H23-T3-A1

Sei G eine Gruppe und H eine Untergruppe von G.

a) Geben Sie die Definition des „Index“$(G : H)$ an. (G muss nicht endlich sein.)

b) Zeigen Sie, dass $(G : H)$ ein Teiler von 168 ist, wenn H der Kern eines Homomorphismus $f : G \to \mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_2)$ in die Gruppe der invertierbaren 3x3-Matrizen über dem Körper $\mathbb{F}_2$ ist.

Lösung

a) $(G : H) := \#(G/H)$. In Worten bedeutet das, dass es $(G : H)$-viele disjunkte Äquivalenzklassen bezüglich der üblichen Äquivalenzrelation auf der Gruppe G bezüglich der Untergruppe H.

b) Der Kern eines Gruppenhomomorphismus $f : G \to \mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_2)$ ist bekanntlich eine Untergruppe respektive Normalteiler von G. Betrachte daher $G/\ker(f)$. Nach dem Homomorphiesatz gilt $G/\ker(f) \cong \mathrm{im}(f)$. Wiederum ist bekanntlich $\mathrm{im}(f)$ eine Untergruppe von $\mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_2)$. $\#\mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_2) = 168 = (2^3-1)\cdot(2^3-2^1)\cdot(2^3-2^2)$. Die Behauptung folgt nun aus der Isomorphie $G/\ker(f) \cong \mathrm{im}(f)$ und dem Satz von Lagrange.