H25-T1-A3

Es seien $a, b, c \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$: Weiter gelte $\frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} \in \mathbb{Z}$.

a) Es sei $f(X) := (X - \frac{ab}{c})(X_{\frac{bc}{a}})(X - \frac{ca}{b}) \in \mathbb{Q}[X]$. Zeigen Sie, dass f ganzahlige Koeffizienten hat.

b) Zeigen Sie, dass die ratinalen Zahlen $\frac{ab}{c}$, $\frac{bc}{a}$ und $\frac{ca}{b}$ bereits in $\mathbb{Z}$ liegen.

Lösung

a) Ausmultiplizieren liefert $f(X) = X^3 - (\frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b})X^2 + (a^2 + b^2 + c^2)X - abc$. Demnach folgt aus den Voraussetzungen $f \in \mathbb{Z}[X]$.

b) Da $f \in \mathbb{Z}[X]$ gilt nach Gauß dass für eine Nullstelle $\alpha \in \mathbb{Q}$ von f mit $\alpha = \frac{p}{q}$ und $\mathrm{ggT}(p, q) = 1$, dass $q \mid 1$ ubd $p \mid abc$. Demnach ist $\alpha = \frac{p}{q}$ in $\mathbb{Z}$. Da wir die Nullstellen aus der Form von f aus a) ablesen können, folgt die Behauptung.