H23-T2-A2

a) Geben Sie die Definition einer *auflösbaren* Gruppe an.

b) Bestimmen Sie alle endlichen einfachen auflösbaren Gruppen.

Lösung

a) Eine Gruppe G heißt *auflösbar* wenn es eine endliche absteigende Filtrierung

$$G = G_0 \supset G_1 \supset G_2 \supset \ldots \supset G_N = \{1\}$$

gibt, so dass für alle $j = 0, \ldots, N-1$

1. jeweils $G_{j+1} \lhd G_j$ ein Normalteiler und
2. dann G_j/G_{j+1} eine abelsche Gruppe ist.[Hie21]

b) Eine einfache Gruppe G hat nur die zwei trivialen Normalteiler $\{1\}$ und G. Das bedeutet, dass es für G ausschließlich eine absteigende Filtrierung gibt, so dass die Bedingung 1. aus a) erfüllt ist.

$$G \lhd \{1\}.$$

Ist G nun also auflösbar, so muss zudem Bedingung 2. gelten und daher muss G abelsch sein. Da für abelsche Gruppen jedoch alle Untergruppen Normalteiler sind suchen wir also diese endlichen abelschen Gruppen, die nur triviale Untergruppen besitzen. Hierunter fallen die triviale Gruppe $\{1\}$ sowie $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ für p prim (und alle dazu isomorphen Gruppen). Alle anderen zyklischen Gruppen, also diese die nicht von Primzahlordnung sind, haben nichttriviale Untergruppen (für jeden Teiler der Ordnung genau einen). Betrachten wir nun also endliche abelsche Gruppen G, welche nicht zyklisch sind, diese werden dann von einer Teilmenge $S \subset G$ erzeugt mit $\#S \geq 2$ und $1 \notin S$ (oBdA). Sei also $s \in S$ belibig, da G nicht zyklisch gilt $< s > \neq G$. Da zudem $1 \notin S$ folgt außerdem $< s > \neq \{1\}$. Deshalb ist $< s >$ eine nichttriviale Untergruppe von G und daher G nicht einfach. Abschließend sind also die einzigen endlichen einfachen auflösbaeren Gruppen $\{1\}$ sowie die zyklischen Gruppen mit Primzahlordnung.

Literaturverzeichnis

[Hie21] Marco Hien. *Algebra.* Springer, 2021.