H24-T3-A5

Sei $\zeta_{16} = e^{\frac{2\pi i}{16}}$.

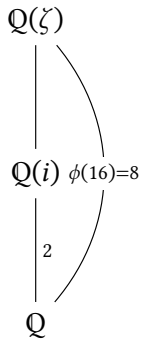
a) Zeigen Sie, dass $\mathbb{Q}(\zeta_{16})/\mathbb{Q}(i)$ eine Galoiserweiterung vom Grad 4 ist.

b) Bestimmen Sie das Minimalpolynom von ζ_{16} über $\mathbb{Q}(i)$.

c) Entscheiden Sie begründet, ob die Galoisgruppe von $\mathbb{Q}(\zeta_{16})/\mathbb{Q}(i)$ zu $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ oder zu $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ isomorph ist.

Lösung Zunächst einmal folgende Vereinbarung: $\zeta = \zeta_{16}$.

a) Es gilt $\zeta^4 = e^{\frac{\pi i}{2}} = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi i}{2}\right) = i$. Demnach ist $i \in \mathbb{Q}(\zeta)$ also $\mathbb{Q}(i) \subset \mathbb{Q}(\zeta)$. Wir betrachten nun also den folgenden Körperturm



Die bereits eingetragenen Körpergräde setze ich als bekannt voraus. Demnach gilt nach der Gradformel, das $[\mathbb{Q}(\zeta) : \mathbb{Q}(i)] = \frac{8}{2} = 4$. Zudem ist $\mathrm{char}(\mathbb{Q}(i)) = 0$, weshalb die Körpererweiterung $\mathbb{Q}(\zeta)/\mathbb{Q}(i)$ separabel ist. Wir bemerken weiter, dass das Polynom $X^4 - i \in \mathbb{Q}(i)[X]$ normiert und von Grad 4 ist, und zudem ζ als Nullstelle hat, demnach ist $f = X^4 - i$ das Minimalpolynom von ζ über $\mathbb{Q}(i)$. f hat die Nullstellen $\zeta, \zeta^5, \zeta^9 und \zeta^1 3$, da $4 \cdot 5 \equiv 4(\bmod 16), 4 \cdot 9 \equiv 4(\bmod 16)$ sowie $4 \cdot 13 \equiv 4(\bmod 16)$. Demnach ist $\mathbb{Q}(\zeta)$ der Zerfällungskörper von f über $\mathbb{Q}$ und deshalb die Erweiterung $\mathbb{Q}(\zeta)/\mathbb{Q}(i)$ normal und damit galoisch vom Grad 4.

b) Siehe a).

c) Da $[\mathbb{Q}(\zeta) : \mathbb{Q}(i)] = 4$ gilt $|\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta)/\mathbb{Q}(i))| = 4$. Demnach kommen nach dem Satz über endliche abelsche Gruppen nur die Isomorphietypen aus der Aufgabenstellung in Frage. Da bekanntlich ein Element der Galoisgruppe dadurch festgelegt ist, wohin die Nullstelle des Minimalpolynoms geschickt werden, betrachten wir

$$\sigma \in \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta)/\mathbb{Q}(i)), \quad \zeta \mapsto \zeta^5.$$

Diese Angabe ist bereits ausreichend, da alle Nullstellen von f eine ζ-Potenz sind. Wir sehen $\sigma^2(\zeta) = \zeta^{25} = \zeta^9, \sigma^3(\zeta) = \zeta^{45} = \zeta^{13}$ und $\sigma^4(\zeta) = \zeta^{5\cdot 13} = \zeta$. Demnach ist $\operatorname{ord}(\sigma) = 4$. Daher ist $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta)/\mathbb{Q}(i)) \cong \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.