H23-T1-A4

Sei R ein kommutativer Ring (mit 1). Sei weiter $I \subseteq R$ ein Ideal. Wir definieren das *Radikal* von I als

$$\mathrm{rad}(I) = \{r \in R | r^n \in I \text{ für ein } n \in \mathbb{Z}_{>0}\}.$$

Zeigen Sie:

a) $\mathrm{rad}(I)$ ist ebenfalls ein Ideal von R.

b) Ist I ein Primideal, dann gilt $\mathrm{rad}(I) = I$.

Lösung

a) Hierfür weist man die drei Idealeigenschaften nach:

   i) $0 \in \mathrm{rad}(I)$, denn $0^1 \in I$ und $1 > 0$.

   ii) Für $x, y \in \mathrm{rad}(I)$ gibt es $n, m > 0$ mit $x^n \in I$ und $y^m \in I$. Betrachte $(x+y)^{n+m}$. Nach dem Binomischen Lehrsatz gilt hierfür

   $$(x+y)^{n+m} = \sum_{k=0}^{n+m} \binom{n}{k} x^k y^{n+m-k}.$$

   Für $k < n$ ist $n + m - k > m$ und daher $y^{n+m-k} \in I$ und deshalb $(x+y)^{n+m} \in I$, da I Ideal. Für $k \geq n$ ist $x^n \in I$ und deswegen ebenfalls $(x+y)^{n+m} \in I$ (I Ideal).

   iii) Seien $x, y \in \mathrm{rad}(I)$. Wie oben gibt es $n, m > 0$ mit $x^n \in I$ und $y^m \in I$. Es folgt $(xy)^n = x^n y^n \in I$ da $x^n \in I$ und I Ideal.

b) Sei I ein Primideal. $I \subseteq \mathrm{rad}(I)$ ist trivial ($n = 1$). Sei nun also x in $\mathrm{rad}(I)$, das bedeuetet, dass es ein $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ so dass $x^n \in I$, da I ein Primideal ist folgt $x^{n-1} \in I$ oder $x \in I$. Induktiv folgt also $x \in I$. Das zeigt $\mathrm{rad}(I) = I$.