F24-T3-A5

a) Geben Sie eine explizite Darstellung der primitiven fünften Einheitswurzeln mithilfe von Quadratwurzeln an. (Tipp: Wenn $X^4 + X^3 + X^2 + X + 1 = 0$, welche Polynomgleichung erfüllt dann $X + X^{-1}$?)

b) Folgern Sie aus ihrer Lösung der Teilaufgabe a) eine Konstruktionsvorschrift eines regelmäßigen Fünfecks mit Zirkel und Lineal.

c) Geben Sie eine Komstruktionsvorschrift eines regelmäßigen Zwanzigecks mit Zirkel und Lineal an.

Lösung

a) Wir bezeichnen mit ζ die primitive fünfte Einheitswurzel in den komplexen Zahlen $\mathbb{C}$. Es ist bekannt, dass $G := \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta)|\mathbb{Q}) \cong (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}, \cdot)^* \cong (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, +)$ via den Abbildungen die durch die Bilder der jeweiligen Erzeuger gegeben sind:

$$(\tau : (\zeta \mapsto \zeta^2)) \mapsto [2] \mapsto [1].$$

(Anmerkung: genau dieses τ ist ein Erzeuger von G, da $[2]$ einer von $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}, \cdot)^*$ ist). Wir betrachten jetzt dem Hinweis folgend das Element $\alpha := \zeta + \zeta^{-1}$ und bemerken, da $\zeta^5 = 1$ gilt, dass $\alpha = \zeta + \zeta^4$ gilt. Wir betrachten nun das Kreisteilungspolynom Φ_5 und seine bekannte Zerlegung in $\mathbb{C}[X]$:

$$\Phi_5(X) = \prod_{i=1}^{4}(X - \zeta^i) = X^4 + X^3 + X^2 + X + 1.$$

Mittels Koeffizientenvergleich ergibt sich also

$$1 = -\sum_{i=1}^{4} \zeta^i$$

bzw.

$$-1 = \alpha + \zeta^2 + \zeta^3 = \alpha + \beta$$

mit $\beta = \zeta^2 + \zeta^3$. Jetzt wollen wir $\alpha\beta$ berechnen:

$$\alpha\beta = (\zeta^2 + \zeta^3)(\zeta + \zeta^4) = \zeta^6 + \zeta^7 + \zeta^3 + \zeta^4 = \zeta + \zeta^2 + \zeta^3 + \zeta^4 = -1.$$

Wir sehen also $\alpha + \beta = \alpha\beta = -1$. Also $\beta = -1 - \alpha$. Jetzt können wir das in die andere Gleichung einsetzen und erhalten:

$$\alpha\beta = \alpha(-1 - \alpha) = -\alpha^2 - \alpha = -1$$

und demnach

$$\alpha^2 + \alpha - 1 = 0.$$

Mit Hilfe der Lösungsformel für qudratische Polynomgleichungen erhält man

$$\alpha = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Da der Realteil von $\alpha (= \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{16\pi}{5}\right)) > 0$ ist, erhalten wir schließlich $\alpha = \alpha = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ und demnach $\beta = -1 - \alpha \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$. Mit $\alpha = \zeta + \zeta^{-1}$ erhält man mittels Multiplikation mit ζ die Gleichung $\zeta^2 - \zeta\alpha + 1 = 0$. Wiederum mit der Lösungsformel für quadratische Polynomgleichungen erhält man schließlich $\zeta = \frac{-1+\sqrt{5}}{4} \pm \sqrt{-1}\frac{\sqrt{2\sqrt{5}+10}}{4}$. Da der Imaginärteil von $\zeta (= \sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)) > 0$ ist erhält man schließlich die gewünschte Darstellung für ζ mittels Quadratwurzeln:

$$\zeta = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4} + \sqrt{-1}\frac{\sqrt{2\sqrt{5} + 10}}{4}.$$

Man kann den Realteil noch Vereinfachen:

$$\frac{-1 + \sqrt{5}}{4} = \frac{(-1 + \sqrt{5})(1 + \sqrt{5})}{4(1 + \sqrt{5})} = \frac{5 - 1}{4(1 + \sqrt{5})} = \frac{1}{1 + \sqrt{5}}.$$

b) Wir definiern die Punkte $O = (0, 0)$ und $P = (1, 0)$. Diese liegen auf einem Kreis mit Mittelpunkt 0 und Radius 1. Also

   a) Konstruiere mit einem Zirkel einen Kreis mit Mittelpunkt O und Radius 1.

   b) Verbinde die Punkte P und O mit dem Lineal.

   c) Konstruiere ein Rechtwinkliges Dreieck mit Katheten der Länge 1 ($\overline{OP}$) und 2 ($\overline{PA}$) wobei A ein Punkt ist der auf der Tangente des Kreises am Punkt P liegt und eben $\overline{PA} = 2$ gilt. Die Hypothenuse diese Rechtwinkligen Dreiecks ist also $\overline{OA}$.

   d) Verlängere die Hypothenuse um 1. Diesen Punkt nennen wir B.

   e) Zeichne einen Kreis um O auf dem B liegt. Schneide diesen Kreis mit *overlinePA* und nenne den Schnittpunkt C.

   f) Der Schnittpunkt des ersten Kreises und $\overline{OC}$ ist ζ. Damit haben wir eine primitive 5-te Einheitswurzel konstruiert und somit auch ein regelmäßiges 5-Eck.

c) Nach dem wir das regelmäßige 5-Eck konstruiert haben können wir den Umkreis des 5-Ecks konsruieren. Dann konstriert man die Mittelsenkrechten zwischen allen fünf Ecken. Die Schnittpunkte mit dem Umkreis geben uns die fehlnden fünf Ecken eines regelmäßigen 10-Ecks. Jetzt machen wir dasselbe für das 10-Eck und erhalten dadurch ein regelmäßiges 20-Eck.