F25-T3-A1

Sei $n \geq 1$, sei K ein Körper, sei $\mathrm{Mat}_n(K)$ der Ring der $n \times n$-Matrizen über K, und sei $A \in \mathrm{Mat}_n(K)$. Bekanntlich ist das *Minimalpolynom* von A das eindeutig bestimmte normierte Polynom $\mu_A \in K[X]$ minimalen Grades, das $\mu_A(A) = 0_{n,n}$ erfüllt.

a) Sei $m \geq 1$ und $B \in \mathrm{Mat}_m(K)$. Des Weiteren sei $C \in \mathrm{Mat}_{n+m}(K)$ die Blockdiagonalmatrix $C = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$. Beweisen Sie, dass μ_C ein kleinstes gemeinsames Vielfaches von μ_A und μ_B ist.

b) Entscheiden Sie begründet, ob es eine Matrix $A \in \mathrm{Mat}_6(\mathbb{R})$ mit charakteristischem Polynom $X^6 + X^4$ und Minimalpolynom vom Grad 5 gibt.

Lösung

a) Wir betrachten die lineare Abbildung

$$\phi_C : K^{n+m} \to K^{n+m}, \quad (v_1, \dots, v_n, w_1, \dots, w_m)^\intercal \mapsto \begin{pmatrix} A \cdot (v_1, \dots, v_n)^\intercal \\ B \cdot (w_1, \dots, w_m)^\intercal \end{pmatrix}.$$

Die darstellende Matrix bezüglich der Standardbasis von ϕ_C ist C. Man betrachte weiter die Abbildung

$$\alpha_C : K[X] \to \mathrm{Mat}_{n+m}(K), \quad f(X) \mapsto f(C);$$

beziehungsweise

$$\widetilde{\alpha_C} : K[X] \to \mathrm{End}(K^{n+m}), \quad f(X) \mapsto f(\phi_C)$$

als Endomorphismus gelesen. Es gilt bekanntlich $\ker(\alpha_C) = (\mu_C)$. Analoge Definitionen für ϕ_A, ϕ_B, bzw. α_A, α_B ergeben $\ker(\alpha_A) = (\mu_A)$ und $\ker(\alpha_B) = (\mu_B)$. Wir zeigen also zunächst, dass μ_C in (μ_A) bzw. (μ_B) enthalten ist. Demnach berechenen wir $\mu_C(A)$ sowie $\mu_C(B)$. bzw. $\mu_C(\phi_A)$ und $\mu_C(\phi_B)$). Da $\mu_C(\phi_C) = 0$ muss $\mu_C(\phi_A)(v) = 0$ sowie $\mu_C(\phi_B)(w) = 0$ gelten, für alle $v \in K^n$ und $w \in K^m$. Demnach gilt $\mu_C(A) = 0$ und $\mu_C(B) = 0$. μ_C ist also ein gemeinsames Vielfaches von μ_A und μ_B. Da μ_C vom kleinsten Grad mit dieser Eigenschaft ist, ist es auch ein kleinstes gemeinsames Vielfaches.

b) $X^6 + X^4 = X^4(X^2 + 1)$. Da X und $X^2 + 1$ irreduzibel in $\mathbb{R}[X]$ sind, ist dies die eindeutige (bis auf Konstanten) Zerlegung in irreduzible Elemente. Da $X^2 + 1$ irreduzibel in $\mathbb{R}[X]$ ist, ist das einzige normierte Polynom vom Grad 5, dass $X^6 + X^4$ teilt, ist $X^5 + X^3$. Wir nutzen Teilaufgabe a). Wir definieren $A = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$ mit $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ und $C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Da B einen Jordan-Block der Größe 3 und einen Jordan-Block der Größe 1 enthält ist das charakteristische Polynom

von B gleich $\chi_B(X) = X^4+X^2$ und das Minimalpolynom $\mu_A = X^3+X$. Die Eigenwerte von C sind i und $-i$. Demnach ist das charakteristische Polynom von C gleich dem Minimalpolynom von C also $\chi_C(X) = \mu_C(X) = X^2+1$ (da irreduzibel über $\mathbb{R}$). Nach a) ist $\mu_A(X) = \text{kgV}(X^3+X^2, X^2+1) = X^5 + X^3$. Für das charakteristische Polynom benutzt man die Determinantenformel für Block-Matrizen und erhält somit $\chi_A(X) = \chi_B(X) \cdot \chi_C(X) = X^6 + X^4$.