H24-T2-A2

a) Bestimmen Sie die ganze Zahl $a \in \{0, \dots, 82\}$ mit $50^{247} \equiv a \pmod{83}$.

b) Der Satz von Wilson besagt, dass $(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$ für jede Primzahl p gilt. Bestimmen Sie hiermit die ganze Zahl $a \in \{0, \dots, 100\}$ mit $98! \equiv a \pmod{101}$.
Hinweis: Sie dürfen den Satz von Wilson ohne Beweis benutzen.

c) Im Folgenden bezeichne ϕ die Eulersche ϕ- Funktion. Beweisen oder widerlegen Sie:

i) für alle $m, n \in \mathbb{N}$ mit $n > m$ gilt $\phi(n) \geq \phi(m)$;

ii) für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\phi(2n) \geq \phi(n)$;

iii) für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\phi(n) \mid \phi(n^2)$.

Lösung

a) Wir bemerken $247 = 3 \cdot 82 + 1$. Zudem ist 83 eine Primzahl und demnach gilt für alle $x \in \mathbb{Z}/83\mathbb{Z}$, dass $x^{82} = 1$ gilt. Wir folgern also $50^{247} \equiv 50 \cdot 50^{3 \cdot 82} \equiv 50 \cdot 1^3 \equiv 50 \pmod{83}$. Demnach ist $a = 50$.

b) Nach dem Satz von Wilson gilt $100! \equiv -1 \pmod{101}$, da 101 eine Primzahl ist. Wir suchen nun das Inverse zu 2 in $\mathbb{Z}/101\mathbb{Z}$. Dazu berechnen wir $101 = 2 \cdot 5 + 1$. Demnach ist $2^{-1} \equiv 51 \pmod{101}$. Da $2! = 2$ folgt $98! = \frac{100!}{2}$ und desahlb $98! \equiv \frac{-1}{2} \equiv 50 \pmod{101}$. Es ist also wieder $a = 50$.

c) i) Wir betrachten $6 > 5$ aber $\phi(6) = \phi(2)\phi(3) = 2$ und $\phi(5) = 4$.

ii) Wir betrachten zunächst den Fall, dass $2 \nmid n$. Dann Gilt $\phi(2n) = \phi(2)\phi(n) = \phi(n)$. Im Fall $2 \mid n$ schreiben wir $n = 2^k \cdot l$ mit $k \geq 1$ und $2 \nmid l$. Demnach ist $\phi(2n) = \phi(2^{k+1})\phi(l) = (2^{k+1} - 2^k)\phi(l) = 2^k(2-1)\phi(l) = 2^k\phi(l) \geq 2^{k-1}\phi(l) = (2^k - 2^{k-1})\phi(l) = \phi(2^k)\phi(l) = \phi(n)$.

iii) Sei $n = \prod_{i=1}^{k} p_i^{a_i}$ die Primfaktorzerlegung von n wobei $p_i \neq p_j$ für $i \neq j$ gilt, die p_i allesamt Primzahlen sind und die $a_i \geq 1$ sind. Es gilt dann $n^2 = \prod_{i=1}^{k} p_i^{2a_i}$. Demnach folgt $\phi(n^2) = \prod_{i=1}^{k}(p_i^{2a_i} - p_i^{2a_i-1}) = \prod_{i=1}^{k} p_i^{2a_i-1}(p_i - 1)$. Weiter gilt $\phi(n) = \prod_{i=1}^{k} p_i^{a_i-1}(p_i - 1)$. Da $2a_i - 1 > a_i - 1$ folgt $\phi(n^2) \mid \phi(n)$.