

**Universität Augsburg  
Institut für Physik**

**DIPLOMARBEIT**

**GITTERMODELLE ZUM  
GANZZAHLIGEN  
QUANTEN-HALL-EFFEKT**

vorgelegt von

**Liviu Serban**

am  
30. Oktober 1998

Referent: **Prof. Dr. Klaus Ziegler**  
Koreferent: **Priv. Doz. Dr. Peter van Dongen**

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>EINLEITUNG</b>	<b>5</b>
<b>2</b>	<b>PHÄNOMENOLOGIE</b>	<b>9</b>
2.1	DER KLASSISCHE HALL-EFFEKT . . . . .	9
2.2	DER QUANTEN-HALL-EFFEKT . . . . .	11
2.3	DIE KLASSISCHE DYNAMIK EINES GELADENEN TEIL- CHENS . . . . .	14
2.4	PHÄNOMENOLOGIE DES QUANTEN-HALL-EFFEKTS . . . . .	16
<b>3</b>	<b>DAS ZWEIDIMENSIONALE ELEKTRONENGAS</b>	<b>23</b>
3.1	DAS ELEKTRONENGAS OHNE UNORDNUNG . . . . .	23
3.1.1	Das Elektronengas im Magnetfeld . . . . .	25
3.1.2	Das Elektronengas im elektromagnetischen Feld . . . . .	27
3.2	DAS ELEKTRONENGAS MIT UNORDNUNG . . . . .	28
<b>4</b>	<b>GITTERMODELLE</b>	<b>31</b>
4.1	ÜBERGANG ZUM GITTERMODELL . . . . .	31
4.2	DAS CHALKER-CODDINGTON-MODELL . . . . .	33
4.2.1	Abbildung des Gittermodells auf ein zweidimensionales Dirac-Modell . . . . .	34
4.3	DAS TIGHT-BINDING MODELL . . . . .	43
4.3.1	Funktionalintegral-Darstellung . . . . .	46
4.3.2	Sattelpunkt-Näherung . . . . .	48
4.3.3	1/N-Entwicklung . . . . .	51
4.3.4	Die Korrelation der lokalen Zustandsdichte, Teil I . . . . .	52
4.3.5	Die inverse Matrix . . . . .	54
4.3.6	Die Korrelation der lokalen Zustandsdichte, Teil II . . . . .	55
<b>5</b>	<b>DISKUSSION DER ERGEBNISSE</b>	<b>57</b>
<b>6</b>	<b>ZUSAMMENFASSUNG</b>	<b>59</b>
<b>A</b>	<b>Die <math>\Gamma</math> Matrix</b>	<b>61</b>

<b>B</b>	<b>Die Berechnung von <math>\sum_{x_A} \langle \delta Q(x_A) \cdot \mathbf{S}_2 \cdot \delta \mathbf{P}(0) \rangle_{\mathbf{S}_1}</math></b>	<b>67</b>
<b>C</b>	<b>Die Berechnung von <math>\sum_{x_A} \langle \delta Q(x_A) \cdot \mathbf{S}_{\frac{3}{2}} \cdot \mathbf{S}_{\frac{3}{2}} \cdot \delta \mathbf{P}(0) \rangle_{\mathbf{S}_1}</math></b>	<b>71</b>
<b>D</b>	<b>Die Konstanten der inversen Matrix</b>	<b>75</b>
<b>E</b>	<b>Liste der Integrale</b>	<b>77</b>
<b>F</b>	<b>Die Korrelation der lokalen Zustandsdichte II</b>	<b>79</b>

# Kapitel 1

## EINLEITUNG

Anfang der 80er Jahre untersuchte man MOS (*Metal-Oxide-Semiconductor*)-Feldeffekttransistoren, um neue Informationen über komplizierte mikroskopische Details dieser Halbleiter-Bauelemente zu erhalten. Eine besonders wichtige Frage war dabei, welche Störungen und Mechanismen im Halbleiter die Bewegung der Elektronen, und somit die Geschwindigkeit von Informationsübertragungen, beeinträchtigen. Als man die elektronischen Eigenschaften dieser Transistoren unter dem Einfluß eines starken Magnetfeldes (mehr als 10 Tesla) und bei tiefen Temperaturen (unterhalb 20 Kelvin) beobachtete, entdeckte man ein besonderes Verhalten: Der elektrische Widerstand stieg als Funktion des Magnetfeldes (nicht kontinuierlich), sondern stufenförmig an. Zudem beobachtete man immer denselben universellen Wert und sein ganzzahliges Vielfaches, von etwa 6453,2 Ohm [1, 2], und dies unabhängig vom Material.

