemerken wir mit dem trigonometrischen Pythagoras $\sin^2(\varphi) + \cos^2(\varphi) = 1$ aus Lemma 7.21 (i) sowie $\sin(\varphi) \geq 0$ für alle $\varphi \in [0, \pi]$ zunächst

$$\begin{aligned} \cos(\varphi) &= \cos\left(\arccos\left(\frac{\operatorname{Re}(z)}{|z|}\right)\right) = \frac{\operatorname{Re}(z)}{|z|}, \\ \sin(\varphi) &= \sqrt{1 - \cos^2(\varphi)} = \frac{1}{|z|} \sqrt{|z|^2 - (\operatorname{Re}(z))^2} = \frac{|\operatorname{Im}(z)|}{|z|} = \frac{\operatorname{Im}(z)}{|z|}. \end{aligned}$$

Mit der Eulerschen Formel aus Bemerkung 7.20 (1) folgt mit $r = |z|$ dann

$$r \exp(\varphi i) = r \cos(\varphi) + r \sin(\varphi) i = \operatorname{Re}(z) + \operatorname{Im}(z) i = z.$$

Ist dagegen $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ mit $\operatorname{Im}(z) < 0$, so hat die komplex Konjugierte $\bar{z} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ positiven Imaginärteil $\operatorname{Im}(\bar{z}) > 0$. Folglich finden wir nach obiger Argumentation ein $r \in (0, \infty)$ und ein $\tilde{\varphi} \in [0, \pi]$ mit $\bar{z} = r \exp(\tilde{\varphi} i)$, wobei wegen $|z| \sin(\tilde{\varphi}) = \operatorname{Im}(\bar{z}) > 0$ und Lemma 7.31 (ii) tatsächlich sogar $\tilde{\varphi} \in (0, \pi)$ gelten muss. Setzen wir $\varphi := -\tilde{\varphi} \in (-\pi, 0)$, so haben wir

$$r \exp(\varphi i) = r \exp(-\tilde{\varphi} i) = \overline{r \exp(\tilde{\varphi} i)} = \bar{\bar{z}} = z.$$

Damit ist insgesamt bewiesen, dass für jede komplexe Zahl $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ein $r \in (0, \infty)$ und ein $\varphi \in (-\pi, \pi]$ mit $z = r \exp(\varphi i)$ existieren.

Eindeutigkeit. Angenommen, für ein $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ gilt

$$z = r \exp(\varphi i) \quad \text{und} \quad z = \tilde{r} \exp(\tilde{\varphi} i)$$

mit Zahlen $r, \tilde{r} \in (0, \infty)$ und $\varphi, \tilde{\varphi} \in (-\pi, \pi]$. Durch die Betrachtung des Betrags folgt mit (7.1) zunächst

$$r = r |\exp(\varphi i)| = |z| = \tilde{r} |\exp(\tilde{\varphi} i)| = \tilde{r}.$$

Kürzen wir nun $r > 0$ aus den beiden Darstellungen von z , so erhalten wir über Funktionalgleichung der Exponentialfunktion aus Beispiel 5.44 (ii) und die Eulersche Formel aus Bemerkung 7.20 (1)

$$\begin{aligned} r \exp(\varphi i) = z = r \exp(\tilde{\varphi} i) &\Leftrightarrow \exp((\varphi - \tilde{\varphi}) i) = 1 \\ &\Leftrightarrow \cos(\varphi - \tilde{\varphi}) = 1 \quad \text{und} \quad \sin(\varphi - \tilde{\varphi}) = 0. \end{aligned}$$

Wegen $\{\psi \in \mathbb{R} : \cos(\psi) = 1\} = 2\pi \cdot \mathbb{Z}$ und $\varphi, \tilde{\varphi} \in (-\pi, \pi]$ muss daher $\varphi = \tilde{\varphi}$ gelten. Dies zeigt auch die Eindeutigkeit der Polardarstellung. $\square$

Als Folgerung der Polardarstellung komplexer Zahlen aus Satz 7.37 erhalten wir eine Charakterisierung aller Lösungen der Gleichung $z^n = 1$ für $n \in \mathbb{N}$.

Satz 7.38 (Einheitswurzeln). *Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gibt es genau n Lösungen der Gleichung $z^n = 1$, die sogenannten n -ten Einheitswurzeln. Diese sind gegeben als*

$$\zeta_k := \exp\left(2\pi \frac{k}{n} i\right) \quad \text{für } k \in \{1, \dots, n\}.$$

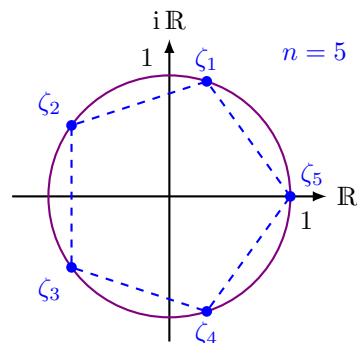
Beweis. Aufgrund von Satz 7.37 bemerken wir zunächst, dass die Zahlen $\zeta_1, \dots, \zeta_n \in \mathbb{C}$ paarweise verschieden sind. Mit der Funktionalgleichung für die Exponentialfunktion aus Beispiel 5.44 (ii), der Eulerschen Formel aus Bemerkung 7.20 (1) und der 2π -Periodizität der Cosinus- und Sinusfunktion aus Satz 7.33 haben wir außerdem

$$\zeta_k^n = \exp(2\pi k i) = \cos(2\pi k) + \sin(2\pi k) i = \cos(0) + \sin(0) i = 1$$

für alle $k \in \{1, \dots, n\}$. Dies zeigt, dass es sich bei $\zeta_1, \dots, \zeta_n$ tatsächlich um n verschiedene Lösungen der Gleichung $z^n = 1$ handelt. Da es sich bei $z^n - 1$ um ein Polynom n -ten Grades handelt, das wegen der Abspaltung von Linearfaktoren höchstens n Nullstellen in $\mathbb{C}$ besitzt, kann es keine weitere Lösung der Gleichung $z^n = 1$ geben. Damit ist die Aussage des Satzes bewiesen. $\square$

Bemerkung 7.39. Die n -ten Einheitswurzeln sind von der Struktur $\zeta_k = \zeta_1^k$ für $k \in \{1, \dots, n\}$ und bilden die Ecken eines regulären n -Ecks. Die Seitenlängen dieses n -Ecks sind wegen (7.1) und der Definition 7.19 der Sinusfunktion für jedes $k \in \{1, \dots, n\}$ (mit $\zeta_{n+1} = \zeta_1$ wegen $\exp(2\pi i) = 1$) gerade

$$\begin{aligned} |\zeta_{k+1} - \zeta_k| &= \left| \exp\left(2\pi \frac{k+1}{n} i\right) - \exp\left(2\pi \frac{k}{n} i\right) \right| \\ &= \left| \exp\left(\pi \frac{2k+1}{n} i\right) \right| \cdot \left| \exp\left(\frac{\pi}{n} i\right) - \exp\left(-\frac{\pi}{n} i\right) \right| \\ &= 2 \sin\left(\frac{\pi}{n}\right). \end{aligned}$$



Der Umfang des regulären n -Ecks ist damit

$$L_n = 2n \sin\left(\frac{\pi}{n}\right).$$

Bilden wir den Grenzwert $n \rightarrow \infty$, so erhalten wir

$$\lim_{n \rightarrow \infty} L_n = \lim_{n \rightarrow \infty} 2n \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} 2\pi \frac{n}{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) = 2\pi \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 2\pi$$

nach Bemerkung 7.24. Da diese regulären n -Ecke den Einheitskreis mit wachsendem $n \in \mathbb{N}$ immer besser approximieren, stellt dieser Grenzwert den Umfang des Einheitskreises dar. Da Umfang und Durchmesser eines zweidimensionalen Kreises beide linear vom Radius abhängen, haben wir π mit dem Verhältnis aus Umfang und Durchmesser eines Kreises (und damit der geometrisch motivierten Definition von π) identifiziert.

Übung 7.40. Es sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$. Zeigen Sie für die n -ten Einheitswurzeln aus Satz 7.38

$$\sum_{k=1}^n \zeta_k = 0.$$

Hyperbolische Funktionen. Eng verwandt mit den trigonometrischen Funktionen sind die hyperbolischen Funktionen.

Definition 7.41 (Cosinus hyperbolicus und Sinus hyperbolicus). Wir definieren den Cosinus hyperbolicus $\cosh: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ und den Sinus hyperbolicus $\sinh: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ über

$$\cosh(z) := \frac{\exp(z) + \exp(-z)}{2} \quad \text{und} \quad \sinh(z) := \frac{\exp(z) - \exp(-z)}{2} \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C}.$$

Bemerkung 7.42. Es gelten offensichtlich die Beziehungen

$$\cosh(z) = \cos(zi) \quad \text{und} \quad \sinh(z) = -\sin(zi)i \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C}, \quad (7.5)$$

so dass sich die Rechenregeln für die hyperbolischen Funktionen (vgl. Übung 7.43) direkt aus den Rechenregeln für die trigonometrischen Funktionen in Lemma 7.21 gewinnen lassen.

Übung 7.43. Zeigen Sie für beliebige $z, w \in \mathbb{C}$ die folgenden Aussagen:

- (i) Es gilt der hyperbolische Pythagoras $\cosh^2(z) - \sinh^2(z) = 1$.
- (ii) Die Funktion $\cosh$ ist gerade und die Funktion $\sinh$ ist ungerade, d.h. es gilt

$$\cosh(-z) = \cosh(z) \quad \text{und} \quad \sinh(-z) = -\sinh(z).$$

(iii) Die Werte von $\cosh$ und $\sinh$ in 0 sind $\cosh(0) = 1$ und $\sinh(0) = 0$.

(iv) Es gelten die *Additionstheoreme*

$$\begin{aligned}\cosh(z + w) &= \cosh(z) \cosh(w) + \sinh(z) \sinh(w), \\ \sinh(z + w) &= \sinh(z) \cosh(w) + \cosh(z) \sinh(w).\end{aligned}$$

Vollkommen analog dazu, wie wir die trigonometrischen Tangens- und Cotangensfunktion in Definition 7.25 mithilfe der Cosinus- und Sinusfunktion definiert haben, können wir die hyperbolische Tangens- und Cotangensfunktion über die hyperbolische Cosinus- und Sinusfunktion definieren.

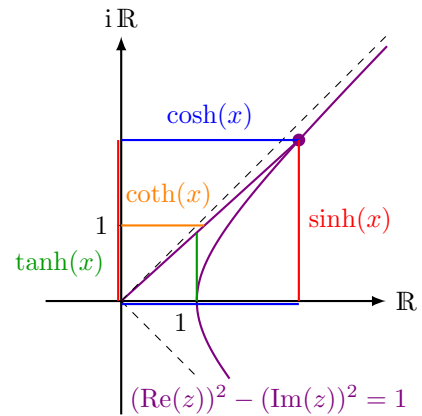
Definition 7.44 (Tangens hyperbolicus und Cotangens hyperbolicus). *Wir definieren den Tangens hyperbolicus $\tanh: \mathbb{C} \setminus \cosh^{-1}(0) \rightarrow \mathbb{C}$ über*

$$\tanh(z) := \frac{\sinh(z)}{\cosh(z)} \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C} \text{ mit } \cosh(z) \neq 0$$

und den Cotangens hyperbolicus $\coth: \mathbb{C} \setminus \sinh^{-1}(0) \rightarrow \mathbb{C}$ über

$$\coth(z) := \frac{\cosh(z)}{\sinh(z)} \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C} \text{ mit } \sinh(z) \neq 0.$$

Bemerkung 7.45 (geometrische Bedeutung der hyperbolischen Funktionen). *Auch die hyperbolischen Funktionen erlauben bei Auswertung auf der reellen Achse $\mathbb{R}$ eine geometrische Interpretation. Betrachten wir ein beliebiges $x \in \mathbb{R}$, so sind $\cosh(x)$, $\sinh(x)$, $\tanh(x)$ und $\coth(x)$ nach Definition reelle Zahlen, mit $\cosh(x) > 0$. Gemäß Übung 7.43 (i) liegt der Punkt $\cosh(x) + \sinh(x)i$ auf der Einheitshyperbel $\{z \in \mathbb{C}: (\operatorname{Re}(z))^2 - (\operatorname{Im}(z))^2 = 1\}$ in der komplexen Ebene $\mathbb{C}$. Analog zu der trigonometrischen Tangens- und Cotangensfunktion (vgl. Bemerkung 7.26) ist der hyperbolische Tangens $\tanh(x)$ und hyperbolische Cotangens $\coth(x)$ nach dem Strahlensatz so bestimmt, dass der Punkt $1 + \tanh(x)i$ bzw. $\coth(x) + \operatorname{sign}(\sinh(x))i$ auf der Gerade durch den Ursprung und den Punkt $\cosh(x) + \sinh(x)i$ liegt.*



Analog zum Vorgehen für den trigonometrischen Cosinus und Sinus im Beweis von Lemma 7.23 (oder alternativ über die Beziehung (7.5) zwischen den trigonometrischen und hyperbolischen Cosinus- und Sinusfunktionen) lassen sich Potenzreihendarstellungen für den hyperbolischen Sinus und Cosinus gewinnen.

Lemma 7.46 (Potenzreihendarstellung von Cosinus hyperbolicus und Sinus hyperbolicus). *Die hyperbolische Cosinusfunktion $\cosh: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ und die hyperbolische Sinusfunktion $\sinh: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ sind stetig. Sie haben die Potenzreihendarstellungen*

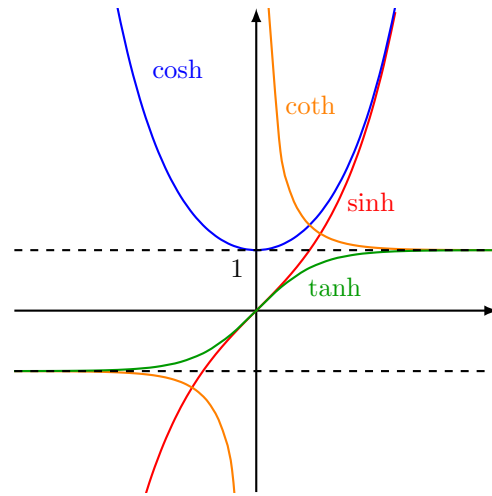
$$\begin{aligned}\cosh(z) &= \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{z^{2\ell}}{(2\ell)!} = 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{z^6}{6!} + \dots, \\ \sinh(z) &= \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{z^{2\ell+1}}{(2\ell+1)!} = z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \frac{z^7}{7!} + \dots,\end{aligned}$$

für $z \in \mathbb{C}$, und der Konvergenzradius ist jeweils $R = \infty$.

Auch können wir die hyperbolischen Funktionen auf Teilmengen von $\mathbb{R}$ betrachten, auf denen sie bijektiv auf ihren jeweiligen Wertebereich abbilden.

Lemma 7.47.

- (i) Der Cosinus hyperbolicus $\cosh: [0, \infty) \rightarrow [1, \infty)$ ist streng monoton wachsend und bijektiv.
- (ii) Der Sinus hyperbolicus $\sinh: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist streng monoton wachsend und bijektiv.
- (iii) Der Tangens hyperbolicus $\tanh: \mathbb{R} \rightarrow (-1, 1)$ ist streng monoton wachsend und bijektiv.
- (iv) Der Cotangens hyperbolicus $\coth: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus [-1, 1]$ ist auf $(-\infty, 0)$ und $(0, \infty)$ jeweils streng monoton fallend und bijektiv.



Beweis.

- (i) Dass der Cosinus hyperbolicus auf $[0, \infty)$ streng monoton wachsend und damit auch injektiv ist, kann man direkt an der Potenzreihendarstellung ablesen, da jedes Glied der Reihe für $\cosh(x)$ streng monoton wachsend in $x \in [0, \infty)$ ist. Mit den Grenzwerten der Exponentialfunktion für $x \rightarrow \pm\infty$ aus Lemma 7.1 (vi) sehen wir

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \cosh(x) = \infty,$$

und mit $\cosh(0) = 1$ folgt die Surjektivität nach $[1, \infty)$ dann über Lemma 6.69.

- (ii) Da die Funktionen $x \mapsto \exp(x)$ und $x \mapsto -\exp(-x)$ auf $\mathbb{R}$ streng monoton wachsend sind, ist der Sinus hyperbolicus nach Definition ebenfalls streng monoton wachsend und damit auch injektiv auf $\mathbb{R}$. Mit

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sinh(x) = \infty \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \sinh(x) = -\infty$$

ergibt sich die Bijektivität nach $\mathbb{R}$ wieder über Lemma 6.69.

- (iii) Schreiben wir den Tangens hyperbolicus um zu

$$\tanh(x) = \frac{\exp(x) - \exp(-x)}{\exp(x) + \exp(-x)} = 1 - \frac{2}{\exp(2x) + 1} \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R},$$

dann sehen wir, dass der Tangens hyperbolicus streng monoton wachsend auf $\mathbb{R}$ und demzufolge auch injektiv ist, da $x \mapsto \exp(2x)$ streng monoton wachsend ist. Mit dieser Darstellung und den Grenzwerten der Exponentialfunktion für $x \rightarrow \pm\infty$ aus Lemma 7.1 (vi) folgt außerdem

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \tanh(x) = 1 \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \tanh(x) = -1,$$

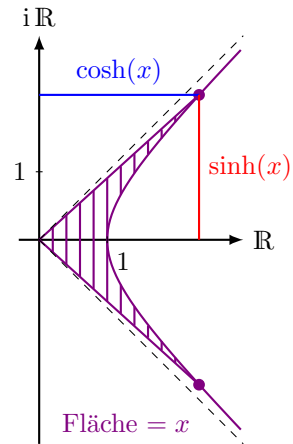
so dass auch die Bijektivität nach $(-1, 1)$ folgt.

