H25-T3-A4

Es seien $K = \mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt[3]{3})$ und $\epsilon := e^{2\pi i/3}$ und $L = K(\epsilon)$.

a) Bestimmen Sie den Grad der Körpererweiterung $K|\mathbb{Q}$.

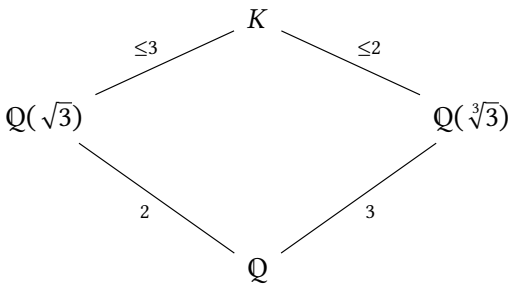
b) Begründen Sie, warum $K|\mathbb{Q}$ nicht galoisch ist, $L|\mathbb{Q}$ hingegen schon.

c) Bestimmen Sie die Mächtigkeit $|\mathrm{Gal}(L \mid \mathbb{Q})|$ der Galois-Gruppe $\mathrm{Gal}(L|\mathbb{Q})$ von $L|\mathbb{Q}$.

d) Zeigen Sie, dass die Galois-Gruppe $\mathrm{Gal}(L \mid \mathbb{Q})$ nicht abelsch ist.

Lösung

a) Wir betrachten den folgenden Körperturm (alle Einzelheiten nachprüfen!)



Weiter gilt $\mathrm{ggT}(2,3) = 1$ wonach oben Gleichheitszeichen stehen, und demnach ist $[K : \mathbb{Q}] = 2 \cdot 3 = 6$.

b) Wir betrachten das Polynom $f(X) = (X^2 - 3)(X^3 - 3) \in \mathbb{Q}[X]$ mit Nullstellen in K $\pm\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{3}$ aber $\sqrt[3]{3}\epsilon$, $\sqrt[3]{3}\epsilon^2 \notin K$. Demnach ist $K|\mathbb{Q}$ nicht normal. Hingegen ist L der Zerfällungskörper von f über $\mathbb{Q}$ und somit ist $L|\mathbb{Q}$ normal und da $\mathrm{char}(\mathbb{Q}) = 0$ gilt auch separabel. Also ist $L|\mathbb{Q}$ galoisch, $K|\mathbb{Q}$ jedoch nicht.

c) Da $L|\mathbb{Q}$ eine endliche Galoiserweiterung ist gilt $|\mathrm{Gal}(L|\mathbb{Q})| = [L : \mathbb{Q}] = \deg(\mu_\epsilon) \cdot 6$, wobei μ_ϵ das Minimalpolynom von ϵ über K ist. Ein Kanditat dafür ist $\Phi_3(X) = X^2 + X + 1$. Da $K \subset \mathbb{R}$ und $\epsilon \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ gilt $[L : K] \geq 2$, wonach Φ_2 tatsächlich das Minimalpolynom ist, also $|\mathrm{Gal}(L|\mathbb{Q})| = 12$.

d) $L|\mathbb{Q}$ ist nach obigen Überlegungen eine endliche Galoiserweiterung, wonach der Hauptsatz der Galoistheorie und dessen Zusatz anwendbar ist. Nach a) besitzt $L|\mathbb{Q}$ mit $K|\mathbb{Q}$ eine Körpererweiterung, welche nicht normal ist, heißt $\mathrm{Gal}(L|\mathbb{Q})$ hat eine Untergurppe, welche kein Normalteiler ist, demnach kann $\mathrm{Gal}(L|\mathbb{Q})$ nicht abelsch sein.