Bei einem gewöhnlichen elektrischen Widerstand mißt man eine Spannung, die proportional zum Strom anwächst. Die Proportionalitätskonstante legt den Wert des Widerstandes fest; sie kann normalerweise durch geeignete Wahl des stromdurchflossenen Materials und seiner Geometrie jeden Wert annehmen. Im Unterschied dazu gibt es jedoch gewisse Proben - spezielle Halbleiter-Bauelemente - mit quantisierten Widerstandswerten. Man spricht in diesem Zusammenhang deshalb vom quantisierten Hall-Widerstand oder vom Quanten-Hall-Effekt. Hier nimmt der gemessene Widerstand nicht jeden Wert an; vielmehr sind ganz bestimmte Widerstandswerte besonders stabil. Alle bisherigen Erkenntnisse haben gezeigt, daß diese quantisierten Werte im Rahmen der Meßgenauigkeit bis  $10^{-6}$  nur von Naturkonstanten abhängen: der Elementarladung  $e$  und dem Planckschen Wirkungsquantum  $h$ . Eine Kombination aus Elementarladung  $e$  und Planckschem Wirkungsquantum  $h$  ergibt eine Größe mit der Dimension eines Widerstandes [3]

$$\frac{h}{e^2} \approx 25812,8 \text{ Ohm} . \quad (1.1)$$

Das Verhältnis  $h/4e^2 \approx 6453,2$  Ohm ergibt den Wert für den quantisierten Hall-Widerstand, den man bisher besonders gut untersucht hat [2]. Im Prinzip

lassen sich alle Werte  $h/\nu e^2$  erzeugen; beim fundamentalen quantisierten Hall-Widerstand ist dabei  $\nu$  eine ganze Zahl. In der Praxis untersucht man  $\nu$ -Werte, die kleiner als zwölf sind [2, 3].

Die Feinstruktur-Konstante hat in guter Näherung den Wert  $1/137$ . Man bezeichnet sie auch als die fundamentalste Naturkonstante: da sie keine Dimension, sondern nur einen von der Natur gegebenen Zahlenwert hat, ist sie demnach unabhängig vom Maßsystem. Der Wert der Konstanten entspricht dem Quotient zweier Geschwindigkeiten: der Geschwindigkeit eines Elektrons um den Kern eines Wasserstoffatoms im Verhältnis zur Lichtgeschwindigkeit. Alle relativistischen Korrekturen in der Atomphysik, bei denen die Geschwindigkeit in Bezug auf die Lichtgeschwindigkeit eine Rolle spielt, hängen von der Feinstruktur-Konstante ab. Genau genommen wird bereits die Lage aller Energieniveaus der Elektronen in der Atomphysik durch den Wert der Feinstruktur-Konstanten beeinflusst. Aber erst im Rahmen der Quantenelektrodynamik, welche die Wechselwirkung zwischen geladenen Teilchen und elektromagnetischer Strahlung auf quantisierten Niveau beschreibt, könnte man wirklich genaue Vorhersagen machen. Dabei wird vorausgesetzt, daß die Feinstruktur-Konstante bekannt ist. Jede neue Meßmethode zur Bestimmung dieser Naturkonstanten ist folglich wertvoll für die Überprüfung einer Vielzahl von Theorien und Experimenten.

Wie genau läßt sich also beispielsweise die Feinstruktur-Konstante aus dem Hall-Widerstand bestimmen? Das Problem reduziert sich auf die Frage, wie genau man den Wert eines elektrischen Widerstandes messen kann. Relative Spannungen sind ohne Schwierigkeiten mit Unsicherheiten von weniger als  $10^{-9}$  möglich, insbesondere wenn die zu vergleichenden Spannungen nahezu gleich groß sind. Der Wert eines geeichten Widerstandes ist demgegenüber zehnmal ungenauer. Die Schwierigkeit liegt also darin, einen Vergleichswiderstand mit genau bekanntem Wert zu bekommen. Es wird sicherlich niemals möglich sein, die Feinstruktur-Konstante mit Hilfe des Quanten-Hall-Effekts genauer zu bestimmen als die Genauigkeit des Vergleichswiderstands.

