H25-T3-A2

Zur Erinnerung: Für eine Operation einer Gruppe G auf eine Menge Ω heißt $K := \{g \in G : g \cdot \omega = \omega \text{ für alle } \omega \in \Omega\}$ der *Kern* der Operation. Im Fall $K = \{1_G\}$ heißt die Operation *treu*.

a) Es sei G eine abelsche Gruppe, die treu und transitiv auf einer Menge Ω operiere. Zeigen Sie, dass der Stabilisator $\mathrm{Stab}_G(\omega)$ für jedes $\omega \in \Omega$ gleich dem Kern der Operation von G auf Ω ist.

b) Es sei G eine endliche abelsche Gruppe, die treu und transitiv auf einer endlichen Menge Ω operiere. Zeigen Sie, dass $|G| = |\Omega|$ ist.

c) Geben Sie jeweils eine nichtabelsche endliche Gruppe G sowie eine treue und transitive Operation von G auf einer endlichen Menge Ω so an, dass gilt:

   i) $|G| = |\Omega|$;

   ii) $|G| \neq |\Omega|$.

Lösung

a) Wir erinnern an $\mathrm{Stab}_G(\omega) = \{g \in G : g \cdot \omega\}$. Da G transitiv auf Ω operiert, gilt $\forall\tilde{\omega}\exists\omega \in \Omega, g \in G : g \cdot \omega = \tilde{\omega}$. Sei nun $g \in \mathrm{Stab}_G(\omega)$ und $\tilde{\omega} \in \Omega$ beliebig. Aus der Transitivität existiert ein $\tilde{g} \in G : \tilde{g}\tilde{\omega} = \omega \Rightarrow \omega = g \cdot \omega = g(\tilde{g}\tilde{\omega})$ und aus G abelsch folgt aus $g\tilde{g}\tilde{\omega} = \tilde{g}\tilde{\omega}$ bereits $g\tilde{\omega} = \tilde{\omega}$ also $g \in K$. Die Treuheit der Operation wird hier nicht benötigt.

b) Wir wissen, dass es eine Bijektion zwischen den Mengen Ω und $G/\mathrm{Stab}_G(\omega)$ gibt also $|G/\mathrm{Stab}_G(\omega)| = |\Omega|$ und da G treu und transitiv auf Ω operiert gilt nach a), dass $\mathrm{Stab}_G(\omega) = \{1\}$ also $|G| = |\Omega|$.

c) i) Wir wählen $G = \Omega = S(3)$ und lassen G auf sich selbst durch Linksmultiplikation operieren. Man rechnet dann nach, dass diese Operation (?!) treu und transitiv ist.

   ii) Wir wählen $G = S(3)$ und $\Omega = \{1, 2, 3\}$ und definieren die Wirkung $\sigma \cdot i := \sigma(i)$. Auch hier ist noch nachzurechnen, dass dies eine transitive treue Operation definiert.