H23-T2-A4

Es seien $x = (x_1, x_2, x_3, x_4), y = (y_1, y_2, y_3, y_4), z = (z_1, z_2, z_3, z_4) \in \mathbb{R}^4$ beliebig und

$$f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}, \quad (u_1, u_2, u_3, u_4) \mapsto \det \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \\ u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \end{pmatrix}.$$

a) Zeigen Sie, dass f eine lineare Abbildung ist.

b) Zeigen Sie, dass x, y, z Elemente des Kerns von f sind.

c) Zeigen Sie, dass der Kern von f genau dann der von x, y, z aufgespannte Unterraum ist, wenn diese Vektoren linear unabhängig sind.

d) Bestimmen Sie den Kern von f im Fall, dass x, y, z linear abhängig sind.

Lösung Wir führen noch die Notation $u := (u_1, u_2, u_3, u_4)$ ein.

a) Die genaue Formel kann mit Hilfe des Laplace'schen Entwicklungssatzes berechnet werden, darauf wird in dieser Lösung verzichtet, deshalb also unbedingt die folgende Aussage exemplarisch überprüfen: Die u_i's kommen in $f(u)$ asschließlich in 1. Ordnung vor. Hierzu ist noch zu sagen, dass man am besten nach der 4.Zeile entwickelt, man erhält

$$f(u) = \sum_{k=1}^{4} u_i \cdot (-1)^{i+1} \cdot g_i(x, y, z),$$

wobei die g_i ausschließlich von x, y, z abhängen (diese sind fest, da die Variable in f u ist). Folglich ist f eine lineare Abbildung.

b) Gibt es linear abhängige Spalten in einer Matrix A so folgt $\det(A) = 0$. Daraus folgt $x, y, z \in \ker(f)$.

c) Wir benutzen den Rangsatz von linearen Abbildungen

$$\dim(\mathbb{R}^4) = \dim(\ker(f)) + \dim(\mathrm{im}(f)) \Leftrightarrow 4 = \dim(\ker(f)) + \dim(\mathrm{im}(f))$$

Sind x, y, z linear unabhängig, dann ist f surjektiv, denn $f(\zeta \cdot (g_1(x,y,z))^{-1}, 0, 0, 0)) = \zeta$ für alle $\zeta \in \mathbb{R}$, da $g_1(x,y,z) \neq 0$.Daher ist $\dim(\ker(f)) = 3$ und es folgt aus b), dass genau dann, wenn x, y, z linear unabhängig sind, $\ker(f) =< x, y, z >$ gilt.

d) Im Fall, dass x, y, z linear abhängig sind, folgt wiederum $f(u) = 0$ für alle $u \in \mathbb{R}^4$ (vgl. Teil b)). Deshalb gilt $\ker(f) = \mathbb{R}^4$.