F24-T1-A4

Sei p eine Primzahl mit der Eigenschaft, dass $p-1 = p_1 \cdot \ldots \cdot p_n$ Produkt der paarweise verschiedenen Primzahlen $p_1, \ldots, p_n$ ist.

a) Zeigen Sie, dass es genau 2^n verschiedene Untergruppen in $G = (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$ gibt.

b) Sei $\zeta_p \in \mathbb{C}$ eine primitive p-te Einheitswurzel. Bestimmen Sie die Anzahl der Zwischenkörper in der Körpererweiterung $\mathbb{Q}(\zeta_p)|\mathbb{Q}$.

Lösung

a) Da p eine Primzahl ist, gilt $G \cong \mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z}$. Da $p-1 = p_1 \cdot \ldots \cdot p_n$ gilt, folgt mit dem Chinesischen Restsatz

$$G \cong \mathbb{Z}/p_1\mathbb{Z} \times \ldots \times \mathbb{Z}/p_n\mathbb{Z}.$$

Da die p_i's alle Primzahlen sind, hat $\mathbb{Z}/p_i\mathbb{Z}$ genau zwei Untergruppen für jedes i. Insgesamt hat G also 2^n Untergruppen.

b) Wir benutzen folgenden Fakt:

$$G' := \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_p)|\mathbb{Q}) \cong \mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z}.$$

Nach Teilaufgabe a) hat also G' genau 2^n Untergruppen. Nach dem Haupsatz der Galoistheorie gibt es also genau 2^n Zwischenkörper der Erweiterung $\mathbb{Q}(\zeta_p)|\mathbb{Q}$.
Wieso ist $\mathbb{Q}(\zeta_p)|\mathbb{Q}$ eine endliche Galoiserweiterung: $\mathbb{Q}$ ist ein perfekter Körper, und $\mathbb{Q}(\zeta_p)$ ist der Zerfällungskörper des Polynoms Φ_p über $\mathbb{Q}$. Deshalb ist $\mathbb{Q}(\zeta_p)|\mathbb{Q}$ auch normal. Endlich folgt, aus der Tatsache, dass $\deg(\Phi_p) = p-1$ gilt.