F25-T2-A1

a) Seo $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ und sei R ein Ring. Ein Element $\omega \in R$ ist eine *n-te Einhheitswurzel in R*, wenn $\omega^n = 1$ gilt, und eine *primitive n-te Einheitswurzel*, wenn zusätzlich für alle $1 \leq m \leq n$ gilt, dass $\omega^m - 1 \in R^\times$ (also eine Einheit in R) ist.
Zeigen Sie, dass die (Restklasse) von 7 in $\mathbb{Z}/100\mathbb{Z}$ eine vierte Einheitswurzel, aber keine primitive vierte Einheitswurzel ist.

b) Bestimmen Sie die Ordnung der Einheitengruppe von $\mathbb{Z}/2025\mathbb{Z}$ und zeigen Sie, dass diese Gruppe nicht zyklisch ist.

Lösung

a) Wir berechnen $7^3 \equiv 43(\text{ mod } 100)$ und demnach ist $7^4 = 7 \cdot 7^3$ also $7^4 \equiv 7^3 \cdot 43 \equiv 1(\text{ mod } 100)$. Jedoch ist $7^1 - 1 = 6$ und $\text{ggT}(6, 100) \neq 1$, weshalt $[7 - 1] \notin \mathbb{Z}/100\mathbb{Z}^\times$ ist. Das zeigt die Behauptung.

b) Die Primfaktorzerlegung von 2025 ist $3^4 \cdot 5^2$. Mit Hilfe des chinesischen Restsatzes bekommt man also $\mathbb{Z}/2025\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/3^4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/5^2\mathbb{Z}$. Demnach gilt $\mathbb{Z}/2025\mathbb{Z}^\times \cong \mathbb{Z}/3^4\mathbb{Z}^\times \times \mathbb{Z}/5^2\mathbb{Z}^\times$. Es gilt $3^4 = 81$ und $5^2 = 25$, und demnach folgt für die eulersche Phi-Funktion $\phi(3^4) = 81 - 27 = 54$ und $\phi(5^2) = 25 - 5 = 20$. Demnach gilt $|\mathbb{Z}/2025\mathbb{Z}^\times| = 54 \cdot 20 = 1080$. Angenommen $\mathbb{Z}/2025\mathbb{Z}^\times$ wäre zyklisch, dann müsste es in $\mathbb{Z}/81\mathbb{Z}^\times \times \mathbb{Z}/25\mathbb{Z}^\times$ ein Element der Ordnung 1080 geben (weil wir ja die Isomorphie zu $\mathbb{Z}/2025\mathbb{Z}^\times$ haben). Das kann jedoch nicht sein, da $\text{ggT}(54, 20) \neq 1$.