- (iv) Dass der Cotangens hyperbolicus auf $(-\infty, 0)$ und $(0, \infty)$ streng monoton fallend ist, folgt direkt aus der Tatsache, dass der Tangens hyperbolicus streng monoton wachsend ist, die Formel $\coth(x) = (\tanh(x))^{-1}$ für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gilt und $x = 0$ die einzige Nullstelle des Tangens hyperbolicus ist. Entsprechend folgt aus der Injektivität des Tangens hyperbolicus auf $\mathbb{R}$ mit Bild $\tanh(\mathbb{R}) = (-1, 1)$ sofort, dass der Cotangens hyperbolicus auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ injektiv ist und $\coth(\mathbb{R} \setminus \{0\}) = \mathbb{R} \setminus [-1, 1]$ gilt. $\square$

Damit können wir nun auch Umkehrfunktionen der hyperbolischen Funktionen einführen.

Definition 7.48 (Areafunktionen). *Wir bezeichnen*

- (i) *die Umkehrfunktion von $\cosh: [0, \infty) \rightarrow [1, \infty)$ als den Areacosinus hyperbolicus $\operatorname{arcosh}: [1, \infty) \rightarrow [0, \infty)$,*
- (ii) *die Umkehrfunktion von $\sinh: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ als den Areasinus hyperbolicus $\operatorname{arsinh}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,*
- (iii) *die Umkehrfunktion von $\tanh: \mathbb{R} \rightarrow (-1, 1)$ als den Areatangens hyperbolicus $\operatorname{artanh}: (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$,*
- (iv) *die Umkehrfunktion von $\coth: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus [-1, 1]$ als den Areacotangens hyperbolicus $\operatorname{arccot}: \mathbb{R} \setminus [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$.*



Bemerkungen 7.49.

- (1) *Die Bezeichnung “Area” kommt aus dem Lateinischen und bedeutet Fläche. Dies kommt daher, dass die Fläche $x \in [0, \infty)$ im Bereich von $\cosh(x) + \sinh(x)$ bis $\cosh(x) - \sinh(x)$ zwischen der Hyperbel und den beiden verbindenden Geraden zum Ursprung eingeschlossen wird.*
- (2) *Die Areafunktionen sind auf ihrem Definitionsbereich jeweils stetig. Außerdem kann man explizite Darstellungsformeln über Logarithmusfunktionen zeigen, wie etwa*

$$\operatorname{arcosh}(x) = \log(x + \sqrt{x^2 - 1}) \quad \text{für } x \in [1, \infty)$$

und

$$\operatorname{arsinh}(x) = \log(x + \sqrt{x^2 + 1}) \quad \text{für } x \in \mathbb{R}.$$

Kapitel 8

Differentialrechnung für Funktionen auf $\mathbb{R}$

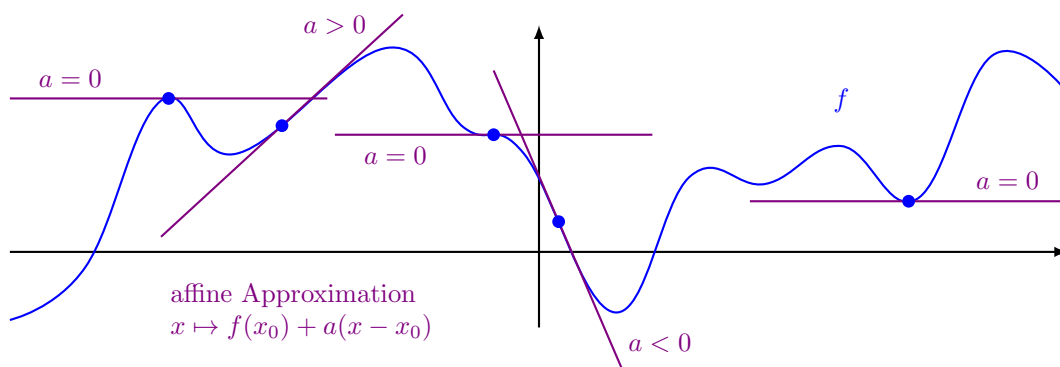
Wir betrachten in diesem Kapitel eine Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, die auf einer Teilmenge $D \subset \mathbb{R}$ definiert ist, und wir wollen diese lokal um einen Häufungspunkt $x_0 \in D$ von D genauer beschreiben. Ist f stetig, so gilt

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

so dass f in der Nähe des Punktes x_0 durch den Funktionswert $f(x_0)$ approximiert werden kann (und die konstante Funktion $D \ni x \mapsto f(x_0)$ die beste Approximation von f lokal bei x_0 unter allen konstanten Funktionen ist). Damit ist jedoch nicht klar, wie groß der Approximationsfehler $|f(x) - f(x_0)|$ des Funktionswertes im Vergleich zum Approximationsfehler $|x - x_0|$ des Arguments ist. An dieser Stelle kommt die Differentialrechnung ins Spiel. Konvergieren die Steigungen der Sekanten durch die Punkte $(x_0, f(x_0))$ und $(x, f(x))$ bei $x \rightarrow x_0$, so lässt sich eine Steigung (oder lokale Änderungsrate) a von f an der Stelle x_0 definieren, also

$$a = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Einerseits besagt dieser Grenzwert, dass der Approximationsfehler $|f(x) - f(x_0)|$ höchstens linear im Fehler $|x - x_0|$ des Arguments ist. Andererseits können wir f lokal bei x_0 nun etwas genauer durch die affine Funktion $D \ni x \mapsto f(x_0) + a(x - x_0)$ approximieren (und dies ist wiederum die beste Approximation von f lokal bei x_0 unter allen affinen Funktionen). Nach der Definition der Differenzierbarkeit überlegen wir uns im Folgenden, unter welchen Operationen die Differenzierbarkeit von Funktionen erhalten bleibt und welche Möglichkeiten die Differentialrechnung bei der Diskussion von Funktionen eröffnet. So werden wir beispielsweise sehen, dass die Monotonie von Funktionen in Zusammenhang mit dem Vorzeichen der Ableitung steht und dass die Nullstellen der Ableitung kritische Punkte für ihre Extremstellen (Maximal- oder Minimalstellen) im Inneren darstellen.



8.1 Differenzierbarkeit und elementare Eigenschaften

Wir definieren zunächst die Differenzierbarkeit einer Funktion.

Definition 8.1 (differenzierbare Funktion). *Es sei $D \subset \mathbb{R}$ eine Menge und $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion.*

- (i) *Wir nennen f in einem Punkt $x_0 \in D$ differenzierbar, falls (x_0 ein Häufungspunkt von D ist und) der Grenzwert*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

in $\mathbb{R}$ existiert. In diesem Fall bezeichnen wir den Grenzwert als die Ableitung von f in x_0 und schreiben dafür $f'(x_0)$, $\frac{d}{dx}f(x_0)$ oder auch $Df(x_0)$. Ferner nennen wir f auf D differenzierbar, falls f in jedem Punkt $x_0 \in D$ differenzierbar ist.

- (ii) *Wir nennen f in einem Punkt $x_0 \in D$ linksseitig bzw. rechtsseitig differenzierbar, falls (x_0 ein Häufungspunkt von $D \cap (-\infty, x_0)$ bzw. $D \cap (x_0, \infty)$ ist und) der linksseitige bzw. rechtsseitige Grenzwert*

$$\lim_{x \nearrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad \text{bzw.} \quad \lim_{x \searrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

in $\mathbb{R}$ existiert. In diesem Fall bezeichnen wir den Grenzwert als die linksseitige bzw. rechtsseitige Ableitung von f in x_0 und schreiben dafür $f'_-(x_0)$ bzw. $f'_+(x_0)$ oder auch $D^-f(x_0)$ bzw. $D^+f(x_0)$.

Bemerkungen 8.2. *Es sei $D \subset \mathbb{R}$ eine Menge und $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion.*

- (1) *Wenn wir über die Differenzierbarkeit von f in einem Punkt $x_0 \in D$ sprechen, so ist stets implizit vorausgesetzt, dass x_0 ein Häufungspunkt von D ist, da die Differenzierbarkeit über die Existenz des Grenzwerts der Differenzenquotienten*

$$D \setminus \{x_0\} \ni x \mapsto \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

bei $x \rightarrow x_0$ definiert ist und Grenzwerte überhaupt nur für Häufungspunkte von $D \setminus \{x_0\}$ (und damit von D) erklärt sind. In isolierten Punkten $x_0 \in D$ dagegen gibt es keine lokale Änderung von f , so dass auch das Konzept einer Ableitung in x_0 keinen Sinn gibt.

- (2) *Ableitungen haben eine geometrische Interpretation. Der Differenzenquotient*

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad \text{für } x \in D \setminus \{x_0\}$$

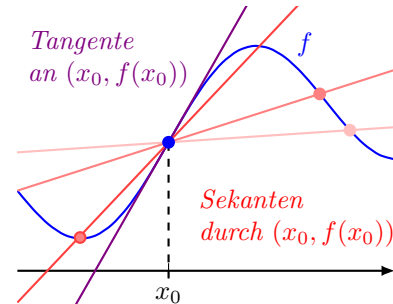
ist gerade die Steigung der Sekante durch die Punkte $(x_0, f(x_0))$ und $(x, f(x))$, also der Gerade

$$\mathbb{R} \ni \tilde{x} \mapsto f(x_0) + \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(\tilde{x} - x_0).$$

Falls die Ableitung von f bei x_0 existiert, so konvergieren die Steigungen dieser Sekanten bei $x \rightarrow x_0$ gegen die Ableitung $f'(x_0)$ von f in x_0 , und damit die Sekanten punktweise gegen die Tangente

$$\mathbb{R} \ni \tilde{x} \mapsto f(x_0) + f'(x_0)(\tilde{x} - x_0).$$

an $(x_0, f(x_0))$.



- (3) *Die Differenzierbarkeit komplexwertiger Funktionen auf D definiert man über die Differenzierbarkeit des Real- und Imaginärteils der Funktion.*

Auch für Differenzierbarkeit gibt es mehrere äquivalente Formulierungen, die je nach Kontext (für den Nachweis oder eine Anwendung der Differenzierbarkeit) von Nutzen sein können.

Lemma 8.3 (äquivalente Formulierungen von Differenzierbarkeit). *Es sei $D \subset \mathbb{R}$ eine Menge, $x_0 \in D$ ein Häufungspunkt von D und $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann sind äquivalent:*

(i) Grenzwertformulierung: *f ist differenzierbar in x_0 (gemäß Definition 8.1).*

(ii) h -Grenzwertformulierung: *der Grenzwert*

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad \text{existiert (und ist gleich } f'(x_0)).$$

(iii) stetige Fortsetzbarkeit des Differenzenquotienten: *es existiert eine im Punkt x_0 stetige Funktion $\varphi: D \rightarrow \mathbb{R}$ mit*

$$f(x) - f(x_0) = \varphi(x) \cdot (x - x_0) \quad \text{für alle } x \in D \quad (\text{und } f'(x_0) = \varphi(x_0)).$$

(iv) Approximierbarkeit von f durch eine affine Funktion: *es existiert ein $a \in \mathbb{R}$, so dass für die affine Funktion $\ell: D \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\ell(x) := f(x_0) + a(x - x_0)$ für $x \in D$ gilt:*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - \ell(x)}{x - x_0} = 0 \quad (\text{und } f'(x_0) = a).$$

Beweis. Wir zeigen, dass die Formulierungen in (ii), (iii) und (iv) jeweils äquivalent zu der in (i) sind.

Äquivalenz (i) $\Leftrightarrow$ (ii). Mit der Substitution $x \leftrightarrow x_0 + h$ erhalten wir die Korrespondenz der Differenzenquotienten

$$D \ni x \mapsto \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad \leftrightarrow \quad (D - x_0) \ni h \mapsto \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Die Äquivalenz der Formulierungen in (i) und (ii) erhalten wir dann über die entsprechende Umrechnung der Grenzwerte

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Äquivalenz (i) $\Leftrightarrow$ (iii). Nach der Folgenformulierung der Stetigkeit aus Lemma 6.25 (ii) und der Definition 6.35 der stetigen Fortsetzung gilt

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \text{ existiert in } \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow \quad D \setminus \{x_0\} \ni x \mapsto \varphi(x) := \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \text{ lässt sich stetig in } x_0 \text{ fortsetzen.} \end{aligned}$$

Bezeichnen wir in diesem Fall die stetig in x_0 fortgesetzte (und nach Satz 6.37 eindeutig bestimmte) Funktion ebenfalls mit φ , so erhalten wir offensichtlich $f(x) - f(x_0) = \varphi(x) \cdot (x - x_0)$ für alle $x \in D$ und $f'(x_0) = \varphi(x_0)$.

Äquivalenz (i) $\Leftrightarrow$ (iv). Wir nehmen zuerst die Formulierung in (i) an. Für die affine Funktion ℓ aus (iv) mit $a = f'(x_0)$ gilt dann

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - \ell(x)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) = 0.$$

Ist umgekehrt die Formulierung in (iv) erfüllt, so folgt die Differenzierbarkeit von f in x_0 mit Ableitung a direkt aus

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - \ell(x)}{x - x_0} + a = 0 + a = a. \quad \square$$

Satz 8.4. *Es sei $D \subset \mathbb{R}$ eine Menge. Ist $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ in $x_0 \in D$ differenzierbar, so ist f in x_0 stetig.*

Beweis. Mit der Formulierung der Differenzierbarkeit von f in x_0 über die stetige Fortsetzbarkeit des Differenzenquotienten durch eine in x_0 stetige Funktion $\varphi: D \rightarrow \mathbb{R}$ aus Lemma 8.3 (iii) können wir f auch ausdrücken als

$$f(x) = f(x_0) + \varphi(x) \cdot (x - x_0) \quad \text{für alle } x \in D.$$

Da die Funktion auf der rechten Seite nach Voraussetzung in $x = x_0$ stetig ist, ist f wie behauptet in x_0 stetig. $\square$

Bemerkungen 8.5.

- (1) In Satz 8.4 kann man auf die Stetigkeit der Funktion f schließen, wenn man lediglich die Differenzierbarkeit von f kennt (die Ableitung selbst braucht jedoch nicht stetig zu sein).
- (2) Die Umkehrung von Satz 8.4 gilt nicht, d.h. es gibt stetige Funktionen, die nicht differenzierbar sind (vgl. Beispiel 8.6 (iii) und (iv)). Man kann tatsächlich sogar stetige Funktionen auf $\mathbb{R}$ konstruieren, die in keinem einzigen Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$ differenzierbar sind.

Beispiele 8.6.

- (i) Jede konstante Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = y$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und eine Konstante $y \in \mathbb{R}$ erfüllt

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} 0 = 0 \quad \text{für alle } x_0 \in \mathbb{R}$$

und ist damit differenzierbar mit $f' \equiv 0$.

- (ii) Ist $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine affine Funktion mit $f(x) = a \cdot x + y$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und Konstanten $a, y \in \mathbb{R}$, so gilt

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{a \cdot x - a \cdot x_0}{x - x_0} = a \quad \text{für alle } x_0 \in \mathbb{R}.$$

Folglich ist f differenzierbar mit $f' \equiv a$.

- (iii) Für die Betragsfunktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = |x|$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gelten für jede beliebige Folge $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ in $(0, \infty)$, die bei $n \rightarrow \infty$ gegen ein $x_0 \in [0, \infty)$ konvergiert, die beiden Identitäten

$$\frac{|x_n| - |x_0|}{x_n - x_0} = \frac{x_n - x_0}{x_n - x_0} = 1 \quad \text{und} \quad \frac{|-x_n| - |-x_0|}{-x_n + x_0} = \frac{x_n - x_0}{-x_n + x_0} = -1 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Dies zeigt, dass die Betragsfunktion auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ differenzierbar ist mit $f' \equiv -1$ auf $(-\infty, 0)$ und $f' \equiv 1$ auf $(0, \infty)$, aber dass sie in $x_0 = 0$ nicht differenzierbar ist und dort nur die einseitigen Ableitungen $f'_-(0) = -1$ und $f'_+(0) = 1$ existieren.

- (iv) Für die Wurzelfunktion $f: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ mit $f(x) = \sqrt{x}$ für alle $x \in [0, \infty)$ gilt

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} \quad \text{für alle } x \in (0, \infty) \text{ und } x_0 \in [0, \infty).$$

Damit sieht man sofort, dass f in $x_0 \in (0, \infty)$ differenzierbar ist mit $f'(x_0) = (2\sqrt{x_0})^{-1}$, aber dass keine Differenzierbarkeit in $x_0 = 0$ vorliegt.

- (v) Für die Exponentialfunktion $\exp: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gilt mit der Funktionalgleichung aus Beispiel 5.44 (ii) und Lemma 7.1 (v)

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\exp(x_0 + h) - \exp(x_0)}{h} = \exp(x_0) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\exp(h) - 1}{h} = \exp(x_0) \quad \text{für alle } x_0 \in \mathbb{R}.$$

Folglich ist die Exponentialfunktion auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar mit $\exp' = \exp$.

- (vi) Für die Cosinusfunktion $\cos: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und die Sinusfunktion $\sin: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gilt mithilfe von Übung 7.22, der Stetigkeit der Cosinus- und Sinusfunktion und dem Grenzwert aus Bemerkung 7.24

$$\begin{aligned}\lim_{2h \rightarrow 0} \frac{\cos(x_0 + 2h) - \cos(x_0)}{2h} &= -2 \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x_0 + h) \cdot \sin(h)}{2h} \\ &= -\lim_{h \rightarrow 0} \sin(x_0 + h) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(h)}{h} = -\sin(x_0),\end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}\lim_{2h \rightarrow 0} \frac{\sin(x_0 + 2h) - \sin(x_0)}{2h} &= 2 \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x_0 + h) \cdot \sin(h)}{2h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \cos(x_0 + h) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(h)}{h} = \cos(x_0)\end{aligned}$$

für alle $x_0 \in \mathbb{R}$. Damit folgt die Differenzierbarkeit der Cosinus- und Sinusfunktion auf ganz $\mathbb{R}$ mit $\cos' = -\sin$ und $\sin' = \cos$.

Oftmals lässt sich die Differenzierbarkeit einer gegebenen Funktion auch über die folgenden Rechenregeln (in Kombination mit der Differenzierbarkeit elementarer Funktionen) begründen.

