F23-T3-A2

Es seien $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ und V der $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^{n\times n}$ der reellen $(n\times n)$-Matrizen. Für $A \in V$ sei $A^T \in V$ die zu A transponierte Matrix. Weiter seien

$$U := \{A \in V \mid A^T = A\} \quad \text{und} \quad W := \{A \in V \mid A^T = -A\}.$$

Zeigen Sie:

a) U und W sind Untervektorräume von V.

b) $V = U \oplus W$.

Lösungsvorschlag. Zu a). Die Nullmatrix $0_{n,n}$ ist sowohl in U als auch in W enthalten, denn es gilt

$$0_{n,n}^T = 0_{n,n} = -0_{n,n}.$$

Seien $A, B \in U$, sowie $C, D \in W$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$(\lambda A + \mu B)^T = \lambda A^T + \mu B^T = \lambda A + \mu B,$$

und

$$(\lambda C + \mu D)^T = \lambda C^T + \mu D^T = \lambda(-C) + \mu(-D) = -(\lambda C + \mu D).$$

Zu b). Für $M \in V$ suchen wir eine Zerlegung $M = A + B$ mit $A \in U$ und $B \in W$. Es gilt:

$$M = \underbrace{\frac{1}{2}(M + M^T)}_{=:A} + \underbrace{\frac{1}{2}(M - M^T)}_{=:B}.$$

Wegen

$$A^T = \frac{1}{2}(M + M^T)^T = \frac{1}{2}(M^T + M) = A$$

und

$$B^T = \frac{1}{2}(M - M^T)^T = \frac{1}{2}(M^T - M) = -B$$

gilt wie gewünscht $A \in U$ und $B \in W$. Wir haben also eine passende Zerlegung gefunden und müssen nun noch zeigen, dass dise eindeutig ist. Dazu genügt es festzustellen, dass sich U und W trivial schneiden: für $A \in U \cap W$ gilt $A = A^T = -A$ und somit $A = 0_{n,n}$.