F24-T1-A5

Sei $\alpha = \sqrt{10 - 5\sqrt{2}} \in \mathbb{R}$.

a) Bestimmen Sie das Minimalpolynom von α über $\mathbb{Q}$.

b) Zeigen Sie, dass $\mathbb{Q}(\alpha)|\mathbb{Q}$ eine Galoiserweiterung ist.

c) Zeigen Sie, dass die Galoisgruppe vonn $\mathbb{Q}(\alpha)|\mathbb{Q}$ zu $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ isomorph ist.

Lösung

a) Wir rechnen $\alpha^2 = 10 - 5\sqrt{2}$ und $\alpha^4 = 150 - 100\sqrt{2}$. Es gilt also $\alpha^4 - 20\alpha^2 = -50$. Das Polynom $f = X^4 - 20X^2 + 50$ hat also α als Nullstelle. F ist zudem normiert und irreduzibel nach Eisenstein ($p = 2$). f ist also das Minimalpolynom von α über $\mathbb{Q}$.

b) Wir treffen zunächst ein paar Vorüberlegungen. Es gilt $\sqrt{10 - 5\sqrt{2}}\sqrt{10 + 5\sqrt{2}} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2} = 10 - \alpha^2 \in \mathbb{Q}(\alpha)$. Also ist auch $\beta := \sqrt{10 + 5\sqrt{2}} \in \mathbb{Q}(\alpha)$. Da $f = (X - \alpha)(X + \alpha)(X - \beta)(X + \beta)$ ist $\mathbb{Q}(\alpha)$ der Zerfällungskörper von f über $\mathbb{Q}$. Damit ist $\mathbb{Q}(\alpha)|\mathbb{Q}$ eine normale Erweiterung und da $\mathbb{Q}$ perfekt ist, ist die Erweiterung auch Galois'sch.

c) Da $\deg(f) = 4$ gilt $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}] = 4$ und da $\mathbb{Q}(\alpha)|\mathbb{Q}$ separabel ist, gilt auch $\#\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\alpha)|\mathbb{Q}) = 4$. Deshalb ist die Galoisgruppe entweder isomorph zu $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ oder zu $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$. Wir betrachten $\sigma \in \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\alpha)|\mathbb{Q})$, mit $\sigma(\alpha) = \beta$. Man beobachtet die folgenden Gleichungen, die man leicht aus b) erhält:

$$\alpha\beta = 10 - \alpha^2 = 5\sqrt{2}, \quad \frac{10}{\beta} - \beta = \frac{10 - \beta^2}{\beta} = \frac{-5\sqrt{2}}{\beta} = -\frac{\alpha\beta}{\beta} = -\alpha \neq \alpha.$$

Es gilt dann $\sigma^2(\alpha) = \sigma(\beta) = \sigma(\frac{10-\alpha^2}{\alpha}) = \frac{10-\beta^2}{\beta} = -\alpha \neq \alpha$. Daher hat σ **nicht** Ordnung 2. Da σ auch nicht Ordnung 1 hat, kann $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\alpha)|\mathbb{Q})$ nur isomorph zur zyklischen Gruppe mit 4 Elementen, $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, sein.