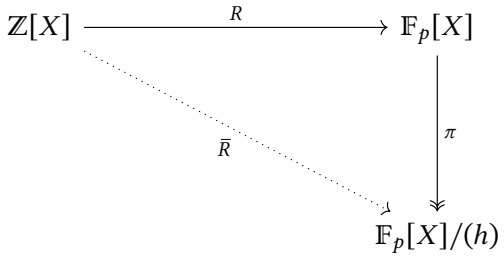
H25-T2-A5

Es sei p eine Primzahl, $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ der endliche Körper mit p Elementen und

$$R : \mathbb{Z}[X] \to \mathbb{F}_p[X], f = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i \mapsto R(f) = \sum_{i=0}^{n} (a_i + p\mathbb{Z})X^i$$

die Reduktionsabbildung für Polynome. Weiter sei $h \in \mathbb{F}_p[X]$ ein irreduzibles Polynom und (h) das zugehörige Hauptideal im Ring $\mathbb{F}_p[X]$. Zeigen Siem dass das Urbild $\mathfrak{m} := R^{-1}((h))$ ein maximales Ideal im Ring $\mathbb{Z}[X]$ bildet und der Körper $\mathbb{Z}[X]/\mathfrak{m}$ die Charakteristik p hat.

Lösung Da h ein irreduzibles Polynom in $\mathbb{F}_p[X]$ irreduzibel ist ist $\mathbb{F}_p[X]/(h)$ ein Körper (da $\mathbb{F}_p[X]$ ein Hauptidealbereich ist) der Charakteristik p (Körpererweiterung von $\mathbb{F} - p$). Weiter folgt, dass (h) ein maximales Ideal in $\mathbb{F}_p[X]$ ist. Wir betrachten folgendes kommutatives Diagramm:



wobei $\pi([f]) = [[f]]$, und $\bar{R} = \pi \circ R$. Wir zeigen nun $R^{-1}((h)) = \ker(\bar{R})$. Sei dazu $f(X) \in R^{-1}((h))$ also $R(f(X)) \in (h)$, wonach $\pi(R)(f) = [0] \iff \bar{R}(f) = [0]$, also $f \in \ker(\bar{R})$.
Umegekehrt sei $f \in \ker(\bar{R})$, also $\bar{R}(f) = [0] \iff \pi(R)(f) = [0] \Rightarrow R(f) \in (h)$ also $f \in R^{-1}((h))$.
Nach dem Homomrophiesatz (da R surjektiv) folgt $\mathbb{Z}[X]/\mathfrak{m} \cong \mathbb{F}_p[X]/(h)$ wonach $\mathbb{Z}[X]/\mathfrak{m}$ auch ein Körper der Charakteristik p ist.