Lemma 8.7 (Rechenregeln für differenzierbare Funktionen). *Es sei $D \subset \mathbb{R}$ eine Menge mit Häufungspunkt $x_0 \in D$ und es seien $f, g: D \rightarrow \mathbb{R}$ zwei Funktionen, die differenzierbar in x_0 sind. Dann gelten die folgenden Aussagen:*

- (i) *Die Funktion $f + g: D \rightarrow \mathbb{R}$, definiert durch $(f + g)(x) := f(x) + g(x)$ für $x \in D$, ist differenzierbar in x_0 , mit*

$$(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0).$$

- (ii) *Die Funktion $f \cdot g: D \rightarrow \mathbb{R}$, definiert durch $(f \cdot g)(x) := f(x)g(x)$ für $x \in D$, ist differenzierbar in x_0 , mit*

$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0).$$

- (iii) *Falls $0 \notin g(D)$ gilt, so ist die Funktion $f/g: D \rightarrow \mathbb{R}$, definiert durch $f/g(x) := f(x)/g(x)$ für $x \in D$, differenzierbar in x_0 , mit*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)}{(g(x_0))^2}.$$

Beweis. Die Aussagen folgen im Wesentlichen mithilfe der Rechenregeln für Grenzwerte aus Lemma 6.13.

- (i) Es gilt

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) + g(x) - f(x_0) - g(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) + g'(x_0).$$

- (ii) Fügen wir $\pm f(x_0) \cdot g(x)$ im Zähler ein, so folgt über die Stetigkeit von g in x_0 nach Satz 8.4 (in der Grenzwertformulierung)

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) \cdot g(x) - f(x_0) \cdot g(x_0)}{x - x_0} &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(f(x) - f(x_0)) \cdot g(x) + f(x_0) \cdot (g(x) - g(x_0))}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) + f(x_0) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \\ &= f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0).\end{aligned}$$

(iii) Wieder unter Ausnutzung der Stetigkeit von g in x_0 erhalten wir im Fall $f \equiv 1$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(x_0)}}{x - x_0} &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{g(x_0) \cdot g(x)} \frac{g(x_0) - g(x)}{x - x_0} \\ &= \frac{1}{g(x_0)} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{g(x)} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x_0) - g(x)}{x - x_0} = -\frac{g'(x_0)}{(g(x_0))^2}.\end{aligned}$$

Über die Produktregel in (ii) ergibt sich dann die allgemeine Quotientenregel

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \left(f \cdot \frac{1}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)}{g(x_0)} - f(x_0) \cdot \frac{g'(x_0)}{(g(x_0))^2} = \frac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)}{(g(x_0))^2}. \quad \square$$

Beispiele 8.8.

(i) Über vollständige Induktion sehen wir für $f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f_n(x) = x^n$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$

$$f'_n(x) = n \cdot x^{n-1} \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Damit folgt insbesondere, dass jedes reelle Polynom vom Grad $n \in \mathbb{N}$ auf $\mathbb{R}$ differenzierbar und seine Ableitung ein Polynom vom Grad $n - 1$ ist.

(ii) Für die Funktion $f_{-n}: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f_{-n}(x) = x^{-n}$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ ergibt sich über die Quotientenregel aus Lemma 8.7 (iii)

$$f'_{-n}(x) = \left(\frac{1}{f_n(x)}\right)' = -\frac{n \cdot x^{n-1}}{x^{2n}} = -nx^{-n-1} \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

(iii) Für die Tangensfunktion $\tan: \mathbb{R} \setminus (\frac{\pi}{2} + \mathbb{Z} \cdot \pi) \rightarrow \mathbb{R}$ (siehe Definition 7.25) erhalten wir wieder mit der Quotientenregel sowie den Ableitungen der Cosinus- und Sinusfunktion aus Beispiel 8.6 (vi)

$$\begin{aligned}\tan'(x) &= \left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)' = \frac{\sin'(x) \cdot \cos(x) - \sin(x) \cdot \cos'(x)}{\cos^2(x)} \\ &= \frac{\cos(x) \cdot \cos(x) - \sin(x) \cdot (-\sin(x))}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Als Nächstes zeigen wir, dass die Differenzierbarkeit von Funktionen unter der Operation der Verkettung erhalten bleibt.

Satz 8.9 (Kettenregel). *Es seien $D, E \subset \mathbb{R}$ zwei Mengen und $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $g: E \rightarrow \mathbb{R}$ zwei Funktionen mit $f(D) \subset E$. Ist $x_0 \in D$ ein Häufungspunkt von D , in dem f differenzierbar ist, und $f(x_0) \in E$ ein Häufungspunkt von E , in dem g differenzierbar ist, so ist auch die Verkettung $g \circ f: D \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar in x_0 , mit*

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0).$$

Beweis. Mit der Formulierung der Differenzierbarkeit über die stetige Fortsetzbarkeit des Differenzenquotienten aus Lemma 8.3 (iii) finden wir im Punkt x_0 bzw. $f(x_0)$ stetige Funktionen $\varphi: D \rightarrow \mathbb{R}$ und $\psi: E \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\begin{aligned}f(x) - f(x_0) &= \varphi(x) \cdot (x - x_0) \quad \text{für alle } x \in D \quad \text{und} \quad f'(x_0) = \varphi(x_0), \\ g(y) - g(f(x_0)) &= \psi(y) \cdot (y - f(x_0)) \quad \text{für alle } y \in E \quad \text{und} \quad g'(f(x_0)) = \psi(f(x_0)).\end{aligned}$$

Damit folgt für die spezielle Wahl $y = f(x) \in E$

$$\begin{aligned}g \circ f(x) - g \circ f(x_0) &= g(f(x)) - g(f(x_0)) \\ &= \psi(f(x)) \cdot (f(x) - f(x_0)) = \psi(f(x)) \cdot \varphi(x) \cdot (x - x_0) \quad \text{für alle } x \in D.\end{aligned}$$

Wegen der Differenzierbarkeit von f in x_0 ist f nach Satz 8.4 auch stetig in x_0 . Da Produkte sowie Verkettungen stetiger Funktionen nach Lemma 6.29 und Satz 6.39 wieder stetig sind, schließen wir, dass die Funktion

$$D \ni x \mapsto \psi(f(x)) \cdot \varphi(x)$$

stetig in x_0 ist. Somit ist die Differenzierbarkeit der Verkettung $g \circ f$ im Punkt x_0 über Lemma 8.3 (iii) gezeigt, mit Ableitung

$$(g \circ f)'(x_0) = \psi(f(x_0)) \cdot \varphi'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0). \quad \square$$

Bemerkung 8.10 (Merkregel). *Bildet man die Ableitung der Verkettung $g \circ f$ mit der Formel aus Satz 8.9, so bezeichnet man die Ableitung g' (ausgewertet an der Stelle $f(x_0)$) als die äußere Ableitung und die Ableitung f' (ausgewertet an der Stelle x_0) als die innere Ableitung. Für die Ableitung einer Verkettung erhält man so die Merkregel äußere Ableitung mal innere Ableitung, wobei die Multiplikation der äußeren mit der inneren Ableitung auch als Nachdifferenzieren bezeichnet wird.*

Beispiele 8.11.

- (i) Ist $f: \mathbb{R} \supset D \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar, so ist auch $D \ni x \mapsto \exp \circ f$ differenzierbar, und die Ableitung ist nach Beispiel 8.6 (v) gegeben durch

$$(\exp \circ f)'(x) = \exp' \circ f(x) \cdot f'(x) = \exp \circ f(x) \cdot f'(x) \quad \text{für alle } x \in D.$$

- (ii) Für die allgemeine Exponentialfunktion $\exp_b: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zu einer Basis $b > 0$ aus Definition 7.12 (ii) mit $\exp_b(x) = \exp(x \log(b))$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt mithilfe von (i) dann

$$\exp'_b(x) = \exp(x \log(b)) \cdot \log(b) = \exp_b(x) \cdot \log(b) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Übung 8.12. Zeigen Sie, dass der Cosinus hyperbolicus $\cosh: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und der Sinus hyperbolicus $\sinh: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar ist, mit Ableitungen

$$\cosh'(x) = \sinh(x) \quad \text{und} \quad \sinh'(x) = \cosh(x) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Übung 8.13. Es sei eine Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben über

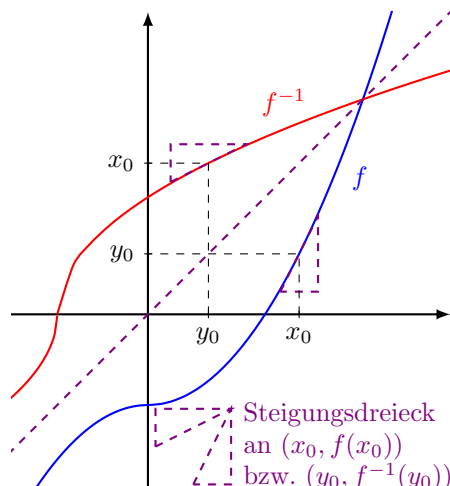
$$f(x) := \begin{cases} x^2 \sin(x^{-1}) & \text{für } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ 0 & \text{für } x = 0, \end{cases}$$

- (i) Begründen Sie, dass f auf $\mathbb{R}$ stetig ist.
(ii) Zeigen Sie, dass f auf $\mathbb{R}$ differenzierbar ist und berechnen Sie die Ableitung f' .
(iii) Begründen Sie, dass f' in $x = 0$ unstetig ist.

Satz 8.14 (Ableitung der Umkehrfunktion). *Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein nicht-leeres Intervall und $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige, injektive Funktion. Ist f in $x_0 \in I$ differenzierbar mit $f'(x_0) \neq 0$, so ist die Umkehrfunktion $f^{-1}: f(I) \rightarrow I$ in $y_0 = f(x_0)$ differenzierbar, mit*

$$(f^{-1})'(y_0) = (f'(x_0))^{-1} = (f'(f^{-1}(y_0)))^{-1}.$$

Beweis. Es sei $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $f(I) \setminus \{y_0\}$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y_0$. Wegen der Injektivität von f ist die Umkehrfunktion f^{-1} auf $f(I)$ wohldefiniert und wir haben $x_n := f^{-1}(y_n) \in I \setminus \{x_0\}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Mit Satz 6.74 können wir insbesondere auf die Stetigkeit von $f^{-1}: f(I) \rightarrow I$ im Punkt y_0 schließen. Mit der Folgenformulierung der Stetigkeit erhalten wir daher



$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} f^{-1}(y_n) = f^{-1}(y_0) = x_0.$$

Mit der Definition der Ableitung (über die Folgenformulierung des Grenzwertes) ergibt sich nun

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f^{-1}(y_n) - f^{-1}(y_0)}{y_n - y_0} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n - x_0}{f(x_n) - f(x_0)} = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Folglich ist die Umkehrfunktion f^{-1} im Punkt y_0 differenzierbar, und mit $x_0 = f^{-1}(y_0)$ haben wir auch die behauptete Formel für die Ableitung $(f^{-1})'(y_0)$ gezeigt. $\square$

Bemerkung 8.15 (Merkregel). *Die Formel für die Ableitung der Umkehrfunktion kann man sich einfach anhand der Identität $(f^{-1} \circ f) = \text{Id}_I$ und der Ableitungsregel für die Verkettung von Funktionen aus Satz 8.9 merken. Leiten wir beide Seiten getrennt ab, so erhalten wir nämlich*

$$(f^{-1})'(f(x_0)) \cdot f'(x_0) = (f^{-1} \circ f)'(x_0) = \text{Id}'_I(x_0) = 1,$$

woraus wir mit $f'(x_0) \neq 0$ gerade $(f^{-1})'(f(x_0)) = (f'(x_0))^{-1}$ folgern. Dies begründet allerdings lediglich die Formel für die Ableitung der Umkehrfunktion und nicht die Differenzierbarkeit, da wir für die Anwendung der Kettenregel bereits die Differenzierbarkeit von f^{-1} im Punkt $f(x_0)$ wissen müssen.

Beispiele 8.16.

- (i) Für die Logarithmusfunktion $\log: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ gilt als Umkehrfunktion der (streng monoton wachsenden und damit injektiven) Exponentialfunktion $\exp: \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$ (mit $\exp' = \exp > 0$ auf $\mathbb{R}$)

$$\log'(x) = \frac{1}{\exp'(\log(x))} = \frac{1}{\exp(\log(x))} = \frac{1}{x} \quad \text{für alle } x \in (0, \infty).$$

- (ii) Für die allgemeine Potenzfunktion $p_a: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ zu einem Exponenten $a \in \mathbb{R}$ aus Definition 7.12 (i) mit $p_a(x) = x^a = \exp(a \log(x))$ für alle $x \in (0, \infty)$ gilt mit der Kettenregel und (i)

$$p'_a(x) = \exp'(a \log(x)) \cdot a \log'(x) = ax^a \frac{1}{x} = ax^{a-1} \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Die Formel für die Ableitung der allgemeinen Potenzfunktion $x \mapsto x^a$ ist damit vollkommen analog zu den zuvor in den Beispielen 8.8 (i) und (ii) hergeleiteten Fällen mit $a \in \mathbb{Z}$.

- (iii) Der Arkuscosinus $\arccos: [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$ ist die Umkehrfunktion der (auf $[0, \pi]$ eingeschränkten, injektiven) Cosinusfunktion $\cos: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$, deren Ableitung nach Beispiel 8.6 (vi) $\cos' = -\sin$ ist, damit nur auf den Randpunkten $\{0, \pi\} = \{\arccos(\pm 1)\}$ verschwindet und im Inneren $(0, \pi)$ negativ ist. Damit ergibt sich über den trigonometrischen Pythagoras aus Lemma 7.21 (i)

$$\begin{aligned} \arccos'(x) &= \frac{1}{\cos'(\arccos(x))} = -\frac{1}{\sin(\arccos(x))} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2(\arccos(x))}} = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \quad \text{für alle } x \in (-1, 1). \end{aligned}$$

- (iv) Der Arkussinus $\arcsin: [-1, 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ ist die Umkehrfunktion der (auf $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ eingeschränkten, injektiven) Sinusfunktion $\sin: [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}$, deren Ableitung nach Beispiel 8.6 (vi) $\sin' = \cos$ ist, damit nur auf den Randpunkten $\{\pm \frac{\pi}{2}\} = \{\arcsin(\pm 1)\}$ verschwindet und im Inneren $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ positiv ist. Wie in (iii) folgt dann

$$\begin{aligned} \arcsin'(x) &= \frac{1}{\sin'(\arcsin(x))} = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(\arcsin(x))}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \quad \text{für alle } x \in (-1, 1). \end{aligned}$$

- (v) Der Arcustangens $\arctan: \mathbb{R} \rightarrow (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ist die Umkehrfunktion der (auf $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ eingeschränkten, injektiven) Tangensfunktion $\tan: (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}$, deren Ableitung in Beispiel 8.8 (iii) als $\tan' = 1 + \tan^2$ berechnet wurde und damit auf ganz $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ positiv ist. Folglich haben wir

$$\arctan'(x) = \frac{1}{\tan'(\arctan(x))} = \frac{1}{1 + \tan^2(\arctan(x))} = \frac{1}{1 + x^2} \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Übung 8.17. Berechnen Sie mithilfe von Satz 8.14 die Ableitungen des Areacoshinus hyperbolicus $\operatorname{arcosh}: (1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ und des Areacoshinus hyperbolicus $\operatorname{arsinh}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Übung 8.18. Begründen Sie, dass die Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = 2x + \exp(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ eine differenzierbare Umkehrfunktion $f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ besitzt, und berechnen Sie deren Ableitung $(f^{-1})'(1)$ an der Stelle $x = 1$.

Bemerkung 8.19 (Darstellung der Eulerschen Zahl). *Wir können nun auf elegante Weise die Identität $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n = \exp(1) = e$ für die Eulersche Zahl zeigen. Mit $\log(1) = 0$, der Definition der Ableitung und $\log'(1) = 1$ aus Beispiel 8.16 (i) erhalten wir zunächst*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \log \left(1 + \frac{x}{n} \right) = x \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(1 + \frac{x}{n}) - \log(1)}{\frac{x}{n}} = x \log'(1) = x$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ (beachte, dass für alle $n > \max\{1, -x\}$ die Ungleichung $1 + \frac{x}{n} > 0$ gilt und damit der Logarithmus $\log(1 + \frac{x}{n})$ gebildet werden kann). Aus der Stetigkeit der Exponentialfunktion folgt dann

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \exp \left(n \log \left(1 + \frac{x}{n} \right) \right) = \exp(x) = e^x \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Zum Abschluss bemerken wir, dass wir für eine differenzierbare Funktion auch die Ableitung selbst als Funktion auffassen können und beispielsweise auf Stetigkeit oder Differenzierbarkeit untersuchen können. Insbesondere können wir rekursiv Ableitungen höherer Ordnung definieren:

Definition 8.20 (Ableitungen höherer Ordnung). *Es sei $D \subset \mathbb{R}$ eine Menge und $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Ist f (einmal) differenzierbar in einem Punkt $x_0 \in D$, so schreiben wir $f^{(1)}(x_0) := f'(x_0)$. Für $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ definieren wir induktiv, dass f in x_0 n -mal differenzierbar ist, falls es ein $\delta > 0$ gibt, so dass f in jedem Punkt aus $D \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ $(n-1)$ -mal differenzierbar ist und die Abbildung $f^{(n-1)}: D \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \rightarrow \mathbb{R}$ in x_0 differenzierbar ist. In diesem Fall bezeichnen wir diese Ableitung als n -te Ableitung von f in x_0 und schreiben dafür $f^{(n)}(x_0) := (f^{(n-1)})'(x_0)$. Ferner nennen wir f n -mal differenzierbar auf D , falls f in jedem Punkt $x_0 \in D$ n -mal differenzierbar ist.*

Bemerkungen 8.21.

