H25-T3-A3

a) Es seien R ein Integritätsbereich und K ein Teilkörper von R. Ferner sei R ein endlichdimensionaler K-Vektorraum. Zeigen Sie, dass dann R ebenfalls ein Köroer ist.

b) Es sei $F|K$ eine Körpererweiterung mit Zwischenkörpern L und M. Dabei sei $M|K$ endlich. Ohne Beweis darf benutzt werden, dass $R := \{\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \,:\, n \in \mathbb{N}, a_i \in L, b_i \in M\}$ ein Teilring von ML ist. Zeigen Sie, dass R ein endlichdimensionaler L-Vektorraum ist, wobei die Skalarmultiplikation durch Einschränkung der auf F gegebenen Multiplikation induziert werde.

c) Zeigen Sie unter den Voraussetzungen von b), dass $[ML : L] \leq [M : K]$ ist.

Lösung

a) Sei $r \in R \setminus \{0\}$ und betrachte die Abbildung

$$\mu_r : R \to R, \quad x \mapsto rx.$$

Wir zeigen, dass μ_r injektiv ist. Sei also $\mu_r(x) = \mu_r(y) \iff rx - ry = 0 \iff r(x-y) = 0$ und da R ein Integritätsbereich ist und $r \neq 0$ folgt $x - y = 0 \iff x = y$ also μ_r injektiv. Da μ_r eine lineare Abbildung ist (nachrechnen!), und R ein endlichdimensionaler K-Vektorraum ist ist μ_r auch surjektiv. Also bijektiv, also existiert ein $s \in R : rs = 1$. Das machen wir für alle $r \in R \setminus \{0\}$, demnach ist R ein Körper.

b) Sei $[M : K] = k$. Sei weiter $\{m_1, \dots, m_k\}$ eine K-Basis von M. Demnach existieren für alle $m \in M$ eindeutige $x_i \in K \subseteq L$ mit $m = \sum_{i=1}^{k} x_i m_i$.
Sei weiter $r = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \in R$ beliebig. Da $b_i \in M$ können wir r eindeutig schreiben als

$$r = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{k} x_{ij} m_j = \sum_{j=1} (\sum_{i=1}^{n} a_i x_{ij}) m_j,$$

wobei $\sum_{i=1}^{n} a_i x_{ij} \in L$. Demnach ist $\{m_j\}_{j \in \{1,\dots,k\}}$ ein L-Erzeugendensystem von R ist, also ist R ein endlich-dimensionsaler L-Vektorraum mit $\dim_L(R) \leq m$.

c) Da R ein Teilring von F ist, ist R ein Integritätsbereich. Da L ein Teilkörper von R ist folgt nach a) , dass R ein Körper ist. Da $1 \in L \cap M$ ist sowohl L als auch M ein Teilkörper von R. Demnach ist R ein Körper der L und M enthält also nach Definition von ML gilt $R = ML$ und somit $[ML : L] \leq [M : K]$ ist.