H24-T2-A3

a) Es sei $n \in \mathbb{N}$ und sei G eine einfache Untergruppe der symmetrischen Gruppe S_n mit $|G| > 2$. Zeigen Sie, dass G bereits eine Untergruppe der alternierenden Gruppe A_n ist.

b) Es sei G eine einfache Gruppe der Ordnung 90. Zeigen Sie, dass G zu einer Untergruppe der alternierenden Gruppe A_6 isomorph ist.

c) Zeigen Sie, dass es keine einfache Gruppe der Ordnung 90 gibt.

Lösung

a) Wir betrachten die Untergruppe $G \cap A_n \subset S_n$. Das dies eine Untergruppe der S_n ist folgert man schnell. Zudem ist dies eine Untergruppe von G, sogar ein Normalteiler, denn für alle $\tau \in G \cap A_n$ gilt da $A_n \lhd S_n$ Normalteiler ist

$$\sigma\tau\sigma^{-1} \in G \cap S_n$$

für alle $\sigma \in G$, denn $\sigma\tau\sigma^{-1} \in G$, da alles in G und $\sigma\tau\sigma^{-1} \in A_n$ wegen der Normalteilereigenschaft von A_n bzgl. S_n. Demnach ist $\sigma\tau\sigma^{-1} \in G \cap S_n$. Da G einfach ist, folgt entweder $G \cap A_n = G \Leftrightarrow G \subset A_n$ oder $G \cap A_n = \{\mathrm{id}\}$. Wir müssen also noch den zweiten Fall ausschließen. Sei also $G \cap A_n = \{\mathrm{id}\}$ und $|G| > 2$. Wir betrachten zunächst den Fall $|G| = 3$. Dann ist G bekanntlich zyklisch und wird von einem Element der Ordnung 3 erzeugt. Es gilt also $G = \{\mathrm{id}, \sigma, \tau\}$ mit $\mathrm{ord}(\sigma) = \mathrm{ord}(\tau) = 3$. Angenommen $\mathrm{sgn}(\sigma) = -1$, dann folgt aus $\sigma^3 = \mathrm{id}$ und der Tatsache, dass sgn einn Gruppenhomomorphismus ist, $1 = \mathrm{sgn}(\mathrm{id}) = \mathrm{sgn}(\sigma^3) = \mathrm{sgn}(\sigma)^3$ und deshalb $\mathrm{sgn}(\sigma) = 1$. Dies ergibt also einen Widerspruch, d.h in G kann es kein Element τ mit $\mathrm{sgn}(\tau) = -1$ geben und demnach wäre $G \cap A_n = G$.
Im Fall $|G| \geq 4$ und $G \cap A_n = \{\mathrm{id}\}$ gibt es also $\sigma, \tau \in G$ mit $\mathrm{sgn}(\sigma) = \mathrm{sgn}(\tau) = -1$ und $\sigma \neq \tau^{-1}$. Dann gilt aber $\mathrm{sgn}(\sigma\tau) = (-1)^2 = 1$. Demnach wäre $\sigma\tau \in G \cap A_n$ aber $\sigma\tau \neq \mathrm{id}$. Auch hier erhalten wir einen Widerspruch.
Es folgt also $G \subset A_n$.

b) Wir betrachten die Primfaktorzerlegung $90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$. Weiter berechnen wir mit Hilfe des 3.Sylowsatzes die Anzahl s_5 der 5-Sylowgruppen. Wie gewohnt gilt dafür $s_5 \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 5)$ sowie $s_5 \mid 18$. Aus der zweiten Eigenschaft folgt $s_5 \in \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$. Da auch $s_5 \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 5)$ gelten muss, bleibt nur $s_5 \in \{1, 6\}$ und da G einfach ist, kann s_5 nicht 1 sein, denn sonst gäbe es einen Normalteiler mit 5 Elementen. Es bleibt also $s_5 = 6$. Bezeichnen wir weiter mit Syl_5 die Menge der 5-Sylowgruppen, so gilt $|\mathrm{Syl}_5| = 6$. Betrachten wir nun die Gruppenoperation (Nachprüfen! - Sylowsätze!)

$$G \times \mathrm{Syl}_5 \to \mathrm{Syl}_5, \quad (g, P) \mapsto gPg^{-1}.$$

Diese liefert einen nichttrivialen injektiven (2-ter Sylowsatz!) Gruppenhomomorphismus (*Noch zur Injektivität: Da G einfach muss* $\ker(\phi) \in \{\{e\}, G\}$ *sein, da es aber mehr als eine 5-Sylowgruppe gibt, ist* ϕ *nichttrivial, wegen des 2. Sylowsatzes, demnach kann* $\ker(\phi)$ *nicht ganz G sein*)

$$\phi : G \to S(\mathrm{Syl}_5) \cong S_6, \quad g \mapsto (\phi_g : \mathrm{Syl}_5 \to \mathrm{Syl}_5, \quad P \mapsto gPg^{-1}).$$

Man kann demnach $G \cong \phi(G)$ als Untergruppe von S_6 betrachten. Da $G > 2$ kann man a) anwenden. Das zeigt die Behauptung.

c) Wir zeigen hierzu die allgemeine Aussage:
Für $n \geq 5$ besitzt die A_n keine echte Untergruppe vom Index kleiner als n.
Sei also $U \subset A_n$ eine echte Untergruppe mit Index $k < n$. Wir betrachten die Operation

$$A_n \times A_n/U \to A_n/U, \quad (\sigma, [\tau]) \mapsto [\sigma\tau].$$

Hieraus erhalten wir einen Gruppenhomomorphismus

$$\alpha : A_n \to S(A_n/U) \cong S(k), \quad \sigma \mapsto (\alpha_\sigma : A_n/U \to A_n/U, \quad \tau \mapsto \sigma\tau).$$

Da A_n für $n \geq 5$ einfach ist, ist $\ker(\alpha) \in \{\{\mathrm{id}\}, A_n\}$. Angenommen $\ker(\alpha) = \{\mathrm{id}\}$, dann ist α injektiv und dann gilt $\frac{n!}{2} \mid k!$. Ein Widerspruch zu $k < n$. Also untersuchen wir den anderen Fall, dass $\ker(\alpha) = A_n$. Das wiederum würde aber $\sigma U = U$ für alle $\sigma \in A_n$ implizieren. Demnach wäre $k = 1$ und $U = A_n$. Demnach wäre U keine echte Untergruppe. Wieder ein Widerspruch. Das zeigt die Behauptung. Nach b) wäre G isomorph zu einer Untergruppe der A_n mit 90 Elementen. Diese hätte also Index $4 < 6$. Das ist nicht möglich, also kann G nicht einfach sein.