- (1) Die Funktion selbst versteht man auch als 0-te Ableitung und schreibt $f^{(0)} := f$. Analog zur ersten Ableitung mit $f^{(1)} = f'$ schreibt man für die 2-te und 3-te Ableitung auch f'' bzw. f''' .
- (2) Eine wichtige Rechenregel ist die Produktregel für Ableitungen höherer Ordnung, die sogenannte Leibniz-Regel. Sind $f, g: D \rightarrow \mathbb{R}$ zwei Funktionen, die in einem Punkt $x_0 \in D$ n -mal differenzierbar sind, so ist auch das Produkt $f \cdot g: D \rightarrow \mathbb{R}$ n -mal in x_0 differenzierbar, mit

$$(f \cdot g)^{(n)}(x_0) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)}(x_0) \cdot g^{(n-k)}(x_0).$$

Diese Formel kann man einfach über vollständige Induktion, die Produktregel für Ableitungen und die Rekursionsformel für Binomialkoeffizienten aus Lemma 1.90 zeigen.

Übung 8.22. Beweisen Sie die Leibniz-Regel aus Bemerkung 8.21 (2).

Beispiele 8.23.

- (i) Polynome sind n -mal differenzierbar auf $\mathbb{R}$ für jedes beliebige $n \in \mathbb{N}$. Für die Monome $f_m: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f_m(x) = x^m$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und $m \in \mathbb{N}$ kann man mit vollständiger Induktion zeigen, dass für jedes $x \in \mathbb{R}$ die folgende Formel für die n -te Ableitung gilt:

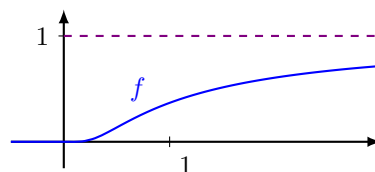
$$f_m^{(n)}(x) = m \cdot (m-1) \cdot \dots \cdot (m-n+1)x^{m-n} = \begin{cases} \frac{m!}{(m-n)!}x^{m-n} & \text{für } n \leq m, \\ 0 & \text{für } n > m. \end{cases}$$

- (ii) Die Funktion $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^{-1}$ für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist n -mal differenzierbar auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ für jedes beliebige $n \in \mathbb{N}$, mit

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n \frac{n!}{x^{n+1}} \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

★ **Übung 8.24.** Es sei eine Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben über

$$f(x) := \begin{cases} \exp(-x^{-1}) & \text{für } x > 0, \\ 0 & \text{für } x \leq 0. \end{cases}$$



- (i) Zeigen Sie mit vollständiger Induktion über $n \in \mathbb{N}$, dass f n -mal differenzierbar auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist und die n -te Ableitung die Struktur

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} x^{-2n} p_n(x) \exp(x^{-1}) & \text{für } x > 0, \\ 0 & \text{für } x < 0, \end{cases}$$

mit einem Polynom p_n vom Grad höchstens n besitzt.

- (ii) Folgern Sie, dass f in $x = 0$ n -mal differenzierbar ist mit

$$f^{(n)}(0) = 0 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

8.2 Lokale Extrema und Mittelwertsatz

Obwohl die Ableitung ein lokales Konzept ist, stellt sich die Differentialrechnung als sehr nützlich heraus, um einige Eigenschaften einer Funktion näher zu untersuchen und eine globale Kurvendiskussion durchzuführen. Im Folgenden leiten wir diesbezüglich insbesondere Ableitungskriterien für (lokale) Extrema, das Monotonieverhalten und Konvexität her.

Wir lokalisieren zunächst die Begriffe des Maximums und Minimums einer Funktion, indem wir nur das Verhalten in einer (hinreichend) kleinen Umgebung um einen gegebenen Punkt betrachten.

Definition 8.25 (lokales Maximum, Minimum und Extremum). *Es sei $D \subset \mathbb{C}$ eine nicht-leere Menge, $z_0 \in D$ und $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Wir sagen, dass*

- f in z_0 ein (striktes) lokales Maximum hat, falls es ein $\delta > 0$ gibt mit

$$f(z) \leq f(z_0) \quad (\text{bzw. } f(z) < f(z_0)) \quad \text{für alle } z \in D \setminus \{z_0\} \text{ mit } |z - z_0| < \delta,$$

- f in z_0 ein (striktes) lokales Minimum hat, falls es ein $\delta > 0$ gibt mit

$$f(z) \geq f(z_0) \quad (\text{bzw. } f(z) > f(z_0)) \quad \text{für alle } z \in D \setminus \{z_0\} \text{ mit } |z - z_0| < \delta,$$

- f in z_0 ein (striktes) lokales Extremum hat, falls f in z_0 ein (striktes) lokales Maximum oder Minimum hat.

In diesen Fällen bezeichnen wir z_0 als (strikte) lokale Maximal-, Minimal- oder Extremalstelle.

Bemerkungen 8.26. Es sei $D \subset \mathbb{C}$ eine nicht-leere Menge, $z_0 \in D$ und $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion.

- (1) Die Funktion f hat genau dann ein (striktes) lokales Maximum in z_0 , falls die Funktion $-f$ ein (striktes) lokales Minimum in z_0 hat.
- (2) Falls f auf D sein Maximum bzw. Minimum annimmt, so existiert ein Punkt $z_{\max}$ bzw. $z_{\min}$ in D mit

$$f(z) \leq f(z_{\max}) \quad \text{bzw.} \quad f(z) \geq f(z_{\min}) \quad \text{für alle } z \in D.$$

In diesem Fall liegt in $z_{\max}$ bzw. $z_{\min}$ offensichtlich auch ein lokales Maximum bzw. Minimum vor. Da man aber keine Einschränkung an die Punkte $z \in D$ stellen muss, so dass die entsprechende Ungleichung gilt, spricht man in diesem Fall von einem globalen Maximum oder Minimum.

Notwendige Kriterien für lokale Extrema. Im Folgenden beschäftigen wir uns mit der Extremwertbestimmung für eine Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, die auf einer Teilmenge $D \subset \mathbb{R}$ definiert ist. Über die erste Ableitung gewinnen wir ein notwendiges Kriterium für das Vorliegen eines lokalen Extremums in einem inneren Punkt des Definitionsbereichs.

Definition 8.27 (innerer Punkt und Randpunkt einer Menge in $\mathbb{R}$). Es sei $D \subset \mathbb{R}$ eine nicht-leere Menge. Wir bezeichnen einen Punkt $x_0 \in D$

- als inneren Punkt von D , falls es ein $\delta > 0$ gibt mit $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset D$,
- als Randpunkt von D , falls x_0 kein innerer Punkt von D ist.

Bemerkungen 8.28.

- (1) Nach Definition ist jeder Punkt x_0 einer Menge $D \subset \mathbb{R}$ entweder ein innerer Punkt oder ein Randpunkt.
- (2) In der speziellen Situation, dass es sich bei D um ein offenes, halboffenes oder abgeschlossenes Intervall mit Intervallgrenzen a, b mit $-\infty \leq a < b \leq \infty$ handelt, so ist $x_0 \in D$ genau dann ein innerer Punkt, wenn $x_0 \in (a, b)$ gilt.

Satz 8.29 (notwendiges Kriterium erster Ordnung für ein (inneres) lokales Extremum). Es sei $D \subset \mathbb{R}$ eine nicht-leere Menge und $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Falls f in einem inneren Punkt $x_0 \in D$ ein lokales Extremum hat und dort differenzierbar ist, so gilt

$$f'(x_0) = 0.$$

Beweis. Ohne Einschränkung dürfen wir annehmen, dass f bei x_0 ein lokales Maximum besitzt (sonst betrachten wir anstelle von f die Funktion $-f$ und nutzen Bemerkung 8.26 (1)). Mit den Voraussetzungen, dass x_0 ein innerer Punkt ist und dort ein lokales Maximum vorliegt, finden wir dann ein $\delta > 0$ mit

$$(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset I \quad \text{und} \quad f(x) \leq f(x_0) \quad \text{für alle } x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta).$$

Wegen der Differenzierbarkeit von f im Punkt x_0 folgt dann

$$f'(x_0) = f'_-(x_0) = \lim_{x \nearrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$$

sowie

$$f'(x_0) = f'_+(x_0) = \lim_{x \searrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0.$$

Insgesamt ergibt sich damit die Behauptung $f'(x_0) = 0$. □

Bemerkungen 8.30.

- (1) Das Verschwinden der ersten Ableitung ist nur für ein lokales Extremum in einem inneren Punkt notwendig. Beispielsweise nimmt die Funktion $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = x$ für alle $x \in [-1, 1]$ sein Maximum im Randpunkt $x_0 = 1$ und sein Minimum im Randpunkt $x_0 = -1$ an, aber es gilt $f' \equiv 1$ auf $[-1, 1]$.
- (2) Das Verschwinden der ersten Ableitung ist für das Vorliegen eines lokalen Extremums in einem inneren Punkt notwendig, aber nicht hinreichend. Beispielsweise hat die Funktion $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^3$ für alle $x \in [-1, 1]$ als Ableitung $f'(x) = 3x^2$, so dass $f'(0) = 0$ gilt. Wegen

$$f(-x) < f(0) = 0 < f(x) \quad \text{für alle } x \in (0, 1]$$

hat f jedoch in $x_0 = 0$ kein lokales Extremum.

Bei der Suche nach lokalen Extremstellen einer Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ mit $D \subset \mathbb{R}$ brauchen wir aufgrund von Satz 8.29 die Funktion lediglich in einer Umgebung der folgenden Punkte genauer zu untersuchen:

- (a) Randpunkte des Definitionsbereichs D ,
- (b) Nichtdifferenzierbarkeitsstellen,
- (c) Nullstellen der Ableitungen an Differenzierbarkeitsstellen.

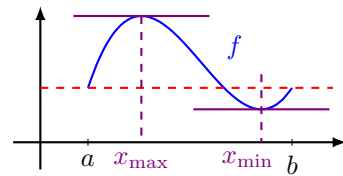
Um diese Punkte zu finden, müssen wir für die Definitionsmenge D der Funktion alle Randpunkte bestimmen, dann die Differenzierbarkeit in allen (inneren) Punkten aus D überprüfen, um die Nichtdifferenzierbarkeitsstellen herauszufinden, und schließlich die Ableitung an allen (inneren) Differenzierbarkeitsstellen berechnen, um deren Nullstellen zu bestimmen. Aufgrund der Relevanz der Nullstellen der ersten Ableitung bei der Suche nach lokalen Extrema definieren wir:

Definition 8.31 (kritischer Punkt). Es sei $D \subset \mathbb{R}$ eine nicht-leere Menge, $x_0 \in D$ ein Häufungspunkt von D und $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Falls f in x_0 differenzierbar ist und $f'(x_0) = 0$ gilt, so bezeichnen wir x_0 als kritischen Punkt von f .

Da die Bestimmung der kritischen Punkte für eine allgemeine Funktion schwierig sein kann, interessieren wir uns für Kriterien, die die Existenz kritischer Punkte sicherstellen.

Satz 8.32 (von Rolle). Es sei $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall mit $a < b$ und $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, die auf dem offenen Intervall (a, b) differenzierbar ist. Gilt $f(a) = f(b)$, so existiert ein kritischer Punkt $x_0 \in (a, b)$ für f , also mit

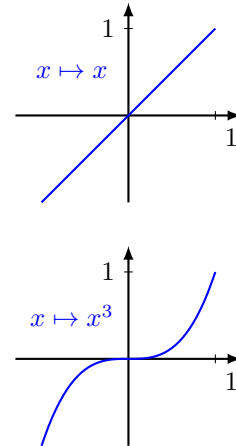
$$f'(x_0) = 0.$$



Beweis. Falls f auf $[a, b]$ konstant ist, so verschwindet die Ableitung f' auf (a, b) und die Behauptung ist trivialerweise für jedes $x_0 \in (a, b)$ erfüllt. Falls dagegen f nicht konstant ist, dann nimmt f nach Satz 6.67 sein Minimum und Maximum auf $[a, b]$ an, mit

$$\min f([a, b]) < \max f([a, b]).$$

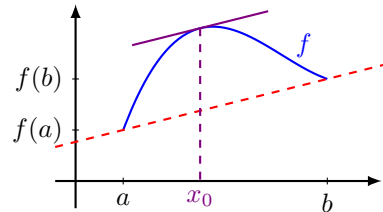
Wegen $f(a) = f(b)$ kann höchstens einer dieser Extremwerte an einem Randpunkt angenommen werden. Folglich gibt es (mindestens) ein lokales Extremum in einem inneren Punkt $x_0 \in (a, b)$. Dieser Punkt muss nach Satz 8.29 ein kritischer Punkt von f sein, so dass $f'(x_0) = 0$ gilt. $\square$



Der Mittelwertsatz mit Anwendungen. Wir verallgemeinern den Satz von Rolle nun auf die Situation, dass die Werte von f an den beiden Randpunkten nicht übereinstimmen.

Satz 8.33 (Mittelwertsatz der Differentialrechnung). *Es sei $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ein Intervall mit $a < b$ und $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, die auf dem offenen Intervall (a, b) differenzierbar ist. Dann existiert ein $x_0 \in (a, b)$ mit*

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$



Beweis. Wir führen die Aussage auf den Satz von Rolle zurück. Dazu betrachten wir die Funktion $h: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$h(x) := f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (x - a) \quad \text{für alle } x \in [a, b].$$

Nach Voraussetzung ist h stetig auf $[a, b]$ mit gleichen Funktionswerten an den beiden Randpunkten

$$h(a) = f(a) = f(b) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (b - a) = h(b)$$

und zum anderen differenzierbar auf (a, b) , mit

$$h'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad \text{für alle } x \in (a, b).$$

Damit können wir den Satz 8.32 von Rolle auf h anwenden und finden so einen kritischen Punkt $x_0 \in (a, b)$ für h , also mit

$$h'(x_0) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \quad \square$$

Bemerkung 8.34. Die Aussage des Mittelwertsatzes 8.33 der Differentialrechnung bedeutet gerade, dass die Steigung der Sekante der Funktion $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ durch die Punkte $(a, f(a))$ und $(b, f(b))$ der Steigung der Tangente, also der Ableitung, an (mindestens) einer Zwischenstelle $x_0 \in (a, b)$ entspricht.

★ **Übung 8.35** (Zwischenwertsatz für Ableitungen). Es sei $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ein Intervall mit $a < b$ und $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Zeigen Sie, dass die Ableitung f' jeden Wert aus dem Intervall $[\min\{f'(a), f'(b)\}, \max\{f'(a), f'(b)\}]$ annimmt, d.h. dass es für jedes $s_0 \in \mathbb{R}$ zwischen $f'(a)$ und $f'(b)$ (mindestens) ein $x_0 \in [a, b]$ mit der Eigenschaft $f'(x_0) = s_0$ gibt.

Hinweis: Betrachten Sie die (stetigen Fortsetzungen der) Funktionen $x \mapsto \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ und $x \mapsto \frac{f(b) - f(x)}{b - x}$.

Der Mittelwertsatz 8.33 der Differentialrechnung hat mehrere nützliche Anwendungen:

Korollar 8.36. *Es sei $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ein Intervall mit $a < b$ und $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, die auf dem offenen Intervall (a, b) differenzierbar ist. Dann gelten die folgenden Aussagen:*

(i) Schrankensatz: *Es gilt*

$$m \cdot (\tilde{x} - x) \leq f(\tilde{x}) - f(x) \leq M \cdot (\tilde{x} - x) \quad \text{für alle } x, \tilde{x} \in [a, b] \text{ mit } x < \tilde{x},$$

mit $m := \inf\{f'(x) : x \in (a, b)\}$ und $M := \sup\{f'(x) : x \in (a, b)\}$.

(ii) Konstanzsatz: *Es gilt $f' \equiv 0$ auf (a, b) genau dann, wenn f auf $[a, b]$ konstant ist.*

(iii) Monotoniesatz:

- *Es gilt $f' \geq 0$ auf (a, b) genau dann, wenn f monoton wachsend auf $[a, b]$ ist.*
- *Falls $f' > 0$ auf (a, b) gilt, dann ist f streng monoton wachsend auf $[a, b]$.*
- *Es gilt $f' \leq 0$ auf (a, b) genau dann, wenn f monoton fallend auf $[a, b]$ ist.*
- *Falls $f' < 0$ auf (a, b) gilt, dann ist f streng monoton fallend auf $[a, b]$.*

Beweis.

- (i) Wenden wir den Mittelwertsatz 8.33 der Differentialrechnung auf dem Intervall $[x, \tilde{x}]$ an, so finden wir ein $x_0 \in (x, \tilde{x})$ mit

$$\frac{f(\tilde{x}) - f(x)}{\tilde{x} - x} = f'(x_0).$$

Da $f'(x_0) \in [m, M]$ nach Voraussetzung gilt, ergeben sich unmittelbar die behaupteten Ungleichungen.

- (ii) Falls f auf $[a, b]$ konstant ist, so gilt offensichtlich $f' \equiv 0$ auf (a, b) . Falls umgekehrt $f' \equiv 0$ auf (a, b) gilt, so haben wir

$$\inf\{f'(x) : x \in (a, b)\} = \sup\{f'(x) : x \in (a, b)\} = 0$$

und die Konstanz von f auf $[a, b]$ folgt damit aus (i).

- (iii) Ohne Einschränkung betrachten wir nur die Fälle, dass $f' \geq 0$ gilt oder f monoton wachsend ist (sonst betrachten wir $-f$ anstelle von f). Für $f' \geq 0$ folgern wir aus (i), dass f monoton wachsend auf $[a, b]$ ist, wobei im Fall $f' > 0$ wegen des Satzes 8.32 sogar strenge Monotonie gilt. Falls umgekehrt f monoton wachsend auf $[a, b]$ ist, so schließen wir aus $f(x) \geq f(x_0)$ für alle $x, x_0 \in (a, b)$ mit $x \geq x_0$, der Differenzierbarkeit von f auf (a, b) und der Definition der Ableitung

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0 \quad \text{für alle } x_0 \in (a, b). \quad \square$$

Bemerkung 8.37. Falls $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ streng monoton wachsend ist, so gilt nicht notwendigerweise auch $f' > 0$ auf (a, b) . Beispielsweise ist die Funktion $x \mapsto x^3$ auf $\mathbb{R}$ streng monoton wachsend, aber es gilt $f'(0) = 0$.

