H23-T2-A5

Sei R ein kommutativer Ring mit 1.

a) Sei $x \in R$ ein Element mit $x^m = 0$ für ein $m > 0$. Zeigen Sie, dass dann $1 + x \in R$ multiplikativ invertierbar ist.

b) Sei $I \subseteq R$ ein Ideal. Zeigen Sie, dass dann auch

$$\sqrt{I} := \{x \in R | x^m \in I \text{ für ein } m > 0\}$$

ein Ideal in R ist.

c) Zeigen Sie, dass $N(R) := \{x \in R | x^m = 0 \text{ für ein } m > 0\}$ ein Ideal in R ist.

d) Geben Sie ein Beispiel für einen (nicht-kommutativen) Ring R' an, in dem $N(R') \subseteq R'$ (wie in c)) *kein* (Links-)Ideal ist.

Lösung

a) Wir betrachten $\sum_{n=0}^{m}(-x)^n \cdot (1+x) = \sum_{n=0}^{m}(-1)^n \cdot x^n + \sum_{n=1}^{m+1}(-1)^{n+1} \cdot x^n = 1 + x^{m+1} = 1$.

b) Hierfür weist man die drei Idealeigenschaften nach:

i) $0 \in \sqrt{I}$, denn $0^1 \in I$ und $1 > 0$.

ii) Für $x, y \in \sqrt{I}$ gibt es $n, m > 0$ mit $x^n \in I$ und $y^m \in I$. Betrachte $(x+y)^{n+m}$. Nach dem Binomischen Lehrsatz gilt hierfür

$$(x+y)^{n+m} = \sum_{k=0}^{n+m} \binom{n}{k} x^k y^{n+m-k}.$$

Für $k < n$ ist $n + m - k > m$ und daher $y^{n+m-k} \in I$ und deshalb $(x+y)^{n+m} \in I$, da I Ideal. Für $k \geq n$ ist $x^n \in I$ und deswegen ebenfalls $(x+y)^{n+m} \in I$ (I Ideal).

iii) Seien $x, y \in \sqrt{I}$. Wie oben gibt es $n, m > 0$ mit $x^n \in I$ und $y^m \in I$. Es folgt $(xy)^n = x^n y^n \in I$ da $x^n \in I$ und I Ideal.

c) Betrachte $J = (0)$, dann ist $N(R) = \sqrt{J}$ und nach Teil b) Ideal.

d) Wir wählen $R' = \mathrm{Mat}(2 \times 2, \mathbb{R})$. Wir betrachten die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

mit $B^2 = 0$ also $B \in N(R')$ aber

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und $(A \cdot B)^k = A \cdot B$ für alle k (Überprüfen!). Daher ist $A \cdot B$ nicht in $N(R')$ und deshalb ist $N(R')$ kein Ideal in R'.