Drei Bedingungen müssen erfüllt sein, damit man den Quanten-Hall-Effekt beobachten kann (siehe Kapitel 2). Erste Voraussetzung ist die Herstellung einer dünnen Elektronenschicht von etwa  $10^{-8}$  m Dicke. Ein starkes Magnetfeld senkrecht zu dieser Schicht muß die Elektronen auf Kreisbahnen mit einem Radius von  $10^{-8}$  m zwingen. Als dritte Bedingung muß die Anzahl der Elektronen gerade so sein, daß alle möglichen nebeneinanderliegenden Kreisbahnen mit Elektronen besetzt sind.

Diese Arbeit beschäftigt sich mit dem Studium kritischen Verhaltens beim Quanten-Hall-Effekt, d.h. mit den Modellen die einen solchen Mechanismus ermöglichen. Nach einer kurzen Darstellung des klassischen Hall-Effekts, wird die heute allgemein akzeptierte Phänomenologie des kritischen Verhaltens des Quanten-Hall-Effekts erläutert. Trotz der unter Spezialisten weit verbreiteten Zustimmung gegenüber dieser Darstellung, bleiben immer noch ungeklärte Details wie z.B.: Randeffekte, das Vernachlässigen der Coulombschen Wechselwirkung,

das gleichzeitige Verhalten von longitudinalem und Hall-Widerstand (siehe Abb. 2.6).

Als einfachstes Modell wird im dritten Kapitel das zweidimensionale Elektronengas im Magnetfeld berücksichtigt. Obwohl die wesentlichen Charakteristiken des Quanten-Hall-Effekts damit nicht geklärt werden können, erzielt man einen ersten Fortschritt: die longitudinale Komponente des Widerstandstensors ist Null und der Hall-Widerstand zeigt ein lineares Verhalten in Einheiten von  $h/e^2$  (siehe Kapitel 3.1.2). Weiter wird die Rolle der Unordnung untersucht. Im Hauptteil der Arbeit, werden drei Modelle präsentiert, die das kritische Verhalten des Quanten-Hall-Effekts zu erklären versuchen: das Chalker-Coddington-Modell, das Tight-Binding-Modell mit übernächster Nachbar-Wechselwirkung und das N-Orbital-Modell.

Das Chalker-Coddington-Modell beruht auf Überlegungen die ursprünglich der Perkolationstheorie entstanden sind [4]. Das Modell ersetzt die Zufälligkeit der Elektronenbahnen in der ungeordneten Energielandschaft (siehe Kapitel 2.3 und 2.4) durch ein quadratisches Gitter. Die Knoten des Gitters bezeichnen die Sattelpunkte, d.h. die Orte, an denen sich die Bahnen der Elektronen - die Äquipotentiallinien - treffen. Die Verbindungen zwischen den Knoten stellen die Äquipotentiallinien dar. Jede Verbindung wird *nur* in einer Richtung durchquert. Die Unordnung wird durch Zufallsphasen an jeder Verbindung beschrieben (siehe Kapitel 4.1). An jedem Knoten finden Streu- und Tunnelprozesse statt.

Das Tight-Binding-Modell [5] mit Hüpfen zwischen nächsten und übernächsten Nachbarn ist ähnlich einem zweidimensionalen Ising-Modell mit zufälligen Kopplungen [6]. Es ist ein Modell von Dirac-Fermionen [5], die an ein Zufallspotential koppeln.

Das N-Orbital-Modell ist eine Erweiterung des Tight-Binding-Modells. Die Dirac-Teilchen werden "komplexe Systeme" mit einer zusätzlichen Quantenzahl, die Orbitalzahl  $\alpha = (1, \dots, N)$ . Ein solches Dirac-Teilchen befindet sich auf einem Orbital  $\alpha$ , mit einer Zufallsmasse und propagiert in der  $x$ - $y$ -Ebene, ohne das Orbital zu wechseln. Die Masse dieses "komplexen Systems" als Zufallsgröße kann sowohl von  $x$ - als auch von  $y$ -Richtung abhängen [7]. Zwischen den verschiedenen Orbitalen findet ein zufälliges "Hüpfen" statt. Die Varianz des Orbitalwechsels und der Zufallsmasse beträgt  $g$ , welches als Unordnungsstärke betrachtet wird (siehe auch Kapitel 4.3). Mit Hilfe der supersymmetrischen Methode [8, 9], wird die  $1/N$  Korrektur der Korrelation der lokalen Zustandsdichten berechnet (siehe Kapitel 4.3.4 und 4.3.6).