★ **Übung 8.38** (Bernoulli-Ungleichungen für allgemeine Potenzen). Zeigen Sie die Ungleichungen

$$\begin{aligned} (1+x)^a &\leq 1+a \cdot x && \text{für alle } x > -1 \text{ und jeden Exponenten } a \in (0, 1), \\ (1+x)^a &\geq 1+a \cdot x && \text{für alle } x > -1 \text{ und jeden Exponenten } a \in \mathbb{R} \setminus (0, 1). \end{aligned}$$

Übung 8.39 (Charakterisierung der Exponentialfunktion über die Ableitung). Es sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion, die

$$f'(x) = f(x) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}$$

erfüllt. Zeigen Sie, dass $f(x) = f(0) \cdot \exp(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.

Als Anwendung des Schrankensatzes zeigen wir die Differenzierbarkeit einer Funktion in einem inneren Punkt über die stetige Fortsetzbarkeit der Ableitung in diesen Punkt.

Korollar 8.40 (stetige Fortsetzbarkeit der Ableitung). Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein nicht-leeres Intervall, $x_0 \in I$ ein innerer Punkt von I und $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, die auf $I \setminus \{x_0\}$ differenzierbar ist. Falls f' im Punkt x_0 stetig fortgesetzt werden kann, d.h. falls der Grenzwert $\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x)$ in $\mathbb{R}$ existiert, so ist f auch in x_0 differenzierbar und es gilt

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f'(x).$$

Beweis. Wir müssen

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} f'(x) =: L(x_0)$$

zeigen. Dazu sei $\varepsilon > 0$ beliebig, aber fest vorgegeben. Wegen der Existenz von $\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x)$ finden wir mit der ε - δ -Formulierung des Grenzwerts aus Lemma 6.8 ein $\delta > 0$ mit

$$|f'(x) - L(x_0)| < \varepsilon \quad \text{für alle } x \in I \setminus \{x_0\} \text{ mit } |x - x_0| < \delta.$$

Mit dem Schrankensatz aus Korollar 8.36 (i) folgt dann

$$\begin{aligned}(L(x_0) - \varepsilon) \cdot (x - x_0) &\leq f(x) - f(x_0) \leq (L(x_0) + \varepsilon) \cdot (x - x_0) \quad \text{für alle } x \in I \cap (x_0, x_0 + \delta), \\ (L(x_0) - \varepsilon) \cdot (x_0 - x) &\leq f(x_0) - f(x) \leq (L(x_0) + \varepsilon) \cdot (x_0 - x) \quad \text{für alle } x \in I \cap (x_0 - \delta, x_0),\end{aligned}$$

so dass wir insgesamt die Abschätzung

$$\left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - L(x_0) \right| \leq \varepsilon \quad \text{für alle } x \in I \setminus \{x_0\} \text{ mit } |x - x_0| < \delta$$

erhalten. Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, schließen wir auf die Differenzierbarkeit von f im Punkt x_0 mit Ableitung $f'(x_0) = L(x_0)$. $\square$

Kriterien erster Ordnung für lokale Extrema. Haben wir für eine Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ mit $D \subset \mathbb{R}$ alle kritischen Punkte bestimmt, so müssen wir noch herausfinden, ob in diesen Punkten tatsächlich ein lokales Extremum vorliegt, und dann gegebenenfalls den Typ des lokalen Extremums bestimmen. In manchen Situationen kann man diese Frage direkt mit der Definition des lokalen Maximums und Minimums beantworten. Falls die Funktion in einer (kleinen) Umgebung des kritischen Punktes differenzierbar ist, so liefert die Differentialrechnung auch ein hinreichendes Kriterium für das Vorliegen eines lokalen Extremums über einen Vorzeichenwechsel in der ersten Ableitung.

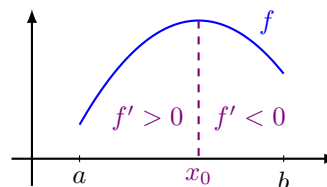
Korollar 8.41 (Vorzeichenwechsel-Kriterium für ein (inneres) lokales Extremum). *Es sei $(a, b) \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall mit $a < b$ und $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion, die in einem Punkt $x_0 \in (a, b)$ einen kritischen Punkt hat, also $f'(x_0) = 0$ erfüllt.*

- Falls $f' \geq 0$ auf (a, x_0) und $f' \leq 0$ auf (x_0, b) gilt, dann hat f in x_0 ein lokales Maximum.
- Falls $f' > 0$ auf (a, x_0) und $f' < 0$ auf (x_0, b) gilt, dann hat f in x_0 ein striktes lokales Maximum.
- Falls $f' \leq 0$ auf (a, x_0) und $f' \geq 0$ auf (x_0, b) gilt, dann hat f in x_0 ein lokales Minimum.
- Falls $f' < 0$ auf (a, x_0) und $f' > 0$ auf (x_0, b) gilt, dann hat f in x_0 ein striktes lokales Minimum.

Beweis. Dies folgt direkt über den Monotoniesatz aus Korollar 8.36 (iii) und der Definition 8.25 eines (strikten) lokalen Maximums bzw. Minimums. $\square$

Bemerkungen 8.42.

- (1) Das Vorzeichenwechsel-Kriterium ist sehr nützlich, da lediglich die erste Ableitung der Funktion untersucht werden muss, um ein hinreichendes Kriterium für das Vorliegen eines lokalen Maximums oder Minimums zu erhalten.



- (2) Für eine Funktion $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ erhält man entsprechende hinreichende Kriterien für ein lokales Extremum in einem Randpunkt $\{a, b\}$ des Definitionsbereichs. Falls $f' \leq 0$ (bzw. $f' < 0$) auf (a, b) gilt, so hat f bei a ein (striktes) lokales Maximum und bei b ein (striktes) lokales Minimum, und falls $f' \geq 0$ (bzw. $f' > 0$) auf (a, b) gilt, so hat f bei a ein (striktes) lokales Minimum und bei b ein (striktes) lokales Maximum.
- (3) Tatsächlich liegen in der Situation von Korollar 8.41 sogar globale Extrema vor. Jedoch wendet man diese Vorzeichenwechsel-Kriterien typischerweise an, um eine allgemeine Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ mit $D \subset \mathbb{R}$ auf lokale Extrema zu untersuchen. Dazu lokalisiert man auf offene Intervalle und überprüft für einen inneren kritischen Punkten $x_0 \in D$, ob es ein $\delta > 0$ gibt, so dass eines der Kriterien in der Umgebung $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ zutrifft (was dann auf die Existenz eines lokalen, aber in der Regel nicht globalen Extremums von f führt).

Natürlich ist es auch möglich, dass für eine differenzierbare Funktion keine der Vorzeichenwechsel-Kriterien aus Korollar 8.41 in einem inneren kritischen Punkt zutrifft und es sich nicht um einen Extrempunkt handelt.

Definition 8.43 (Sattelpunkt). *Es sei $D \subset \mathbb{R}$ eine nicht-leere Menge und $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Falls $x_0 \in D$ ein kritischer Punkt von f ist, aber f kein lokales Extremum in x_0 hat, so bezeichnen wir x_0 als einen Sattelpunkt von f .*

Kriterien zweiter Ordnung für lokale Extrema. Über die zweite Ableitung einer Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ mit $D \subset \mathbb{R}$ kann man auch Kriterien für ein lokales Extremum in einem (inneren) kritischen Punkt angeben. Lediglich über das Vorzeichen der zweiten Ableitung im kritischen Punkt erhält man für das Vorliegen eines lokalen Extremums zum einen ein notwendiges und zum anderen ein hinreichendes Kriterium.

Korollar 8.44 (Kriterium zweiter Ordnung für ein (inneres) lokales Extremum). *Es sei $(a, b) \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall mit $a < b$ und $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion, die in einem Punkt $x_0 \in (a, b)$ zweimal differenzierbar ist und dort einen kritischen Punkt hat, also $f'(x_0) = 0$ erfüllt.*

- Falls f in x_0 ein lokales Maximum hat, dann gilt $f''(x_0) \leq 0$.
- Falls $f''(x_0) < 0$ gilt, dann hat f in x_0 ein striktes lokales Maximum.
- Falls f in x_0 ein lokales Minimum hat, dann gilt $f''(x_0) \geq 0$.
- Falls $f''(x_0) > 0$ gilt, dann hat f in x_0 ein striktes lokales Minimum.

Beweis. Es ist wieder ausreichend, nur die Aussagen über die lokalen Maxima zu zeigen.

- Falls f in x_0 ein lokales Maximum hat, dann gibt es nach Definition eines lokalen Maximums ein $\delta > 0$ mit $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset (a, b)$ und $f(x) \leq f(x_0)$ für alle $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Ist nun $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $(x_0, x_0 + \delta)$, so gibt es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ nach dem Mittelwertsatz 8.33 der Differentialrechnung einen Punkt $\xi_n \in (x_0, x_n)$ mit

$$f'(\xi_n) = \frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} \leq 0.$$

Über $f'(x_0) = 0$ haben wir daher

$$\frac{f'(\xi_n) - f'(x_0)}{\xi_n - x_0} = \frac{f'(\xi_n)}{\xi_n - x_0} \leq 0 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N},$$

so dass wegen der Konvergenz von $\{\xi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ gegen x_0 nach dem Einschachtelungsprinzip aus Satz 4.28 (iii) sowie der Differenzierbarkeit von f' in x_0 die Ungleichung $f''(x_0) \leq 0$ folgt.

- Falls umgekehrt $f''(x_0) < 0$ gilt, dann existiert aufgrund der Tatsache, dass x_0 ein innerer Punkt des Intervalls (a, b) ist, und nach der Definition der Ableitung ein $\delta > 0$ mit $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset (a, b)$ und

$$\frac{f'(x)}{x - x_0} = \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} < 0 \quad \text{für alle } x \in (a, b) \setminus \{x_0\} \text{ mit } |x - x_0| < \delta.$$

Damit muss $f' > 0$ auf $(x_0 - \delta, x_0)$ und $f' < 0$ auf $(x_0, x_0 + \delta)$ gelten, so dass f nach Korollar 8.41 in x_0 ein striktes lokales Maximum hat. $\square$

Bemerkung 8.45. *Verschwundet für eine Funktion $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ die zweite Ableitung in einem kritischen Punkt $x_0 \in (a, b)$, so ist im Allgemeinen keine Aussage möglich:*

- Die Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) := x^3$ für alle $x \in \mathbb{R}$ hat $x_0 = 0$ als einzigen kritischen Punkt, es gilt $f''(0) = 0$ und in 0 liegt kein lokales Extremum vor.
- Die Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) := x^4$ für alle $x \in \mathbb{R}$ hat $x_0 = 0$ als einzigen kritischen Punkt, es gilt $f''(0) = 0$ und in 0 liegt ein globales Minimum vor.

In diesen Fällen könnte man zwar Kriterien höherer Ordnung verwenden und bestimmen, ob die Ordnung der ersten nicht-verschwindenden Ableitung im kritischen Punkt ungerade oder gerade ist (und dann entsprechend in x_0 ein lokales Extremum oder ein Sattelpunkt vorliegt), aber meistens ist es in solchen Fällen zielführender, das Vorzeichenwechsel-Kriterium aus Korollar 8.41 direkt zu überprüfen.

Globale Extrema. Hat man eine Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ mit $D \subset \mathbb{R}$ an allen Randpunkten des Definitionsbereichs D , allen Nichtdifferenzierbarkeitsstellen und allen kritischen Punkten von f auf lokale Extrema untersucht, so stellt sich am Ende noch die Frage, ob es sich jeweils nur um ein lokales oder auch um ein globales Extremum handelt. Hierzu sind nicht nur die Werte von f in den lokalen Extremalstellen zu vergleichen, sondern man muss gegebenenfalls auch berücksichtigen, wie f sich in der Nähe von Punkten in $\mathbb{R} \setminus D$, die Häufungspunkte des Definitionsbereichs sind, oder bei $x \rightarrow \pm\infty$ verhält (beispielsweise durch die Bestimmung der entsprechenden Grenzwerte).

Konvexität. Wir beschäftigen uns nun mit den Eigenschaften der Konvexität und Konkavität einer Funktion und deren Charakterisierung über die zweite Ableitung.

Definition 8.46 (konvexe und konkave Funktion). *Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein nicht-leeres Intervall und $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Wir bezeichnen f*

- als konvex (auf I), falls

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2) \quad \text{für alle } x_1, x_2 \in I \text{ und } \lambda \in [0, 1] \text{ gilt,}$$

- als streng konvex (auf I), falls

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) < \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2) \quad \text{für alle } x_1, x_2 \in I \text{ mit } x_1 \neq x_2 \text{ und } \lambda \in (0, 1) \text{ gilt,}$$

- als (streng) konkav (auf I), falls die Funktion $-f$ (streng) konvex (auf I) ist.

Bemerkungen 8.47.

- (1) Die geometrische Bedeutung von Konvexität ist, dass der Funktionsgraph in einem Intervall $[x_1, x_2]$ für $x_1 < x_2$ stets unterhalb der Sekante durch die Punkte $(x_1, f(x_1))$ und $(x_2, f(x_2))$ verläuft. Da man jeden Punkt $x \in [x_1, x_2]$ schreiben kann als

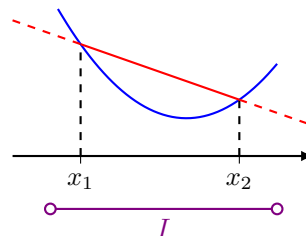
$$x = \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 \quad \text{mit} \quad \lambda = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} \in [0, 1],$$

kann man die Konvexität einer Funktion $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ äquivalent auch über die Bedingung

$$f(x) \leq \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2) \quad \text{für alle } x_1, x_2, x \in I \text{ mit } x_1 < x < x_2 \quad (8.1)$$

ausdrücken (und entsprechend die strenge Konvexität über die strikte Ungleichung in dieser Bedingung).

- (2) Man kann zeigen, dass jede konvexe Funktion $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ auf I stetig (aber nicht notwendigerweise differenzierbar) ist.
- (3) Bei der betriebswirtschaftlichen Kostenrechnung interessiert man sich dafür, wie sich die Gesamtkosten in Abhängigkeit von der Bezugsgröße in einem realistischen Szenario verändern. Für den Kostenverlauf relevanter Einzelposten unterscheidet man unter anderem:
 - fix, d.h. die Kosten (wie für die Miete) bleiben unabhängig von der Bezugsgröße konstant,
 - linear oder proportional, d.h. die Kosten (wie für normale Lohnkosten) wachsen linear mit der Bezugsgröße,
 - progressiv oder überproportional, d.h. die Kosten (wie für Lohnkosten durch Überstunden) wachsen stärker als die Bezugsgröße,
 - degressiv oder unterproportional, d.h. die Kosten (wie für Material mit Mengenrabatt) wachsen langsamer als die Bezugsgröße,



- regressiv, d.h. die Kosten (wie für Heizung) sinken mit der Bezugsgröße.

Mathematisch wird ein progressiver oder degressiver Kostenverlauf durch eine monoton wachsende Funktion, die konvex bzw. konkav ist, beschrieben. Betrachtet man als Bezugsgröße eine produzierte Stückzahl, so ergibt sich aus den Gesamtkosten ein Stückpreis in Abhängigkeit von der Produktionsmenge. Wachsen die Kosten eines Einzelelements progressiv oder degressiv, so steigen bzw. sinken diese Kosten je produziertem Stück mit der Produktionsmenge.

Beispiel 8.48. Die Betragsfunktion $|\cdot|: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ erfüllt nach der Dreiecksungleichung

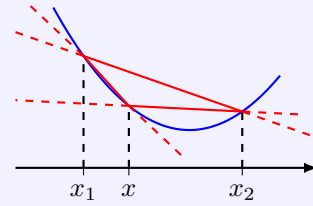
$$|\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2| \leq \lambda|x_1| + (1 - \lambda)|x_2| \quad \text{für alle } x_1, x_2 \in \mathbb{R} \text{ und } \lambda \in [0, 1]$$

und ist damit konvex auf $\mathbb{R}$. Da hierbei im Fall $x_1 \cdot x_2 \geq 0$ (wenn also x_1, x_2 beide nicht-negativ oder nicht-positiv sind) Gleichheit gilt, ist die Betragsfunktion jedoch nicht streng konvex auf $\mathbb{R}$.

Die Konvexität einer Funktion kann man äquivalent über Ungleichungen für Sekantensteigungen auf dem Funktionsgraphen schreiben.

Lemma 8.49. Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein nicht-leeres Intervall und $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Es gilt genau dann (strenge) Konvexität von f , wenn eine (und damit jede) der folgenden (strikten) Ungleichungen für alle Punkte $x_1, x_2, x \in I$ mit $x_1 < x < x_2$ gilt:

$$\begin{aligned} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} &\leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}, \\ \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} &\leq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}, \\ \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} &\leq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}. \end{aligned}$$



Beweis. Nutzen wir $\frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = 1$, so erhalten wir durch Umformungen der Ungleichung

$$f(x) \leq \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2)$$

aus der zur Konvexität äquivalenten Bedingung (8.1)

$$\begin{aligned} f(x) - f(x_1) &\leq \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} (f(x_2) - f(x_1)), \\ f(x) - f(x_2) &\leq \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} (f(x_1) - f(x_2)), \\ \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} (f(x) - f(x_1)) &\leq \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} (f(x_2) - f(x)), \end{aligned}$$

für die man sofort die Äquivalenz zu den drei Ungleichungen in der Aussage des Lemmas erkennt. $\square$

Bemerkung 8.50. Ist $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ eine (streng) konvexe Funktion, so sieht man anhand der ersten beiden Ungleichungen von Lemma 8.49, dass die Sekantensteigung

$$I \ni x \mapsto \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad \text{für festes } x_0 \in I \text{ (streng) monoton wächst.}$$

Für (zweifach) differenzierbare Funktionen lässt sich Konvexität mithilfe der ersten (und zweiten) Ableitung charakterisieren und damit einfach nachweisen.

