F25-T3-A2

a) Sei $\mathbb{F}_3$ der Körper mit drei Elementen, und sei G die Menge der oberen Dreiecksmatrizen in $\mathrm{Mat}_3(\mathbb{F}_3)$ mit Einsen auf der Hauptdiagonalen. Zeigen Sie, dass G eine nichtabelsche Untergruppe von $\mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_3)$ der Ordnung 27 ist.

b) Bestimmen Sie 12 paarweise nicht isomorphe Gruppen der Ordnung 2025.

Lösung

a) Elemente in G sind von der Form

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

mit $a, b, c, d \in \mathbb{F}_3$. Es gilt $\det(A) = 1$. Für $B = \begin{pmatrix} 1 & e & f \\ 0 & 1 & g \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ gilt $AB = \begin{pmatrix} 1 & a+e & b+ag+f \\ 0 & 1 & c+g \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, wonach das Produkt zweier Matrizen aus G wieder in G ist. Die Identitätsmatrix ist offenbar auch in G. Das Inverse von A ist $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -a & -ac-b \\ 0 & 1 & -c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ und demnach auch in G. Wir haben also gezeigt, dass G eine Untergruppe von $\mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_3)$ ist, da wir 3 „Freiheitsgrade“haben, gilt $|G| = 3^3 = 27$. Es gilt zudem $BA = \begin{pmatrix} 1 & a+e & b+ec+f \\ 0 & 1 & c+g \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \neq AB$, wonach G nichtabelsch ist.

b) Wir geben zunächst die Primfaktorzerlegung von 2025 an:

$$2025 = 3^4 \cdot 5^2$$

Nach dem Hauptsatz über endliche abelsche Gruppen und dem chinesischen Restsatz gibt es also genau 2·5 abelsche Gruppen der Ordnung 2025 (2 Zerlegungsytpen für 5^2 und 4 Zerlegungstypen für 3^4). Demnach müssen wir noch 2 nichtabelsche Gruppen angeben, die nicht isomorph zueinander sind. Aus dem Skript bekannt ist z.B. $\mathbb{Z}/27\mathbb{Z} \rtimes_\phi \mathbb{Z}/75\mathbb{Z}$, wobei $\phi : \mathbb{Z}/75\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/18\mathbb{Z} \cong \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/27\mathbb{Z}), \quad [1] \mapsto [6]$. Eine andere Möglichkeit wäre $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \rtimes_\eta \mathbb{Z}/225\mathbb{Z}$, wobei $\eta : \mathbb{Z}/225\mathbb{Z} \to \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}, \quad [1] \mapsto [2]$. Diese beiden sind nicht isomorph, da die zweite Komponenete unterschiedlich ist, und in dieser die Verknüpfung wie beim direkten Produkt definiert ist.