H24-T3-A2

Sei R der Restklassenring $\mathbb{Z}[X]/(X^3 + X)$.

a) Zeigen Sie, dass R zum Produktring $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}[i]$ isomorph ist.

b) Geben Sie sämtliche Einheiten des Ringes $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}[i]$ an.

c) Bestimmen Sie alle Elemente $a, b \in \mathbb{Z}$, sodass die Restklasse von $X^2 + aX + b$ in R eine Einheit ist.

Lösung

a) Wir betrachten die Faktorisierung $X^3 + X = X(X^2 + 1)$, wobei $\text{ggT}(X, X^2 + 1) = 1 \in \mathbb{Z}[X]$. Weiter betrachten wir die surjektiven Ringhomomorphismen (sind ja Einsetzungsmorphismen) (Ringhomomorphismuseigenschaft bitte nachprüfen!)

$$\alpha : \mathbb{Z}[X] \to \mathbb{Z}, \quad f(x) \mapsto f(0)$$

mit $\ker(\alpha) = (X)$ und

$$\beta : \mathbb{Z}[X] \to \mathbb{Z}[i], \quad f(x) \mapsto f(i)$$

mit $\ker(\beta) = (X^2+1)$. Bei β ist zu bemerken, dass dieser ebenfalls surjektiv ist, da $a+bX \mapsto a+bi$. Da X und $X^2 + 1$ normiert sind, können wir auch in $\mathbb{Z}[X]$ eine Division mit Rest durchführen. Dies benutzen wir um die Aussagen über $\ker(\alpha)$ und $\ker(\beta)$ zu verifizieren. Ich mache das mal für $\ker(\beta)$. Sei hierfür $f \in (X^2 + 1)$, also $f = g(X^2 + 1)$ mit $g \in \mathbb{Z}[X]$. Dann gilt $\beta(f) = \beta(g)\beta(X^2 + 1) = \beta(g)\beta(i^2 + 1) = \beta(g)\beta(0) = 0$. Demnach liegt f im Kern von β. Sei nun $h \in \ker(\beta)$. Mittels angesprochener Division mit Rest gibt es $q, r \in \mathbb{Z}[X]$ mit $\deg(r) < 2$ sodass $h = q(X^2 + 1) + r$ gilt. Demnach gilt $\beta(h) = \beta(q)\beta(0) + \beta(r)$. Also hat r i als Nullstelle. Das kann jedoch nicht sein, da r maximal Grad 1 hat, und demnach müsste $i \in \mathbb{Z}$ sein - ein Widerspruch. Wir haben also verifiziert, dass $\ker(\beta) = (X^2+1)$. Analog (und deutlich einfacher) verfährt man für $\ker(\alpha)$.
Nach dem Homomorphiesatz gibt es also zwei Isomorphismen $\tilde{\alpha} : \mathbb{Z}[X]/(X) \to \mathbb{Z}$ und $\tilde{\beta} : \mathbb{Z}[X]/(X^2 + 1) \to \mathbb{Z}[i]$. Da X und $X^2 + 1$ teilerfremd sind gilt nach Chinesischem Restsatz

$$R \cong \mathbb{Z}[X]/(X) \times \mathbb{Z}[X]/(X^2 + 1) \overset{(\tilde{\alpha},\tilde{\beta})}{\cong} \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}[i].$$

b) Die Einheiten von $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Z}[i]$ (Norm = 1 betrachten) sind bekannt. Die Einheiten in $\mathbb{Z}$ sind nur ± 1. In $\mathbb{Z}[i]$ gibt es ± 1 und $\pm i$. Insegasamt gibt es in $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}[i]$ also die Einheiten:

$$(1, 1), (1, -1), (1, i), (1, -i), (-1, 1), (-1, -1), (-1, i), (-1, -i).$$

c) Wir bestimmen hierzu die Abbildung von $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}[i] \to R$. Hierzu beachte man, dass $1 = X^2+1-X\cdot X$. Hieraus erhält man die Umkehrabbildung der kanonischen Abbildung aus dem chinesischen Restsatz:

$$\eta : \mathbb{Z}[X]/(X) \times \mathbb{Z}[X]/(X^2+1) \to R, \quad ([f],[g]) \mapsto (-X^2 \cdot g + (X^2+1)\cdot f).$$

Demnach liefert $\eta \circ (\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$ den gewünschten Morphismus:

$$\eta\circ(\tilde{\alpha},\tilde{\beta}) : \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}[i] \to R, \quad (a, b+ci) \mapsto ([a],[b+cX]) \mapsto ([-X^2(b+cX)+(X^2+1)a]) = [(a-b)X^2+cX+a].$$

Da wir nur Einheiten betrachten gilt $(a,b,c) \in \{-1,1\}^3$. Wir interessieren uns nun für den Fall $a-b=1$ (denn der führende Koeffizient soll ja 1 sein!). Das ist für Einheiten nur möglich, wenn $a=1$ und $b=0$ ist. Für c können wir also ± 1 wählen. Die Einheiten der Form $X^2+a'X+b' \in R$ sind also X^2+X+1 und X^2-X+1.