Satz 8.51 (Konvexitätskriterien). Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall mit Intervallgrenzen $-\infty \leq a < b \leq \infty$ und $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann gelten die folgenden Aussagen:

- (i) Falls f auf (a, b) differenzierbar ist, dann ist f genau dann (streng) konvex auf I , wenn f' auf (a, b) (streng) monoton wachsend ist.
- (ii) Falls f auf (a, b) zweimal differenzierbar ist, dann ist f genau dann konvex auf I , wenn $f'' \geq 0$ auf (a, b) gilt. Gilt in diesem Fall sogar $f'' > 0$ auf (a, b) , dann ist f streng konvex I .

Beweis.

- (i) Falls f konvex auf I ist, so können wir für beliebige Punkte $x_1, x_2 \in (a, b)$ mit $x_1 < x_2$ den Grenzwert $x \searrow x_1$ in der ersten Ungleichung und den Grenzwert $x \nearrow x_2$ in der zweiten Ungleichung von Lemma 8.49 bilden. Dies zeigt die Ungleichungen

$$f'(x_1) \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq f'(x_2),$$

wobei unter der Voraussetzung von strenger Konvexität wegen Bemerkung 8.50 jeweils sogar die strikten Ungleichungen gelten. Wegen der Beliebigkeit von $x_1, x_2 \in (a, b)$ ist damit die (strenge) Monotonie von f' gezeigt.

Falls umgekehrt f' monoton wachsend auf (a, b) ist, so finden wir für beliebige Punkt $x_1, x_2, x \in (a, b)$ mit $x_1 < x < x_2$ nach dem Mittelwertsatz 8.33 der Differentialrechnung zwei Punkte $\xi_1 \in (x_1, x)$ und $\xi_2 \in (x, x_2)$ mit

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} = f'(\xi_1) \leq f'(\xi_2) = \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x},$$

wobei im Falle strenger Monotonie sogar die strikte Ungleichung $f'(\xi_1) < f'(\xi_2)$ gilt. Gemäß der dritten Ungleichung in Lemma 8.49 ist damit die (strenge) Konvexität von f auf I nachgewiesen.

- (ii) Dies folgt sofort aus der Charakterisierung (strenger) Konvexität in (i) sowie dem Monotoniesatz aus Korollar 8.36 (i) (angewandt auf die Ableitung f' anstelle von f). $\square$

Beispiele 8.52.

- (i) Die Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) := x^2$ für alle $x \in \mathbb{R}$ hat als zweite Ableitung $f'' \equiv 2$ und ist daher streng konvex auf $\mathbb{R}$.
- (ii) Die Exponentialfunktion hat als zweite Ableitung $\exp'' = \exp > 0$ und ist daher streng konvex auf $\mathbb{R}$.
- (iii) Die Logarithmusfunktion hat als zweite Ableitung $\log''(x) = -x^{-2} < 0$ für alle $x \in (0, \infty)$ und ist daher streng konkav auf $(0, \infty)$.

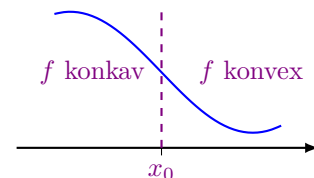
Übung 8.53. Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall mit Intervallgrenzen $-\infty \leq a < b \leq \infty$ und $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, die auf (a, b) differenzierbar ist. Zeigen Sie, dass f genau dann (streng) konvex auf I ist, wenn für jedes $x_0 \in (a, b)$ die (strikte Form der) Ungleichung

$$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) \quad \text{für alle } x \in I \setminus \{x_0\} \quad (8.2)$$

gilt, d.h. wenn der Graph von f über $I \setminus \{x_0\}$ oberhalb der Tangente an $(x_0, f(x_0))$ liegt.

Auch die Eigenschaften von Konvexität und Konkavität lassen sich für eine allgemeine Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ mit $D \subset \mathbb{R}$ lokal betrachten. Hierbei spezifiziert man die Intervalle des Definitionsbereiches, auf denen f jeweils konvex oder konkav ist.

Definition 8.54 (Wendepunkt). Es sei $D \subset \mathbb{R}$ eine nicht-leere Menge und $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Wir bezeichnen einen (inneren) Punkt $x_0 \in D$ als einen Wendepunkt von f , falls für ein $\delta > 0$ mit $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset D$ entweder f oder $-f$ auf $(x_0 - \delta, x_0)$ konvex und auf $(x_0, x_0 + \delta)$ konkav ist.



Bemerkungen 8.55.

- (1) Untersucht man eine zweifach differenzierbare Funktion, so spricht man anstelle von konvex und konkav auch von linksgekrümmt und rechtsgekrümmt (bei Durchlaufen des Funktionsgraphen in positiver x -Richtung). Ein Wendepunkt ist in diesem Fall gerade ein Punkte, an denen die zweite Ableitung f'' ihr Vorzeichen wechselt.
- (2) Betriebswirtschaftlich bedeutet ein Wendepunkt bei einem monoton wachsendem Kostenverlauf, dass degressives auf progressives Wachstum umschlägt (siehe Bemerkung 8.47 (3)). Damit ist der Stückpreis in Abhängigkeit von der Produktionsmenge in einem solchen Wendepunkt minimal und damit auch ökonomisch relevant.

Regeln von de L'Hospital. Abschließend beschäftigen wir uns mit dem Nutzen der Differentialrechnung für die Berechnung einiger Grenzwerte, bei denen die Rechenregeln für Grenzwerte aus Lemma 6.13 nicht direkt anwendbar sind. Dazu benötigen wir eine Verallgemeinerung des Mittelwertsatzes 8.33 der Differentialrechnung auf Quotienten von Funktionen:

Satz 8.56 (verallgemeinerter Mittelwertsatz der Differentialrechnung). *Es sei $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ein Intervall mit $a < b$ und es seien $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ zwei stetige Funktionen, die auf dem offenen Intervall (a, b) differenzierbar sind, mit $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in (a, b)$. Dann gilt $g(a) \neq g(b)$ und es existiert ein $x_0 \in (a, b)$ mit*

$$\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Bemerkung 8.57. Die Aussage von Satz 8.56 entspricht im Spezialfall $g = \text{Id}_{[a,b]}$ dem Mittelwertsatz 8.33 der Differentialrechnung und stellt andernfalls eine echte Verallgemeinerung dar, die nicht direkt aus der Aussage von Satz 8.33 gefolgert werden kann. Man beachte dazu, dass die separate Anwendung des Mittelwertsatzes auf die Funktionen f und g lediglich die Existenz zweier (möglicherweise verschiedener) Punkte $x_0, \tilde{x}_0 \in (a, b)$ mit

$$\frac{f'(x_0)}{g'(\tilde{x}_0)} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot \frac{b - a}{g(b) - g(a)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

zeigt. Entscheidend im verallgemeinerten Mittelwertsatz 8.56 ist jedoch, dass Zähler und Nenner auf der linken Seite im gleichen Punkt ausgewertet werden.

Beweis von Satz 8.56. Wir stellen zunächst fest, dass $g(a) \neq g(b)$ gelten muss, da andernfalls nach dem Satz 8.32 von Rolle die Ableitung g' in mindestens einem Punkt in (a, b) eine Nullstelle besitzt. Somit verschwindet der Nenner der rechten Seite in der behaupteten Gleichung nicht. Ähnlich wie im Beweis des Mittelwertsatzes 8.33 der Differentialrechnung betrachten wir eine Hilfsfunktion $h: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, definiert über

$$h(x) := f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \cdot (g(x) - g(a)) \quad \text{für alle } x \in [a, b].$$

Dann ist h auf $[a, b]$ stetig, hat wegen

$$h(a) = f(a) = f(b) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \cdot (g(b) - g(a)) = h(b)$$

den gleichen Funktionswert an den beiden Randpunkten, und ist außerdem auf (a, b) differenzierbar mit

$$h'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \cdot g'(x) \quad \text{für alle } x \in (a, b).$$

Nach dem Satz 8.32 von Rolle finden wir einen kritischen Punkt $x_0 \in (a, b)$ für h , also mit

$$h'(x_0) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

□

Mithilfe des verallgemeinerten Mittelwertsatzes 8.56 der Differentialrechnung können wir einige Grenzwerte von Quotienten von Funktionen bestimmen, indem wir die Grenzwerte der Quotienten der Ableitungen dieser Funktionen bilden.

Satz 8.58 (Grenzwertregeln von de L'Hospital). *Es sei $(a, b) \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall mit $-\infty \leq a < b \leq \infty$ und $x_0 \in \{a, b\}$ einer der Randpunkt von (a, b) . Außerdem seien $f, g: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ zwei differenzierbare Funktionen mit $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in (a, b)$ und so dass für die (einseitigen) Grenzwerte eine der Situationen*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$$

oder

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \in \{\pm\infty\} \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \in \{\pm\infty\}$$

zutrifft. Falls der Grenzwert $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ in $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ (ggf. uneigentlich) existiert, dann existiert auch $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ in $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ (ggf. uneigentlich), und es gilt

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Beweis. Es genügt, bei der folgenden Fallunterscheidung jeweils nur den Grenzwert bei $x \nearrow x_0 = b$ am rechten Randpunkt zu betrachten, da wir andernfalls auf das gespiegelte Intervall $(-b, -a)$ und die gespiegelten Funktionen $(-b, -a) \ni x \mapsto f(-x)$ und $(-b, -a) \ni x \mapsto g(-x)$ übergehen können, um den Grenzwert bei $x \searrow a$ am linken Randpunkt über den Zusammenhang

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow -a} \frac{f(-x)}{g(-x)}$$

als Grenzwert bei $x \nearrow -a$ am rechten Randpunkt auszudrücken.

Fall 1: $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = 0$ und $\lim_{x \rightarrow b} g(x) = 0$ mit $b \in \mathbb{R}$. In diesem Fall können wir die Funktionen f und g auf das halboffene Intervall $(a, b]$ mittels $f(b) := 0$ und $g(b) := 0$ fortsetzen. Es sei $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in (a, b) mit $x_n \rightarrow b$ bei $n \rightarrow \infty$. Wenden wir den verallgemeinerten Mittelwertsatz 8.56 der Differentialrechnung auf dem kompakten Intervall $[x_n, b]$ mit $n \in \mathbb{N}$ an, so finden wir Zwischenstellen $\xi_n \in (x_n, b)$ mit

$$\frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \frac{f(x_n) - f(b)}{g(x_n) - g(b)} = \frac{f'(\xi_n)}{g'(\xi_n)} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Da $\xi_n \rightarrow b$ bei $n \rightarrow \infty$ nach dem Einschachtelungsprinzip aus Satz 4.28 (iii) gilt, folgt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f'(\xi_n)}{g'(\xi_n)} = \lim_{x \rightarrow b} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Wegen der Beliebigkeit der Folge $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ in (a, b) mit $x_n \rightarrow b$ bei $n \rightarrow \infty$ folgt nun die Behauptung.

Fall 2: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ und $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0$. Hier dürfen wir nach Einschränkung des Definitionsbereiches $a > 0$ annehmen, verwenden dann die Substitution $x \mapsto -x^{-1}$ (vgl. Übung 6.21) und betrachten damit Funktionen $\tilde{f}, \tilde{g}: (-a^{-1}, 0) \rightarrow \mathbb{R}$ definiert über $\tilde{f}(x) := f(-x^{-1})$, $\tilde{g}(x) := g(-x^{-1})$ für $x \in (-a^{-1}, 0)$. Dann gilt $\lim_{x \nearrow 0} \tilde{f}(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ sowie $\lim_{x \nearrow 0} \tilde{g}(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0$, und da sich die Terme des Nachdifferenzierens kürzen, haben wir außerdem

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \nearrow 0} \frac{f'(-x^{-1})}{g'(-x^{-1})} = \lim_{x \nearrow 0} \frac{f'(-x^{-1})x^{-2}}{g'(-x^{-1})x^{-2}} = \lim_{x \nearrow 0} \frac{\tilde{f}'(x)}{\tilde{g}'(x)}.$$

Wir wenden nun das Resultat des ersten Falls für den Grenzwert an dem endlichen rechten Randpunkt des Intervalls $(-a^{-1}, 0)$ an, mit $\tilde{f}$ und $\tilde{g}$ anstelle von f und g . Damit folgt dann die Behauptung über

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \nearrow 0} \frac{f(-x^{-1})}{g(-x^{-1})} = \lim_{x \nearrow 0} \frac{\tilde{f}(x)}{\tilde{g}(x)} = \lim_{x \nearrow 0} \frac{\tilde{f}'(x)}{\tilde{g}'(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Fall 3: $\lim_{x \rightarrow b} f(x) \in \{\pm\infty\}$ und $\lim_{x \rightarrow b} g(x) \in \pm\{\infty\}$. Wir setzen

$$L := \lim_{x \rightarrow b} \frac{f'(x)}{g'(x)} \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\} \quad (8.3)$$

und betrachten eine beliebige Folge $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ in (a, b) mit $x_n \rightarrow b$ bei $n \rightarrow \infty$. Wir wollen zunächst zeigen, dass die Ungleichung

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)} \leq L \quad (8.4)$$

gilt. Im Fall $L = \infty$ ist offensichtlich nichts zu zeigen, und im Fall $L \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ sei $\ell \in \mathbb{R}$ beliebig, aber fest mit $\ell > L$. Wegen der Existenz des Grenzwertes (8.3) und der bestimmten Divergenz von f und g bei $x \rightarrow b$ finden wir ein $a_\ell \in (a, b)$ mit

$$f(x) \neq 0, \quad g(x) \neq 0 \quad \text{und} \quad \frac{f'(x)}{g'(x)} \leq \ell \quad \text{für alle } x \in [a_\ell, b).$$

Nach einer Indexverschiebung dürfen wir $x_n \geq a_\ell$ für alle $n \in \mathbb{N}$ annehmen. Wenden wir den verallgemeinerten Mittelwertsatz 8.56 der Differentialrechnung auf dem Intervall $[a_\ell, x_n]$ mit $n \in \mathbb{N}$ an, finden wir Zwischenstellen $\xi_n \in (a_\ell, x_n)$ mit

$$\frac{f(x_n) - f(a_\ell)}{g(x_n) - g(a_\ell)} = \frac{f'(\xi_n)}{g'(\xi_n)} \leq \ell \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Da die Folgen $\{f(x_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ und $\{g(x_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ nach Voraussetzung bestimmt divergieren, haben wir

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{f(a_\ell)}{f(x_n)}\right) = 1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{g(a_\ell)}{g(x_n)}\right).$$

Berücksichtigen wir die Tatsache, dass $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in (a, b)$ gilt und damit g nach dem Satz 8.32 von Rolle injektiv ist, erhalten wir

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)} \cdot \frac{1 - \frac{f(a_\ell)}{f(x_n)}}{1 - \frac{g(a_\ell)}{g(x_n)}} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x_n) - f(a_\ell)}{g(x_n) - g(a_\ell)} \leq \ell.$$

Da $\ell \in \mathbb{R}$ mit $\ell > L$ beliebig war, haben wir damit die Ungleichung (8.4) auch für $L \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ gezeigt. Durch den Übergang $f \rightarrow -f$ und das Spiegelungsprinzip folgt nun auch die Ungleichung

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = -\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{-f(x_n)}{g(x_n)} \geq -\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-f'(x_n)}{g'(x_n)} = L,$$

so dass insgesamt nach Satz 4.61 (iv) die Konvergenz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = L = \lim_{x \rightarrow b} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

gezeigt ist. Da die Folge $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ in (a, b) mit $x_n \rightarrow b$ bei $n \rightarrow \infty$ beliebig war, ist die Aussage des Satzes auch in diesem letzten Fall gezeigt. $\square$

Bemerkungen 8.59.

- (1) Für innere Punkte $x_0 \in (a, b)$, an denen beide Funktionen verschwinden, ergeben sich die gleichen Grenzwertregeln. Dazu beachtet man, dass Grenzwerte bei $x \rightarrow x_0$ genau dann existieren, wenn der linksseitige und rechtsseitige Grenzwert existieren und übereinstimmen, vgl. Bemerkung 6.18 (1), und wendet dann die Grenzwertregel von de L'Hospital auf den Intervallen (a, x_0) und (x_0, b) an.

- (2) Versucht man für den Quotient zweier Funktionen die Grenzwertberechnung nach de L'Hospital durchzuführen und stößt beim Quotient der Ableitungen wieder auf einen unbestimmten Ausdruck, so dass die Voraussetzungen von de L'Hospital erfüllt sind, dann kann man de L'Hospital erneut anwenden und den gesuchten Grenzwert ggf. iterativ bestimmen.
- (3) Lässt sich der Ausdruck im Grenzwert als Quotient von Potenzreihen darstellen, so ist die Berechnung des Grenzwertes über Potenzreihen und Lemma 6.11 häufig einfacher als über die Regeln von de L'Hospital.

Beispiele 8.60.

- (i) Typ $\frac{0}{0}$: Der Grenzwert von $\frac{\sin(x)}{x}$ bei $x \rightarrow 0$ ist eine klassische Situation von de L'Hospital und berechnet sich als

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x)}{1} = 1.$$

- (ii) Typ $\frac{\infty}{\infty}$: Das Wachstums der Exponentialfunktion und der Polynomfunktionen lässt sich auch über de L'Hospital vergleichen:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\exp(x)}{x^3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\exp(x)}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\exp(x)}{6x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\exp(x)}{6} = \infty.$$

Auch andere Grenzwerte unbestimmten Typs lassen sich mit den Grenzwertregeln von de L'Hospital bestimmen. Hierfür muss man den zu berechnenden Ausdruck erst so umformen, dass sich eine der beiden Situationen aus Satz 8.58 ergibt. Eine solche Umformung ist nicht eindeutig und die Wahl kann je nach Beispiel unterschiedlich ausfallen, damit sich der Grenzwert nach de L'Hospital relativ einfach berechnen lässt.

