H24-T3-A1

Für einen Körper K sei $G(K) := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a, b \in K \right\}$.

a) Zeigen Sie, dass $G(K)$ eine abelsche Untergruppe von $\mathrm{GL}(3, K)$ ist.

b) Für eine Primzahl p sei $\mathbb{F}_p$ der endliche Körper mit $\left|\mathbb{F}_p\right| = p$. Entscheiden Sie begründet, zu welchem direkten Produkt zyklischer Gruppen $G(\mathbb{F}_p)$ isomorph ist. (Hauptsatz für endliche abelsche Gruppen)

c) Für eine Primzahl p sei $\mathbb{F}_{p^2}$ der endliche Körper mit $\left|\mathbb{F}_{p^2}\right| = p^2$. Entscheiden Sie begründet, zu welchem direkten Produkt zyklischer Gruppen $G(\mathbb{F}_{p^2})$ isomorph ist. (Hauptsatz für endliche abelsche Gruppen)

Lösung

a) Sei also $A_{a,b} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in G(K)$ für $a, b \in K$. Da $A_{a,b}$ eine obere Dreiecksmatrix ist, gilt $\det\left(A_{a,b}\right) = 1^3 = 1$ für alle $a, b \in K$. Demnach gilt schon mal $G(K) \subset \mathrm{GL}(3, K)$. Seien nun $a, b, c, d \in K$ beliebig, dann rechnet man leicht nach, dass $A_{a,b}A_{c,d} = A_{a+c,b+d}$. Da „+“in K kommutativ ist, gilt auch, $A_{a,b}A_{c,d} = A_{c,d}A_{a,b}$ für alle $a, b, c, d \in K$. Zudem sieht man leicht, dass $A_{a,b}A_{-a,-b} = A_{0,0} = E_3$ (3×3 Einheitsmatrix) für alle a, b ist. Wir haben also insgesamt gesehen, dass $G(K)$ eine abelsche Untergruppe von $\mathrm{GL}(3, K)$ ist.

b) Es gilt $\left|G(\mathbb{F}_p)\right| = p^2$. Nach dem Hauptsatz über endliche abelsche Gruppen ist $G(\mathbb{F}_P)$ also isomorph zu $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$ oder zu $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Man bemerkt jetzt, dass

$$A_{a,b}^p = A_{pa,pb} = A_{0,0} = E_3$$

für alle $a, b \in F_p$, da $\mathrm{char}(\mathbb{F}_p) = p$. Demnach gilt $\mathrm{ord}(A_{a,b}) \leq p$ für alle $a, b \in K$. Es kann also kein Element der Ordnung p^2 in $G(\mathbb{F}_p)$ geben. Demnach ist $G(\mathbb{F}_p)$ nicht zyklisch, also nach Ausschlusskriterium isomorph zu $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

c) Analog zu b) gilt $\left|G(\mathbb{F}_{p^2})\right| = p^4$. Nach dem Hauptsatz über endliche abelsche Gruppen ist $G(\mathbb{F}_{p^2})$ isomorph zu einer der folgenden Gruppen:

$$(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^4, \quad (\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z})^2, \quad \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p^3\mathbb{Z}.$$

Exakt wie oben, da $\mathrm{char}(\mathbb{F}_{p^2}) = p$ gilt $\mathrm{ord}(A_{a,b}) \leq p$ für alle $a, b \in K$. Demnach kommt nur der Isomorphietyp $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^4$ in Frage.