F25-T2-A3

Sei K ein Körper mit algebraischen Abschluss $\bar{K}$, sei $f \in K[X]$ normiert und sei $L = K(\alpha)$ mit einer Nullstelle von $\alpha \in \bar{K}$ von f.

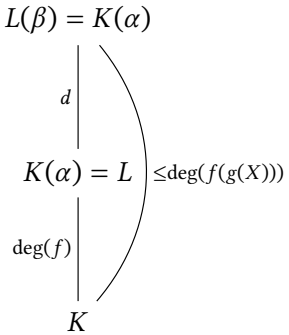
a) Zeigen Sie: Ist $[L : K] = \deg(f)$, dann ist f irreduzibel in $K[X]$.

b) Sei jetzt $f \in K[X]$ irreduzibel und sei weiter $g \in K[X]$. Wir nehmen an, dass das Polynom $g(X) - \alpha \in L[X]$ irreduzibel ist.
Zeigen Sie, dass dann $f(g(X)) \in K[X]$ irreduzibel ist.
Hinweis: Sei $\beta \in \bar{K}$ mit $g(\beta) = \alpha$. Zeigen Sie $K(\beta) = L(\beta)$.

Lösung

a) Angenommen f ist reduzibel in $K[X]$. Dann gibt es ein irreduzibles $g \in K[X]$ mit $0 \neq \deg(g) < \deg(f)$ und $g(\alpha) = 0$. OBdA ist g normiert (sonst durch führenden Koeffizienten teilen), weshalb g, das Minimalpolynom von α über K wäre. Dann gilt aber (da $L = K(\alpha)$), dass $[L : K] = \deg(g) < \deg(f)$. Via Widerspruch ergibt sich also, dass f irreduzibel ist, für $[L : K] = \deg(f)$.

b) Wir zeigen zunächst den Hinweis. Sei also $g \in K[X]$ (hat nichts mit dem g von oben zu tun) und $f \in K[X]$ irreduzibel. Zudem Sei $g(X) - \alpha \in L[X]$ irreduzibel. Sei weiter $\beta \in \bar{K}$ mit $g(\beta) = \alpha$. Demnach ist β eine Nullstelle von $g(X) - \alpha \in L[X]$. Offenbar gilt $K(\beta) \subset L(\beta) = K(\alpha, \beta)$. Wir müssen also zeigen, dass $\alpha \in K(\beta)$ liegt. Da β algebraisch über K ist, gilt $K[\beta] = \mathbb{K}(\beta)$. Da $g(\beta) = \alpha$ folgt also $\alpha \in K[\beta] = K(\beta)$, was den Beweis des Hinweises abschließt.
Um den Hinweis zu benutzen, benötigen wir zunächst ein $\beta \in \bar{K}$, mit $g(\beta) = \alpha$. Hierzu sei β also eine Nullstelle von $g(X) - \alpha$, welche in $\bar{K}$ existiert. Nach dem Hinweis wissen wir nun also $K(\beta) = L(\beta) = K(\alpha, \beta)$. Weiter bemerken wir, dass $f(g(\beta)) = f(\alpha) = 0$ gilt. Demnach ist β eine Nullstelle von $f(g(X)) \in K[X]$, also ein Kandidat für das Minimalpolynom von β über K. Weiter bemerken wir, dass $f(g(X))$ normiert ist. Wir betrachten also die folgende Situation



Da $g(X) - \alpha$ normiert ist, zudem irreduzibel in $L[X]$ und β als Nullstelle hat, ist $d = \deg(g)$. Demnach ist $[L(\beta) : K] = \deg(f) \cdot \deg(g) \leq \deg(f(g(X))$, woraus folgt, dass $[K/beta) : K] = \deg(f(g(X)))$, nach a) folgt also, dass $f(g(X))$ irreduzibel ist in $K[X]$.