- (iii) Typ $0 \cdot \infty$: Um den Grenzwert von $x \log(x)$ bei $x \searrow 0$ zu bilden, kann man den Faktor x als x^{-1} im Nenner ausdrücken und so einen Grenzwert des Typs $\frac{0}{0}$ berechnen:

$$\lim_{x \searrow 0} x \log(x) = \lim_{x \searrow 0} \frac{\log(x)}{x^{-1}} = \lim_{x \searrow 0} \frac{x^{-1}}{-x^{-2}} = - \lim_{x \searrow 0} x = 0.$$

- (iv) Typ 0^0 : Der Grenzwert von x^x bei $x \searrow 0$ lässt sich über die Definition 7.7 allgemeiner Potenzen in einen Exponentialausdruck umformen, dessen Argument von der eben diskutierten Form $0 \cdot \infty$ ist. Damit erhalten wir über die Stetigkeit der Exponentialfunktion

$$\lim_{x \searrow 0} x^x = \lim_{x \searrow 0} \exp(x \log(x)) = \exp(0) = 1.$$

- (v) Typ 1^∞ : Für die Berechnung des Grenzwerts von $(1 + \frac{2}{x})^x$ bei $x \rightarrow \infty$ nutzen wir wieder die Form allgemeiner Potenzen, mit $(1 + \frac{2}{x})^x = \exp(x \log(1 + \frac{2}{x}))$. Wegen

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \log\left(1 + \frac{2}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log(1 + 2x^{-1})}{x^{-1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2x^{-2}}{(1 + 2x^{-1})(-x^{-2})} = 2$$

erhalten wir dann wieder über die Stetigkeit der Exponentialfunktion

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \exp\left(x \log\left(1 + \frac{2}{x}\right)\right) = \exp(2) = e^2.$$

- (vi) Typ ∞^0 : Um den Grenzwert von $(\exp(x) + x)^{\frac{1}{x}}$ bei $x \rightarrow \infty$ zu berechnen, schreiben wir diesen Ausdruck zunächst in der Form $\exp(\frac{1}{x} \log(\exp(x) + x))$. Mit

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \log(\exp(x) + x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log(\exp(x) + x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\exp(x) + 1}{\exp(x) + x} = 1$$

ergibt sich dann

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\exp(x) + x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \exp\left(\frac{1}{x} \log(\exp(x) + x)\right) = \exp(1) = e.$$

(vii) Typ $\infty - \infty$: Der Grenzwert von $\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin(x)}$ bei $x \rightarrow 0$ lässt sich durch Bildung des Hauptnenners auf den Typ $\frac{0}{0}$ umformen und dann durch zweifache Anwendung der Regel von de L'Hospital berechnen:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin(x)} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x) - x}{x \sin(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - 1}{x \cos(x) + \sin(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin(x)}{-x \sin(x) + 2 \cos(x)} = 0.$$

Bemerkungen 8.61 (Vorsicht).

- (1) Die Regeln von de L'Hospital können nur angewandt werden, wenn der Grenzwert unbestimmt ist von einem der Typen in den Beispielen 8.60. Ist der Grenzwert dagegen bestimmt, so können die Regeln von de L'Hospital nicht angewandt werden. Beispielsweise ist der Grenzwert

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{2 + x} = 0$$

über die Rechenregeln für Grenzwerte nach Lemma 6.13, es gilt aber

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x)}{2} = \frac{1}{2}.$$

- (2) Die Regeln von de L'Hospital machen eine Aussage über die Berechnung von unbestimmten Grenzwerten, haben aber nichts mit der Berechnung der Ableitung von Quotienten von Funktionen, also der Quotientenregel aus Lemma 8.7 (iii) zu tun.

Übung 8.62. Berechnen Sie die Grenzwerte

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin(x)}{1 - \cos(x)}, \quad \lim_{x \searrow 1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\log(x)} \right) \quad \text{and} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{1}{x}}.$$

★ **Übung 8.63.** Berechnen Sie den Grenzwert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \cos\left(\frac{1}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{1}{4}\right) \cdot \dots \cdot \cos\left(\frac{1}{2^n}\right).$$

8.3 Differenzierbare Funktionen in Grenzprozessen

Wir überlegen uns nun, unter welchen Voraussetzungen sich für eine Folge von differenzierbaren Funktionen die Differenzierbarkeit auf die Grenzfunktion überträgt und die Ableitung dieser Grenzfunktion als Grenzwert der Ableitungen der Funktionenfolge gebildet werden kann.

Satz 8.64 (Differentiation von Funktionenfolgen). *Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von differenzierbaren Funktionen $f_n: I \rightarrow \mathbb{R}$ für $n \in \mathbb{N}$, so dass die Folge der Funktionswerte $\{f_n(x_0)\}_{n \in \mathbb{N}}$ in einem Punkt $x_0 \in I$ konvergiert und die Folge $\{f'_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ der Ableitungen gleichmäßig auf I konvergiert. Dann konvergiert die Folge $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ von Funktionen punktweise gegen eine Funktion $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, die differenzierbar ist mit*

$$f'(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x) \quad \text{für alle } x \in I.$$

Beweis. Wir überlegen uns zunächst, dass die Folge $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ punktweise konvergiert. Dazu seien $\tilde{x}_0 \in I$ und $\varepsilon > 0$ beliebig. Mithilfe des Schrankensatzes aus Korollar 8.36 (i) erhalten wir zunächst

$$\begin{aligned} |f_n(\tilde{x}_0) - f_m(\tilde{x}_0)| &\leq |(f_n - f_m)(\tilde{x}_0) - (f_n - f_m)(x_0)| + |f_n(x_0) - f_m(x_0)| \\ &\leq \sup\{|(f'_n - f'_m)(\tilde{x})| : \tilde{x} \in I\} \cdot |\tilde{x}_0 - x_0| + |f_n(x_0) - f_m(x_0)|. \end{aligned}$$

Sind $m, n \in \mathbb{N}$ hinreichend groß, so wird die rechte Seite kleiner als ε , da der erste Term wegen des Cauchy-Kriteriums aus Lemma 6.50 für die gleichmäßige Konvergenz der Folge $\{f'_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ der Ableitungen

und der zweite Term wegen des Cauchy-Kriteriums für die Konvergenz der Folge $\{f_n(x_0)\}_{n \in \mathbb{N}}$ der Punktauswertungen der Funktionen aus Satz 4.69 beliebig klein werden. Damit ist $\{f_n(\tilde{x}_0)\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge und konvergiert nach Satz 4.69 gegen ein $f(\tilde{x}_0)$. Wegen der Beliebigkeit von $\tilde{x}_0 \in I$ zeigt dies die punktweise Konvergenz der Funktionenfolge $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ gegen eine Funktion $f: I \rightarrow \mathbb{R}$.

Als nächstes wollen wir die Differenzierbarkeit von f zeigen und die angegebene Formel für die Ableitung verifizieren. Dazu betrachten wir wieder ein beliebiges $\tilde{x}_0 \in I$. Ähnlich wie zuvor erhalten wir für die Differenzenquotienten über den Schrankensatz aus Korollar 8.36 (i)

$$\left| \frac{f_n(x) - f_n(\tilde{x}_0)}{x - \tilde{x}_0} - \frac{f_m(x) - f_m(\tilde{x}_0)}{x - \tilde{x}_0} \right| \leq \sup\{|(f'_n - f'_m)(\tilde{x})|: \tilde{x} \in I\}$$

für alle $x \in I \setminus \{\tilde{x}_0\}$. Wegen der gleichmäßigen Konvergenz der Folge $\{f'_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ erhalten wir also eine gleichmäßige Konvergenz der Differenzenquotienten der Funktionen f_n , deren Grenzwert sich wegen der punktweisen Konvergenz der Funktionenfolge $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ gegen f mit dem Differenzenquotienten von f identifizieren lässt, d.h. wir haben

$$\sup \left\{ \left| \frac{f_n(x) - f_n(\tilde{x}_0)}{x - \tilde{x}_0} - \frac{f(x) - f(\tilde{x}_0)}{x - \tilde{x}_0} \right| : x \in I \setminus \{\tilde{x}_0\} \right\} \rightarrow 0 \quad \text{bei } n \rightarrow \infty.$$

Es sei nun $\varepsilon > 0$ beliebig. Bezeichnen wir mit $g: I \rightarrow \mathbb{R}$ den gleichmäßigen Grenzwert von $\{f'_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, so bestimmen wir mithilfe dieser gleichmäßigen Konvergenz und der gerade gezeigten gleichmäßigen Konvergenz der Differenzenquotienten zunächst ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$\sup\{|(f'_{n_0} - g)(x)|: x \in I\} < \frac{\varepsilon}{3}$$

sowie

$$\sup \left\{ \left| \frac{f_{n_0}(x) - f_{n_0}(\tilde{x}_0)}{x - \tilde{x}_0} - \frac{f(x) - f(\tilde{x}_0)}{x - \tilde{x}_0} \right| : x \in I \setminus \{\tilde{x}_0\} \right\} < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Als Nächstes bestimmen wir aus der Differenzierbarkeit der Funktion f_{n_0} in $\tilde{x}_0$ ein $\delta > 0$ mit

$$\left| \frac{f_{n_0}(x) - f_{n_0}(\tilde{x}_0)}{x - \tilde{x}_0} - f'_{n_0}(\tilde{x}_0) \right| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{für alle } x \in I \setminus \{\tilde{x}_0\} \text{ mit } |x - \tilde{x}_0| < \delta.$$

Mithilfe der Dreiecksungleichung schließen wir dann auf

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(x) - f(\tilde{x}_0)}{x - \tilde{x}_0} - g(\tilde{x}_0) \right| &\leq \left| \frac{f(x) - f(\tilde{x}_0)}{x - \tilde{x}_0} - \frac{f_{n_0}(x) - f_{n_0}(\tilde{x}_0)}{x - \tilde{x}_0} \right| \\ &\quad + \left| \frac{f_{n_0}(x) - f_{n_0}(\tilde{x}_0)}{x - \tilde{x}_0} - f'_{n_0}(\tilde{x}_0) \right| + |f'_{n_0}(\tilde{x}_0) - g(\tilde{x}_0)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \end{aligned}$$

für alle $x \in I \setminus \{\tilde{x}_0\}$ mit $|x - \tilde{x}_0| < \delta$. Dies zeigt

$$\lim_{x \rightarrow \tilde{x}_0} \frac{f(x) - f(\tilde{x}_0)}{x - \tilde{x}_0} = g(\tilde{x}_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(\tilde{x}_0),$$

woraus wegen der Beliebigkeit von $\tilde{x}_0 \in I$ die Differenzierbarkeit von f mit der im Satz angegebenen Formel für die Ableitung folgt. $\square$

Bemerkung 8.65. Beide Voraussetzungen, dass die Folge $\{f_n(x_0)\}_{n \in \mathbb{N}}$ der Funktionswerte in einem Punkt $x_0 \in I$ konvergiert und dass die Folge $\{f'_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ der Ableitungen gleichmäßig konvergiert, sind notwendig dafür, dass die Grenzfunktionen differenzierbar ist und ihre Ableitung mit dem Grenzwert der Ableitungen der Funktionenfolge übereinstimmt.

- Es sei $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ die Folge von differenzierbaren Funktionen $f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f_n(x) := n$ und folglich $f'_n(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$. Die Folge $\{f'_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ der Ableitungen konvergiert damit insbesondere gleichmäßig, jedoch konvergiert $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ offensichtlich gegen keine Funktion.

- Es sei $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ die Folge von differenzierbaren Funktionen $f_n: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f_n(x) := n^{-1}x^n$ und folglich $f'_n(x) = x^n$ für alle $x \in [0, 1]$ und $n \in \mathbb{N}$. Die Folge $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert gleichmäßig gegen die differenzierbare Funktion $f \equiv 0$ auf $[0, 1]$, die Folge der Ableitungen $\{f'_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert punktweise, aber nicht gleichmäßig, mit $\lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x) = 0 = f'(x)$ für alle $x \in [0, 1)$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(1) = 1 \neq f'(1)$ (vgl. Beispiel 6.45).

Eine wichtige Anwendung von Satz 8.64 ist die Differentiation von Potenzreihenfunktionen auf dem (offenen) Konvergenzintervall über die gliedweise Differentiation.

Satz 8.66 (Differentiation von Potenzreihen). *Es sei $P(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0)^k$ eine Potenzreihenfunktion mit reellen Koeffizienten $\{a_k\}_{k \in \mathbb{N}_0}$, einem Entwicklungspunkt $x_0 \in \mathbb{R}$ und positivem Konvergenzradius $R \in (0, \infty]$. Dann ist die Potenzreihenfunktion P auf dem offenen Intervall $(x_0 - R, x_0 + R)$ differenzierbar mit*

$$P'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k (x - x_0)^{k-1}.$$

Beweis. Wir verwenden im Folgenden die Bezeichnung $Q(x) := \sum_{k=1}^{\infty} k a_k (x - x_0)^{k-1}$ für die formal differenzierte Potenzreihe, mit den Partialsummen

$$Q_n(x) := \sum_{k=1}^n k a_k (x - x_0)^{k-1} \quad \text{für } x \in \mathbb{R} \text{ und } n \in \mathbb{N}.$$

Mithilfe der Formel von Cauchy–Hadamard aus Satz 5.52 (iv) zeigen wir zunächst, dass der Konvergenzradius der Potenzreihenfunktion Q mit dem Konvergenzradius R der Potenzreihenfunktion P übereinstimmt. Wegen $\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{k} = 1$ (siehe Lemma 4.19 (iv)) gilt nämlich

$$\left(\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{k |a_k|} \right)^{-1} = \left(\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{k} \sqrt[k]{|a_k|} \right)^{-1} = \left(\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} \right)^{-1} = R.$$

Mit Satz 6.56 folgt die gleichmäßige Konvergenz der Potenzreihenfunktion Q (also der Folge $\{Q_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ihrer Partialsummen) auf dem offenen Intervall $(x_0 - r, x_0 + r)$, für jedes $r \in (0, R)$. Betrachten wir nun die Partialsummen der Potenzreihenfunktion P , also

$$P_n(x) := \sum_{k=0}^n a_k (x - x_0)^k \quad \text{für } x \in \mathbb{R} \text{ und } n \in \mathbb{N},$$

so haben deren Ableitungen gerade die Darstellung

$$P'_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{d}{dx} (a_k (x - x_0)^k) = \sum_{k=1}^n k a_k (x - x_0)^{k-1} = Q_n(x) \quad \text{für } x \in \mathbb{R} \text{ und } n \in \mathbb{N}.$$

Da außerdem die Potenzreihenfunktion P auf dem offenen Intervall $(x_0 - R, x_0 + R)$ konvergiert, können wir für ein vorgegebenes $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$ den Satz 8.64 auf dem Intervall $(x_0 - r, x_0 + r)$ mit $r \in (0, R)$, so dass $x \in (x_0 - r, x_0 + r)$ gilt, anwenden. Dies zeigt die Behauptung

$$P'(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} P'_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} Q_n(x) = Q(x). \quad \square$$

Mithilfe von Satz 8.66 lassen sich nun einerseits die Werte einiger Potenzreihen bestimmen. Andererseits lassen sich auch Potenzreihendarstellungen einiger Funktionen verifizieren, die entweder die Ableitung einer Funktion sind, die eine Potenzreihendarstellung besitzt, oder deren Ableitungen sich umgekehrt als Potenzreihe ausdrücken lassen.

Beispiele 8.67.

- (i) Für die geometrische Reihe gilt nach Beispiel 5.5 (i)

$$(1-x)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k \quad \text{für alle } x \in (-1, 1).$$

Differenzieren wir nun die linke Seite mit der Kettenregel und die rechte Seite nach Satz 8.66, so erhalten wir

$$(1-x)^{-2} = \frac{d}{dx}(1-x)^{-1} = \frac{d}{dx} \left(\sum_{k=0}^{\infty} x^k \right) = \sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1} \quad \text{für alle } x \in (-1, 1).$$

Somit haben wir den Wert der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1}$ als $(1-x)^{-2}$ für alle $x \in (-1, 1)$ bestimmt, vgl. auch Beispiel 5.44 (i).

- (ii) In Beispiel 8.16 (v) haben wir die Ableitung des Arkustangens als

$$\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2} \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}$$

berechnet. Über die geometrische Reihe können wir diese Ableitung zumindest für alle $x \in (-1, 1)$ in eine Potenzreihe umschreiben und erhalten dann mit Satz 8.66

$$\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k} = \frac{d}{dx} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1} \right) \quad \text{für alle } x \in (-1, 1).$$

Beachten wir noch, dass sowohl der Arkustangens $\arctan$ als auch die Potenzreihe auf der rechten Seite für $x = 0$ verschwindet, dann liefert der Konstanzsatz aus Korollar 8.36 (ii) die Potenzreihendarstellung des Arkustangens auf $(-1, 1)$ als

$$\arctan(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1} \quad \text{für alle } x \in (-1, 1).$$

- (iii) In Beispiel 8.16 (i) haben wir die Ableitung des Logarithmus als

$$\log'(x) = \frac{1}{x} \quad \text{für alle } x \in (0, \infty)$$

berechnet. Betrachten wir anstelle der Logarithmusfunktion nun die Funktion $x \mapsto \log(1+x)$, so können wir deren Ableitung $(1+x)^{-1}$ für $x \in (-1, 1)$ wieder über die geometrische Reihe als Potenzreihe ausdrücken. Mit Satz 8.66 erhalten wir dann

$$\frac{d}{dx} \log(1+x) = \frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k = \frac{d}{dx} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} x^{k+1} \right) \quad \text{für alle } x \in (-1, 1).$$

Da sowohl $x \mapsto \log(1+x)$ als auch die Potenzreihe auf der rechten Seite bei $x = 0$ verschwinden, schließen wir wieder aus dem Konstanzsatz aus Korollar 8.36 (ii) auf die Potenzreihendarstellung der (um 1 verschobenen) Logarithmusfunktion als

$$\log(1+x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} x^{k+1} \quad \text{für alle } x \in (-1, 1).$$

Übung 8.68. Bestimmen Sie den Wert der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} k^2 x^k$ für $x \in (-1, 1)$.

