F24-T1-A1

Sei $n > 0$ und $M_n = (m_{ij})$ die reelle $n \times n$-Matrix mit $m_{ij} = 0$, falls $j < i - 1$ oder $j > i + 1$, $m_{ij} = 1$, falls $j = i - 1$, $m_{ij} = 3$, falls $j = i$ und $m_{ij} = 2$, falls $j = i + 1$. Also ist beispielsweise

$$M_5 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Sei d_n die Determinante von M_n.

a) Berechnen Sie d_1 und d_2.

b) Zeigen Sie, dass für alle $n \geq 3$ gilt $d_n = 3d_{n-1} - 2d_{n-2}$.

c) Zeigen Sie, dass $d_n = 2^{n+1} - 1$ gilt.

Lösung

a) $M_1 = (3)$ und damit $d_1 = 3$. Es gilt $M_2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Man erhät also $d_2 = 9 - 2 = 7$.

b) Es gilt $M_3 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Mit der Regel von Sarrus erhält man $d_3 = 3^3 - 1 \cdot 2 \cdot 3 - 3 \cdot 2 \cdot 1 = 27 - 12 = 15 = 21 - 6 = 3 \cdot d_2 - 2 \cdot d_1$. Wir haben somit also den Induktionsanfang gezeigt. Wir zeigen jetzt den Induktionsschritt mit Hilfe des Laplace'schen Entwicklungssatzes. Wir entwickeln nach der ersten Spalte. Es gilt dann

$$d_{n+1} = \det(M_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n} m_{ij} \cdot (-1)^{i+1} \det\big(M_{ij}\big),$$

wobei M_{ij} die entsprechende Streichungsmatrix ist. Man sieht leicht, dass $M_{11} = M_n$ gilt. Man erhält also

$$d_{n+1} = 3d_n - 1 \cdot \det(M_{21}).$$

Jetzt sieht man entwickelt man wiederum M_{21} nach der ersten Zeile und erhält somit

$$\det(M_{21}) = 2 \cdot \det(M_{n-1}).$$

Das setzen wir ein und bekommen die gewünschte Formel.

c) Wir zeigen das wiederum per Induktion. $d_1 = 3 = 2^2 - 1, d_2 = 7 = 2^3 - 1, d_3 = 15 = 2^4 - 1$. Zum Induktionsschritt:

$$d_{n+1} = 3d_n - 2d_{n-1} \overset{\text{IA}}{=} 3(2^{n+1}-1) - 2(2^n - 1) = 3 \cdot 2^{n+1} - 3 - 2 \cdot 2^n + 2 = 3 \cdot 2^{n+1} - 2^{n+1} - 3 + 2 = 2 \cdot 2^{n+1} - 1 = 2^{n+2} - 1.$$

Das schließt auch diesen Beweis ab.