H25-T1-A4

Wir betrachten das Polynom $f := X^4 - 4X^2 + 2 \in \mathbb{Q}[X]$.

a) Bestimmen Sie die Nullstellen von f in den komplexen Zahlen $\mathbb{C}$.

b) Für $\alpha := \sqrt{2 - \sqrt{2}} \in \mathbb{R}$ sei $L = \mathbb{Q}(\alpha) \subset \mathbb{C}$. Berechnen Sie den Grad $[L : \mathbb{Q}]$.

c) Begründen Sie, warum die Elemente $\sqrt{2}$ und $\beta := \sqrt{2 + \sqrt{2}}$ im Körper L liegen. Folgern Sie, dass L ein Zerfällungskörper für f über $\mathbb{Q}$ ist. Begründen Sie, warum $L|\mathbb{Q}$ eine Galois-Erweiterung ist.

d) Zeigen Sie, dass ein eindeutig bestimmtes $\sigma \in \mathrm{Gal}(L|\mathbb{Q})$ mit $\sigma(\alpha) = \beta$ existiert. Berechnen Sie $\sigma(\sqrt{2})$ und $\sigma^2(\alpha)$. Zeigen Sie, dass die Galois-Gruppe von $L|\mathbb{Q}$ zyklisch ist.

Lösung

a) Wir substituieren $u = X^2$ und bekommen mit der Lösungsformel für quadratische Polynome die Nullstellen $2 \pm \sqrt{2}$ von $f(u)$ und demnach $\pm\alpha, \pm\beta$ als Nullstellen von $f(X)$ in $\mathbb{C}$.

b) f ist nach Eisenstein (+Gauß) irreduzibel über $\mathbb{Q}$ ($p = 2$) und demnach (da zudem normiert) das Minimalpolynom von α über $\mathbb{Q}$. Demnach gilt $[L : \mathbb{Q}] = \deg(f) = 4$.

c) Wir rechnen $\alpha\beta = \sqrt{2}$. Weiter ist $\alpha^2 = 2 - \sqrt{2}$, also $\sqrt{2} = 2 - \alpha^2 \in \mathbb{Q}(\alpha) = L$. Demnach ist auch $\beta = \frac{\sqrt{2}}{\alpha} = \frac{2-\alpha^2}{\alpha} \in \mathbb{Q}(\alpha) = L$. Aus a) und $\beta \in L$ folgt dann, dass L der Zerfällungskörper von f über $\mathbb{Q}$ ist. Demnach ist die Erweiterung $L|\mathbb{Q}$ normal und da $\mathrm{char}(\mathbb{Q}) = 0$ auch separabel, ergo eine Galois-Erweiterung.

d) Da $L = \mathbb{Q}(\alpha)$ ist nach Satz A $\mathrm{Gal}(L|\mathbb{Q})$ bereits eindeutig durch die anderen Nullstellen von f bestimmt, also $\mathrm{id} = \sigma_1 : \alpha \mapsto \alpha, \sigma_2 : \alpha \mapsto -\alpha, \sigma_3 : \alpha \mapsto \beta$ und $\sigma_4 : \alpha \mapsto -\beta$ bestimmt. Da $[L : \mathbb{Q}] = 4$ und $L|\mathbb{Q}$ eine Galoiserweiterung ist gilt $|\mathrm{Gal}(L|\mathbb{Q})| = [L : \mathbb{Q}] = 4$, demnach sind das bereits alle Galoisautomorphismen. Sei nun $\sigma = \sigma_3$. Aus b) wissen wir $\sqrt{2} = 2 - \alpha^2$, demnach $\sigma(\sqrt{2}) = \sigma(2 - \alpha^2) = 2 - \sigma(\alpha)^2 = 2 - \beta^2 = 2 - (2 + \sqrt{2}) = -\sqrt{2}$. Weiter ist $\sigma^2(\alpha) = \sigma(\beta) = \sigma(\frac{2-\alpha^2}{\alpha}) = \frac{2-\sigma(\alpha)^2}{\sigma(\alpha)} = \frac{2-\beta^2}{\beta} = \frac{-\sqrt{2}}{\beta} = \frac{-\alpha\beta}{\beta} = -\alpha$. Das $\mathrm{Gal}(L|\mathbb{Q})$ zyklisch ist folgt daraus, dass σ Ordnung 4 hat, denn $\sigma(\alpha) \neq \alpha \wedge \sigma^2(\alpha) \neq \alpha$ und $\mathrm{ord}(\sigma) \mid 4$ nach Lagrange.