Bemerkung 8.69. In Lemma 6.11 haben wir bereits gezeigt, dass wir die Koeffizienten einer Potenzreihe $P(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0)^k$ mittels der Grenzwertbildung

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{P(x) - \sum_{k=0}^{n-1} a_k(x - x_0)^k}{(x - x_0)^n} = a_n$$

rekonstruieren kann. Im Fall $n = 1$ entspricht dieser Grenzwert gerade der Bildung der ersten Ableitung von P und der anschließenden Auswertung bei $x = x_0$, d.h. wir haben

$$a_1 = P'(x_0).$$

Mit der iterierten Differentiation der Potenzreihe gemäß Satz 8.66 sehen wir

$$P^{(n)}(x) = \sum_{k=n}^{\infty} k \cdot (k-1) \cdot \dots \cdot (k-n+1) a_k (x - x_0)^{k-n}.$$

Folglich haben wir

$$P^{(n)}(x_0) = n! a_n \quad \Leftrightarrow \quad a_n = \frac{1}{n!} P^{(n)}(x_0) \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

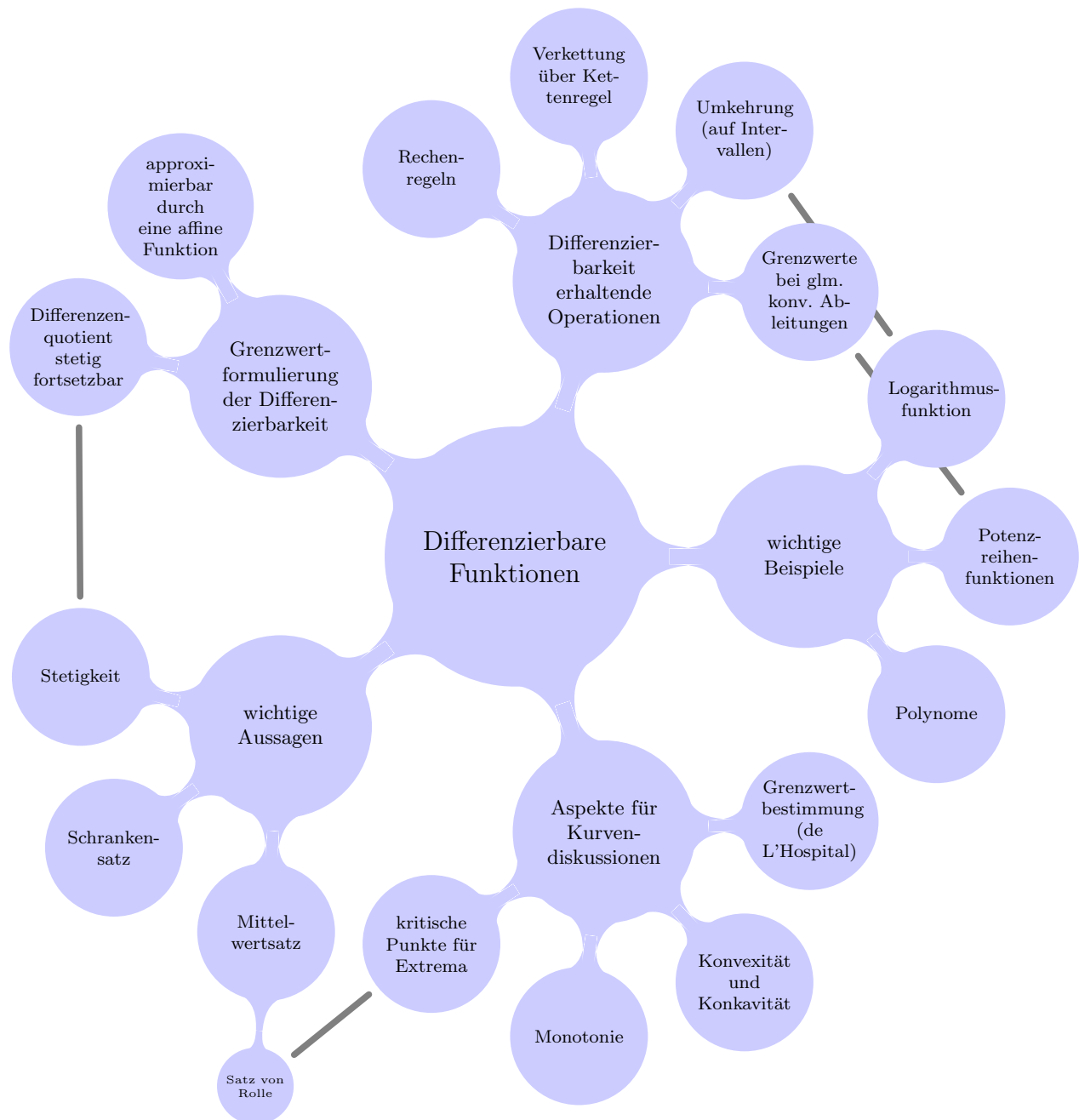
Wir können auch die umgekehrte Strategie der letzten Bemerkung verfolgen und ausgehend von einer (hinreichend oft) differenzierbaren Funktion ein approximierendes Polynom nach dem obigen Schema bilden. Wie auch beim Abbruch von Potenzreihen macht man dabei einen Abbruchfehler (vgl. Lemma 5.58), den man kontrollieren kann. Das so gebildete Polynom wird das Taylorpolynom genannt und im Rahmen der Vorlesung Analysis II näher untersucht.

Definition 8.70 (Taylorpolynom). Es sei $n \in \mathbb{N}$, $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $x_0 \in I$ und $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ eine n -mal differenzierbare Funktion. Wir bezeichnen die Funktion $T_n[f, x_0]: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$T_n[f, x_0](x) := \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0) (x - x_0)^k \quad \text{für } x \in \mathbb{R}$$

als das Taylorpolynom der Ordnung n von f mit Entwicklungspunkt x_0 .

Mindmap. Überlegen Sie sich anhand der Mindmap, wie die wichtigsten Begriffe und Konzepte aus diesem Kapitel zusammenhängen und ob Sie diese verstanden haben!



Literaturverzeichnis

- [1] M. Brokate, J. Zimmer, F. Lindemann, *Analysis 1*, Springer Spektrum, Heidelberg, 2023.
- [2] F. Duzaar, *Analysis I*, Vorlesungsskript Wintersemester 2000/2001, Universität Erlangen, 2001.
- [3] O. Forster, *Analysis 1. Differential- und Integralrechnung einer Veränderlichen.*, 12. ed., Springer Spektrum, Heidelberg, 2016.
- [4] H. Heuser, *Lehrbuch der Analysis. Teil 1*, revised ed., Vieweg + Teubner, Wiesbaden, 2009.
- [5] S. Hildebrandt, *Analysis 1*, corrected ed., Springer-Lehrbuch, Springer, Berlin, 2006.
- [6] K. Königsberger, *Analysis 1*, 6. ed., Springer-Lehrbuch, Springer-Verlag, Berlin, 2004.
- [7] S. Müller, *Analysis 1*, Vorlesungsskript Wintersemester 2010/2011, Universität Bonn, 2011.
- [8] W. Rudin, *Principles of mathematical analysis*, 3rd ed., McGraw-Hill Book Co., 1976, International Series in Pure and Applied Mathematics.
- [9] B. Schmidt, *Analysis I*, Vorlesungsskript Wintersemester 2013/2014, Universität Augsburg, 2014.
- [10] T. Schmidt, *Analysis*, Vorlesungsskript Sommersemester 2017, Universität Hamburg, 2017.

Index

- Abbildung
 - Definition, 24
 - identische, 27
- Abelscher Grenzwertsatz, 165
- Ableitung
 - Definition, 202
 - höherer Ordnung, 209
 - Umkehrfunktion, 207
 - Verkettung, 206
- Absolutbetrag, 54
- Abstandsfunktion, 56
- Äquivalenz, 7
- Äquivalenzrelation, 50
- Allquantor, 18
- alternierende Reihe, 122
- Anordnungsaxiom, 47
- archimedisches Axiom, 62
- Areafunktionen, 199
- Arkusfunktionen, 194
- Aussage, 6
- Aussageform, 6
- Aussagenlogik
 - Operationen, 7
 - Regeln, 8
- Auswahlaxiom, 23
- Axiom
 - Anordnung, 47
 - archimedisches, 62
 - Auswahlaxiom, 23
 - Mengenlehre, 22
 - natürliche Zahlen, 29
 - Vollständigkeit, 60
- Bernoulli-Ungleichung, 214
- Beweisprinzip
 - Beweis durch Kontraposition, 12
 - Beweis durch Widerspruch, 13
 - direkter Beweis, 11
 - kleinster Verbrecher, 60
 - vollständige Induktion, 30
- bijektiv, 25
- Bild einer Funktion, 24
- Binomialreihe, 137
- Bolzano–Weierstraß (Satz), 104
- Cauchy-Folge, 106
- Cauchy-Produkt, 134
- Cosinus
 - Additionstheorem, 187
 - Definition, 186
 - Einschließungseigenschaft, 189
 - Nullstellen, 192
 - Periodizität, 193
 - Potenzreihe, 188
 - Umkehrfunktion, 194
- Cosinus hyperbolicus
 - Additionstheorem, 197
 - Definition, 196
 - Potenzreihe, 197
 - Umkehrfunktion, 199
- Cotangens, 189
 - Additionstheorem, 189
 - Periodizität, 193
 - Umkehrfunktion, 194
- Cotangens hyperbolicus, 197
- Dezimalbruchentwicklung, 68
- differenzierbar, 202
- Disjunktion, 7
- Einheitswurzel, 195
- Einschachtelungsprinzip
 - für Folgen, 94
 - für Grenzwerte, 150
- Einschränkung, 28
- Euklid (Satz), 39
- Eulersche Formel, 186
- Eulersche Identität, 191
- Eulersche Zahl e
 - Definition, 128
 - Limesdarstellung, 209
- Existenzquantor, 18
- Exponentialfunktion
 - Definition, 128
 - fundamentale Ungleichungen, 176
 - Funktionalgleichung, 137
 - Wachstum, 176

- Fakultät, 34
- Fixpunktsatz, 168
- Folge
 - asymptotisch gleich, 95
 - Cauchy-Eigenschaft, 106
 - Definition, 85
 - divergent, 87
 - Grenzwert, 87
 - Häufungswert, 101
 - konvergent, 87
 - monoton, 86
 - Teilfolge, 100
- Funktion
 - bijektiv, 25
 - Bild, 24
 - Definition, 24
 - differenzierbar, 202
 - Einschränkung, 28
 - Graph, 24
 - Grenzwert, 146
 - injektiv, 25
 - konkav, 217
 - konvex, 217
 - kritischer Punkt, 212
 - monoton, 86
 - periodisch, 192
 - Sattelpunkt, 216
 - stetig, 152
 - surjektiv, 25
 - Umkehrfunktion, 27
 - Urbild, 24
 - Verkettung, 26
 - Wendepunkt, 219
- geometrische Reihe, 115
- gleichmäßig stetig, 172
- gleichmäßige Konvergenz, 159
- Graph einer Funktion, 24
- Grenzwert
 - einer Folge, 87
 - einer Funktion, 146
- Häufungswert einer Folge, 101
- Halbordnung, 50
- harmonische Reihe, 116
- Hospitalsche Regeln, 221
- Häufungspunkt einer Menge, 145
- Identitätssatz für Potenzreihen, 143
- Imaginärteil, 77
- Implikation, 7
- induktive Menge, 57
- Infimum, 52
- injektiv, 25
- Intervallschachtelung, 63
- Intervallschachtelungsprinzip, 63
- irrationale Zahl, 13
- Kettenregel, 206
- komplexe Zahlen
 - Berechnung der Wurzel, 80
 - Betrag, 77
 - Definition, 76
 - Imaginärteil, 77
 - komplexe Konjugation, 77
 - Polardarstellung, 83, 194
 - quadratische Gleichung, 81
 - Realteil, 77
- Konjunktion, 7
- konkav, 217
- Konstanzsatz, 213
- Kontinuumshypothese, 72
- Kontraktionssatz, 108
- Konvergenz
 - einer Folge, 87
 - einer Reihe, 114
 - gleichmäßig, 159
 - punktweise, 159
 - uneigentlich, 92
- Konvergenzkriterien für Folgen
 - Cauchy-Kriterium, 108
 - Einschachtelungsprinzip, 94
 - Majorantenkriterium, 94
 - Minorantenkriterium, 94
 - Monotoniekriterium, 96
 - über Teilfolgen, 105
 - Weierstraß, 164
- Konvergenzkriterien für Reihen
 - Kriterium von Abel, 128
 - Kriterium von Dirichlet, 128
 - Leibniz-Kriterium, 122
 - Majorantenkriterium, 120
 - Minorantenkriterium, 120
 - Quotientenkriterium, 124, 126
 - Wurzelkriterium, 126
- Konvergenzradius einer Potenzreihe
 - Berechnung, 140
 - Definition, 138
- konvex
 - Definition, 217
 - geometrische Bedeutung, 217
 - Kriterien, 218
- Kreiszahl π , 191
- Kriterien für lokale Extrema
 - erster Ordnung, 211, 215
 - zweiter Ordnung, 216

- kritischer Punkt, 212
- Körper
 - Definition, 43
 - geordnet, 47
- Limes inferior, 102
- Limes superior, 102
- Logarithmusfunktion
 - Definition, 172
 - fundamentale Ungleichungen, 179
 - Funktionalgleichung, 179
 - Potenzreihendarstellung, 227
 - Wachstum, 179
- Majorantenkriterium
 - für Folgen, 94
 - für Reihen, 120
- Maximum, 52
- Maximum einer Funktion
 - global, 211
 - lokal, 210
- Menge
 - abzählbar, 69
 - Beschreibung, 15
 - Differenz, 16
 - disjunkt, 16
 - Durchschnitt, 16
 - endlich, 69
 - höchstens abzählbar, 69
 - Häufungspunkt, 145
 - innerer Punkt, 211
 - kartesisches Produkt, 21
 - leere Menge, 15
 - Mächtigkeit, 69
 - Mengenfamilie, 18
 - Mengensystem, 22
 - naive Definition, 14
 - Potenzmenge, 22
 - Randpunkt, 211
 - Regeln von De Morgan, 17
 - Teilmenge, 16
 - überabzählbar, 69
 - Vereinigung, 16
- Metrik, 56
- Minimalperiode, 192
- Minimum, 52
- Minimum einer Funktion
 - global, 211
 - lokal, 210
- Minorantenkriterium
 - für Folgen, 94
 - für Reihen, 120
- Mittelwertsatz, 213
 - verallgemeinert, 220
- monoton fallend, 86
- monoton wachsend, 86
- Monotoniekriterium, 96
- Monotoniesatz, 213
- natürliche Zahlen
 - Definition, 29
 - Wohlordnungsprinzip, 59
- Negation
 - Aussage, 7
 - Existenz- und Allquantor, 19
- Nullstellensatz, 167
- Nullstellensatz für Potenzreihen, 143
- Ordnung, 50
- Parität, 11
- Partialsumme, 114
- periodisch, 192
- Polynomfunktion, 155
- Potenzfunktion
 - Definition, 184
 - Monotonie, 184
- Potenzgesetze, 183
- Potenzmenge
 - Definition, 22
 - Mächtigkeit, 72
- Potenzreihe
 - Abbruchfehler, 142
 - Definition, 138
 - Differenzierbarkeit, 226
 - Grundoperationen, 141
 - Identitätssatz, 143
 - Konvergenzbereich, 138
 - Konvergenzradius, 138
 - Konvergenzverhalten, 139
 - Nullstellensatz, 143
 - Stetigkeit, 165
- Primzahl, 12
- Prinzip vom kleinsten Element, 60
- Prinzip vom kleinsten Verbrecher, 60
- Produkt
 - kartesisches, 21
- punktweise Konvergenz, 159
- Quantor
 - Allquantor, 18
 - Existenzquantor, 18
 - Rechenregeln, 20
- Quotientenkriterium, 126
- rationale Zahlen
 - Abzählbarkeit, 69

- Definition, 13, 41
- Realteil, 77
- reelle Zahlen
 - Betrag, 54
 - Definition, 42
 - Überabzählbarkeit, 71
- Reihe
 - absolut konvergent, 124
 - alternierend, 122
 - Definition, 114
 - divergent, 114
 - geometrisch, 115
 - harmonisch, 116
 - konvergent, 114
 - Umordnung, 130
- Relation, 50
- Russellsche Antinomie, 23
- Sattelpunkt, 216
- Satz
 - vom Minimum und Maximum, 168
 - von Bolzano–Weierstraß, 104
 - von Euklid, 39
 - von Rolle, 212
- Schranke, 52
- Schranksatz, 213
- Sinus
 - Additionstheorem, 187
 - Definition, 186
 - Einschließungseigenschaft, 189
 - Nullstellen, 192
 - Periodizität, 193
 - Potenzreihe, 188
 - Umkehrfunktion, 194
- Sinus hyperbolicus
 - Additionstheorem, 197
 - Definition, 196
 - Potenzreihe, 197
 - Umkehrfunktion, 199
- stetig, 152
- stetige Fortsetzung
 - Definition, 157
 - Eindeutigkeit, 157
- Supremum, 52
- Supremumsnorm, 161
- surjektiv, 25
- Tangens
 - Additionstheorem, 189
 - Definition, 189
 - Periodizität, 193
 - Umkehrfunktion, 194
- Tangens hyperbolicus, 197
- Taylorpolynom, 228
- Teilfolge, 100
- Umkehrfunktion
 - Ableitung, 207
 - Charakterisierung, 27
 - Definition, 27
 - Monotonie, 171
 - Stetigkeit, 171
 - Verkettung, 28
- Umordnung einer Reihe, 130
- Umordnungssatz, 131
- Unstetigkeitsstellen, 158
- Urbild einer Funktion, 24
- Verdichtungskriterium, 119
- Vergleichsprinzip für Grenzwerte, 150
- Verkettung
 - Ableitung, 206
 - Assoziativität, 26
 - Definition, 26
 - Stetigkeit, 157
- vollständige Induktion, 30
- Vollständigkeitsaxiom, 60
- Vorzeichen, 54
- Wallissche Produktfolge, 100
- Wendepunkt, 219
- Wurzel
 - Definition, 67
 - Existenz, 65
 - Monotonie, 67
- Wurzelkriterium, 126
- Zwischenwertsatz
 - für Ableitungen, 213
 - für stetige Funktionen, 166