H25-T2-A2

Sei G die Untergruppe der $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_3)$, die von den Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

erzeugt wird.

a) Es sei $E \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_3)$ die Einheitsmatrix. Beweisen Sie:

$$A^4 = E, \quad B^2 = A^2, \quad BAB^{-1} = A^3.$$

b) Zeigen Sie, dass man jedes Element in G eindeutig in der Form $A^k B^l$ mit $0 \leq k \leq 3$ und $0 \leq l \leq 1$ darstellen kann. Bestimmen Sie die Ordnung von G.

c) Zeigen Sie, dass G genau eine Untergruppe der Ordnung 2 besitzt.

d) Es sei N die Untergruppe von G der Ordnung 2. Zeigen Sie, dass N ein Normalteiler in G ist, und bestimmen Sie den Isomorphietyp von G/N.

Lösung

a) Nachrechnen.

b) Die Untergruppe $\langle A, B\rangle \subset \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_3)$ besteht aus beliebigen Worten in $A^{\pm 1}$ und $B^{\pm 1}$ (beliebige Aneinanderreihung von $A^{\pm 1}$ und $B^{\pm 1}$ in willkürlicher Reihenfolge). Zunächst bemerken wir nach a), dass $A^{-1}A^3$ und $B^{-1} = A^2B$, demnach müssen wir nur Worte in A, B betrachten.
Weiter bemerkt man, dass $BA^k = A^{3k}B$ (Indukion + a)) und demnach kann man jedes Wort in die Form $A^m B^n$ bringen mit $m, n \in \mathbb{N}$.
Wir wollen nun die Anzahl der vorkommenden $B's$ reduzieren. Dazu nutzen wir $B^2 = A^2$, wonach wir jedes Wort auf die Form $A^m B^l$ bringen können mit l wie gefordert.
Als letztes reduzieren wir die Anzahl der A's mit $A^4 = E$, wonach wir jedes Wort in der gewünschten Form $A^k B^l$ mit k, l wie in der Angabe schreiben können.
Folglich hat G genau $2 \cdot 4 = 8$ Elemente.

c) Da Gruppen mit 2 Elementen zyklisch sind, müssen wir einen Erzeuger finden. Wir gehen 2 Fälle durch:

1.Fall: $l = 0$ $(A^k)^2 = A^{2k} \iff k \equiv 0(\bmod 2)$ und da $A^0 = A^4 = E$ kommt nur A^2 als Erzeuger in Frage.

2. Fall: $l = 1$ $(A^k B)^2 = A^k(BA^k)B = A^k(A^{3k}B)B = A^4 kB^2 = A^2 \neq E$.

Wir sehen also, nur A^2 hat Ordnung 2, weswegen es nur eine Untergruppe der Ordnung 2 (die von A^2 erzeugte) in G gibt.

d) Wir setzen also $N = \langle A^2 \rangle$. Wir wollen jetzt die Normalteileriegenschaft nachweisen und betrachten wieder unsere beiden Fälle:

1.Fall: $l = 0$: $A^k A^2 A^{-k} = A^{k+2-k} = A^2 \in N$.

2.Fall; $l = 1$: $A^k B A^2 B^{-1} A^{-k} = A^k B A^2 A^2 B A^{-k} = A^k B^2 A^{-k} = B^2 = A^2 \in N$.

Demnach ist N ein Normalteiler. Also ist G/N eine Gruppe mit $[A]^2 = [A^2] = [E]$. Weiter gilt $[AB]^2 = [ABAB] = [AA^3B^2] = [A^4B^2] = [A^2] = [E]$ und $[A^2B]^2 = [A^2BA^2B] = [A^2A^6B^2] = [A^2] = [E]$. Demnach gibt es 3 Elemente der Ordnung 2 in G/N also, $G/N \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Wir wussten bereits davor dass G/N 4 Elemente hat, da G 8 und N genau 2 Elemente besitzt. Demnach mussten wir nur zwischen $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ entscheiden.